

11. Calcul des efforts tranchants dans les entretoises

Comme dans les longerons des constructions pas trop grandes ou peu chargées, on peut aussi calculer les efforts tranchants dans les entretoises par la relation

$$Q_{ym} = \frac{\partial M_y}{\partial y} = p_m b \sin \frac{m\pi x}{l} \frac{\partial \mu}{\partial y} = \kappa_{am} p_m \sin \frac{m\pi x}{l}, \quad 11.1$$

où le coefficient κ_{am} vaut

$$\begin{aligned} \kappa_{am} = & -\frac{m^3 \pi^3}{b^3 p_m} \vartheta^3 \varrho_E \left[(2\alpha - 1) \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} \left(A_m M_{\varphi m} + \frac{B_m}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} N_{\varphi m} \right) + \right. \\ & + (2\alpha + 1) \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} \left(-A_m N_{\varphi m} + \frac{B_m}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} M_{\varphi m} \right) - \\ & - (2\alpha - 1) \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} \left(C_m O_{\varphi m} + \frac{D_m}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} P_{\varphi m} \right) + \\ & + (2\alpha + 1) \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} \left(-C_m P_{\varphi m} + \frac{D_m}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} O_{\varphi m} \right) \pm \\ & \left. \pm \frac{\bar{C}_m}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} \left(-\alpha P_{|\varphi-\psi|m} + \sqrt{1-\alpha^2} O_{|\varphi-\psi|m} \right) \right]. \quad 11.2 \end{aligned}$$

Afin de déterminer exactement les efforts tranchants, il est nécessaire, comme dans le calcul des efforts longitudinaux (tenant compte de l'influence des moments de torsion), de faire une distinction entre le grillage et la dalle.

11.1 Efforts tranchants dans le sens transversal de la dalle

L'effort tranchant dans le sens Y par unité de longueur est donné par l'expression

$$Q_{ym} = -\varrho_E \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - 2\gamma \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}. \quad 11.3$$

Si l'on introduit la notation $2\gamma = \alpha \sqrt{\varrho_P \varrho_E}$, on obtient, après avoir effectué les dérivations correspondantes, l'expression sous une forme se prêtant à l'emploi pratique

$$Q_{ym} = v_{am} p_m \sin \frac{m\pi x}{l}, \quad 11.4$$

où l'on a

$$\begin{aligned} v_{am} = & \frac{m^3 \pi^3 \vartheta^3 \varrho_E}{b^3 p_m} \left[(1 - \alpha) \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} \left(A_m M_{\varphi m} + \frac{B_m}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} N_{\varphi m} \right) - \right. \\ & - (1 + \alpha) \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} \left(-A_m N_{\varphi m} + \frac{B_m}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} M_{\varphi m} \right) - \\ & - (1 - \alpha) \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} \left(C_m O_{\varphi m} + \frac{D_m}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} P_{\varphi m} \right) - \\ & - (1 + \alpha) \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} \left(-C_m P_{\varphi m} + \frac{D_m}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} O_{\varphi m} \right) \pm \\ & \left. \pm \sqrt{2(1+\alpha)} \bar{C}_m O_{|\varphi-\psi|m} \right]. \quad 11.5 \end{aligned}$$

Les symboles M , N , O , P , \bar{C} ont les valeurs données par les expressions 6.45 et 8.2; le signe positif du dernier terme de cette équation correspond au cas où $\psi > \varphi$, le signe négatif au cas où $\psi < \varphi$.

Dans le cas où $\alpha = 0$, l'effort tranchant Q_y peut s'exprimer par la formule

$$Q_{ym} = v_{0m} p_m \sin \frac{m\pi x}{l}, \quad 11.4a$$

où le coefficient v_0 est donné par l'expression

$$v_0 = \pm \frac{1}{(\text{sh}^2 2\lambda b - \sin^2 2\lambda b)} \left([\text{ch} \lambda(b+y) \sin \lambda(b+y) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \operatorname{sh} \lambda(b+y) \cos \lambda(b+y) [\operatorname{sh} 2\lambda b \cos \lambda(b+e) \operatorname{ch} \lambda(b-e) - \\
& \quad - \sin 2\lambda b \operatorname{ch} \lambda(b+e) \cos \lambda(b-e)] + \\
& + \operatorname{sh} \lambda(b+y) \sin \lambda(b+y) \{ \operatorname{sh} 2\lambda b [\sin \lambda(b+e) \operatorname{ch} \lambda(b-e) - \\
& - \cos \lambda(b+e) \operatorname{sh} \lambda(b-e)] + \sin 2\lambda b [\operatorname{sh} \lambda(b+e) \cos \lambda(b-e) - \\
& \quad - \operatorname{ch} \lambda(b+e) \sin \lambda(b-e)] \}
\end{aligned} \quad 11.6$$

et où

$$\lambda = \frac{\pi \vartheta}{b\sqrt{2}}.$$

Le signe positif devant l'expression de v_0 correspond au cas où $e > y$, le signe négatif au cas où $e < y$. En outre, il faut changer de signe pour $e < y$ (à droite de la charge) dans les termes y et e entre parenthèses. La valeur v_{0m} s'obtient à partir de l'équation 11.6 en remplaçant ϑ par $m\vartheta$ et λ par $m\lambda$ respectivement.

Pour le calcul du coefficient v_1 , on emploie, à condition que $\alpha = 1$, les formules 6.53 et 8.7; après avoir effectué les dérivations correspondantes, il vient

$$\begin{aligned}
v_1 = & \frac{1}{4 \operatorname{sh}^2 \sigma} \left\{ \pm 2 \operatorname{sh} \sigma \operatorname{sh} \vartheta \chi + \right. \\
& + \frac{2 \operatorname{sh} \sigma \operatorname{sh} \vartheta \varphi [(\sigma \operatorname{ch} \sigma - \operatorname{sh} \sigma) \operatorname{ch} \vartheta \psi - \vartheta \psi \operatorname{sh} \sigma \operatorname{sh} \vartheta \psi]}{3 \operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} \sigma - \sigma} + \\
& \left. + \frac{2 \operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} \vartheta \varphi [(2 \operatorname{sh} \sigma + \sigma \operatorname{ch} \sigma) \operatorname{sh} \vartheta \psi - \vartheta \psi \operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} \vartheta \psi]}{3 \operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} \sigma + \sigma} \right\}; \quad 11.7
\end{aligned}$$

l'effort tranchant a été exprimé par 11.4a en remplaçant l'indice 0 de v par 1. Les coefficients φ , ψ , σ et χ sont donnés par les formules 6.33 et 6.55. Le signe positif du premier terme de l'équation 11.7 correspond au cas où $\psi > \varphi$, le signe négatif au cas où $\psi < \varphi$. v_{1m} s'obtient de l'équation 11.7 en remplaçant ϑ par $m\vartheta$ et σ par $m\sigma$ respectivement.

Sur les bords $y = \pm b$, la réaction \bar{Q}_y , en raison du remplacement des moments de torsion par des efforts supplémentaires selon le paragraphe 5.4, une valeur différant de celle qui découle des relations précédentes. Dans ce cas, l'équation 11.5 prend la forme

$$\begin{aligned}
\bar{v}_{am} = & \frac{m^3 \pi^3 \vartheta^3 Q_E}{b^3 p_m} \left[\sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} \left(A_m M_{\varphi m} + \frac{B_m}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} N_{\varphi m} \right) + \right. \\
& \left. + \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} \left(A_m N_{\varphi m} - \frac{B_m}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} M_{\varphi m} \right) - \right] \quad 11.5a
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} \left(C_m O_{\varphi m} + \frac{D_m}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} P_{\varphi m} \right) + \\
& + \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} \left(C_m P_{\varphi m} - \frac{D_m}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} O_{\varphi m} \right) \pm \\
& \pm \sqrt{2(1+\alpha)} \bar{C}_m O_{|\varphi-\psi|m} \pm \alpha \bar{C}_m \frac{P_{|\varphi-\psi|m}}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}}
\end{aligned}$$

et l'équation 11.7

$$\begin{aligned}
\bar{v}_1 = & \frac{1}{4 \operatorname{sh}^2 \sigma} \left\{ \pm (2 \operatorname{sh} \sigma + \sigma \operatorname{ch} \sigma) \operatorname{sh} \vartheta \chi \pm \vartheta \chi \operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} \vartheta \chi + \right. \\
& \frac{(\sigma \operatorname{ch} \sigma \operatorname{sh} \vartheta \varphi - \vartheta \varphi \operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} \vartheta \varphi) [(\sigma \operatorname{ch} \sigma - \operatorname{sh} \sigma) \operatorname{ch} \vartheta \psi - \\
& \quad - \vartheta \psi \operatorname{sh} \sigma \operatorname{sh} \vartheta \psi]}{3 \operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} \sigma - \sigma} + \\
& \left. + \frac{[(3 \operatorname{sh} \sigma + \sigma \operatorname{ch} \sigma) \operatorname{ch} \vartheta \varphi - \vartheta \varphi \operatorname{sh} \sigma \operatorname{sh} \vartheta \varphi] [(2 \operatorname{sh} \sigma + \right. \\
& \quad \left. + \sigma \operatorname{ch} \sigma) \operatorname{sh} \vartheta \psi - \vartheta \psi \operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} \vartheta \psi]}{3 \operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} \sigma + \sigma} \right\}. \quad 11.7a
\end{aligned}$$

L'expression 11.6 pour v_0 reste inchangée.

Les relations 11.5a et 11.7a ne sont que des vérifications car on sait déjà, par les conditions aux limites, que la réaction sur le bord doit être nulle pour une position quelconque de la charge. Pour $y = b$ et pour $-b \leq e \leq \frac{3}{4}b$ on a donc $\bar{v}_a = 0$ et pour $e = b$ on a $\bar{v}_a = 1$.

En calculant les coefficients v pour α différents entre 0 et 1 Bareš [6] a constaté qu'il était possible d'employer, pour déterminer v_a général à l'aide de v_0 et v_1 , dans toute l'étendue, la formule d'interpolation sous forme

$$v_a = v_0 + (v_1 - v_0) \sqrt{\alpha}. \quad 11.8$$

Grâce aux formules 11.6 et 11.7 on a calculé [4, 5] les valeurs des lignes d'influence des coefficients v_0 et v_1 ($\alpha = 0$, $\alpha = 1$) aux points $y = 0, \frac{b}{4}, \frac{b}{2}, \frac{3}{4}b, b$ pour l'excentricité de la charge $e = -b, -\frac{3}{4}b, -\frac{b}{2}, -\frac{b}{4}, 0, \frac{b}{4}, \frac{b}{2}, \frac{3}{4}b, b$ pour $\vartheta = 0,10 - 5,0$ variant de 0,10 en 0,10 entre 0,10 et 1,0 et de 0,20 en 0,20 entre 1,0 et 5,0.

Par lignes d'influence des efforts tranchants transversaux on entend des lignes représentant, pour certaines valeurs des paramètres d'entretoise-

ment ϑ et de torsion α et pour une certaine valeur de y , la variation de v comme fonction de l'excentricité de la charge e . Le coefficient v est l'effort tranchant partiel que produirait une charge partielle $p_1 \sin \frac{\pi x}{l}$ disposée à l'excentricité e , p_1 étant égal à l'unité.

Les valeurs des coefficients v_0 et v_1 sont consignées dans les tableaux V/1 à 30.

Pour les besoins d'un projet préliminaire et pour mettre en lumière leur allure, on a construit encore aux figures 11-1 à 11-8 les lignes d'influence des coefficients v_0 , v_1 sous forme de diagrammes.

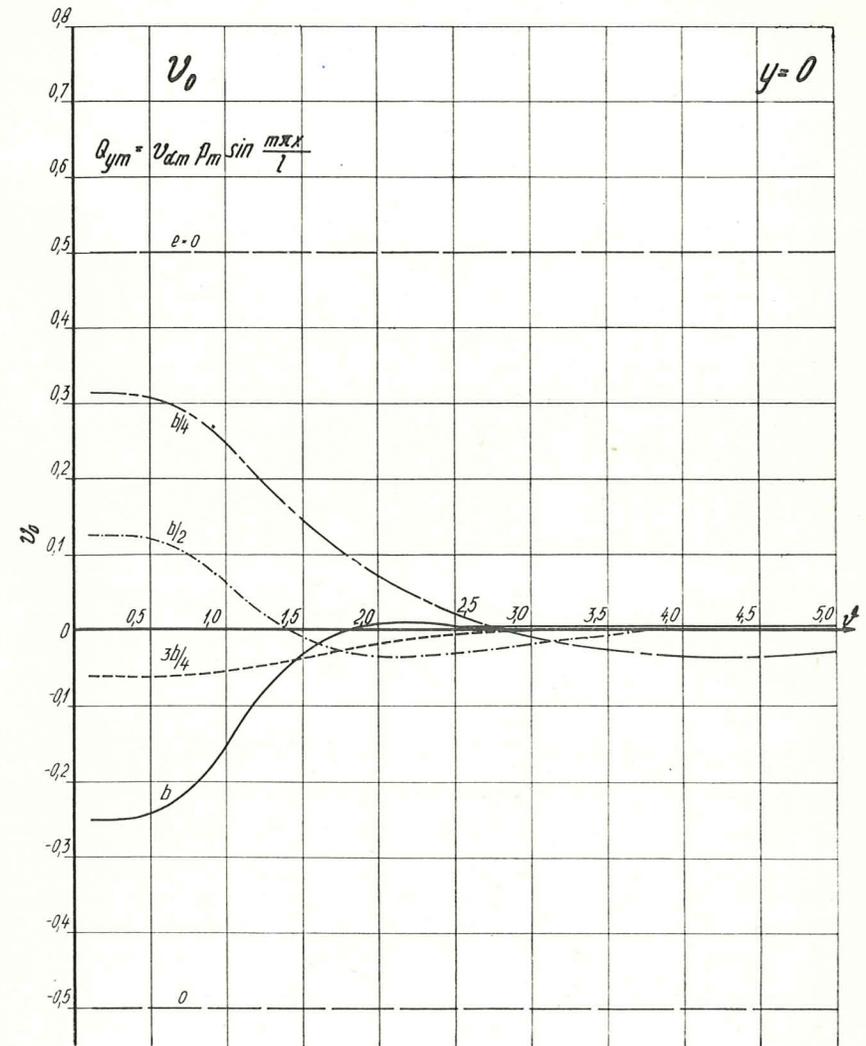


Figure 11-1

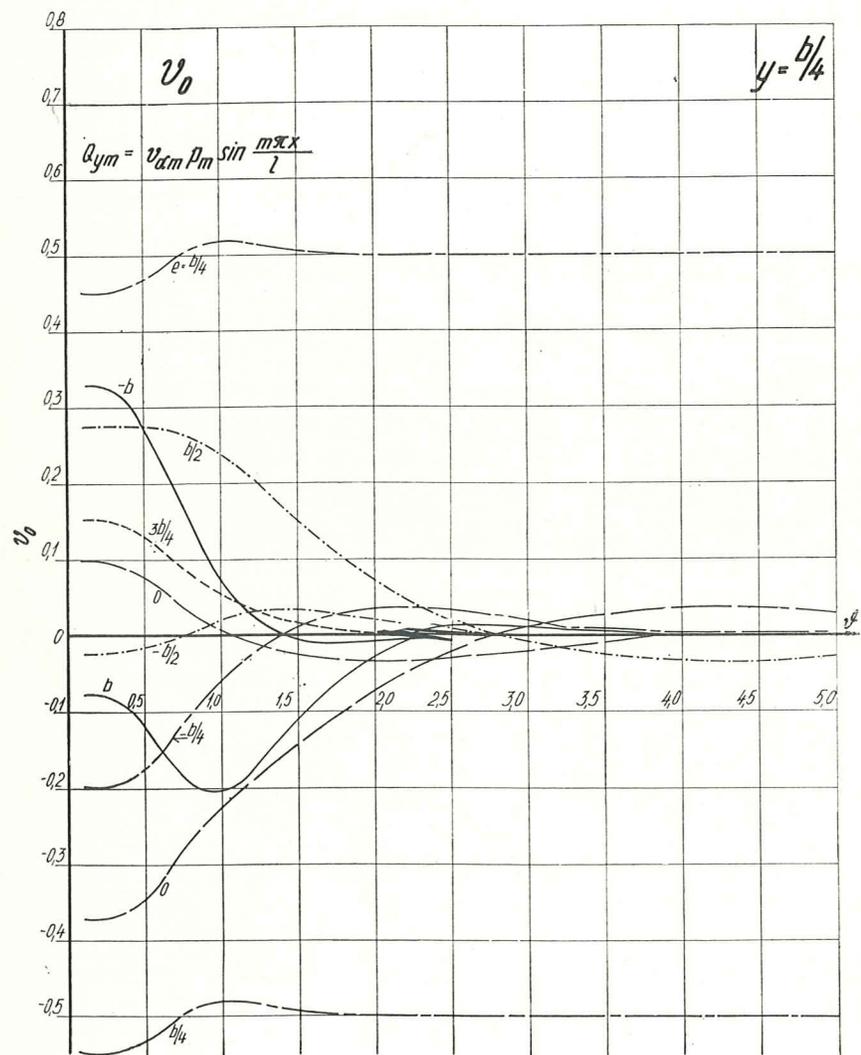


Figure 11-2

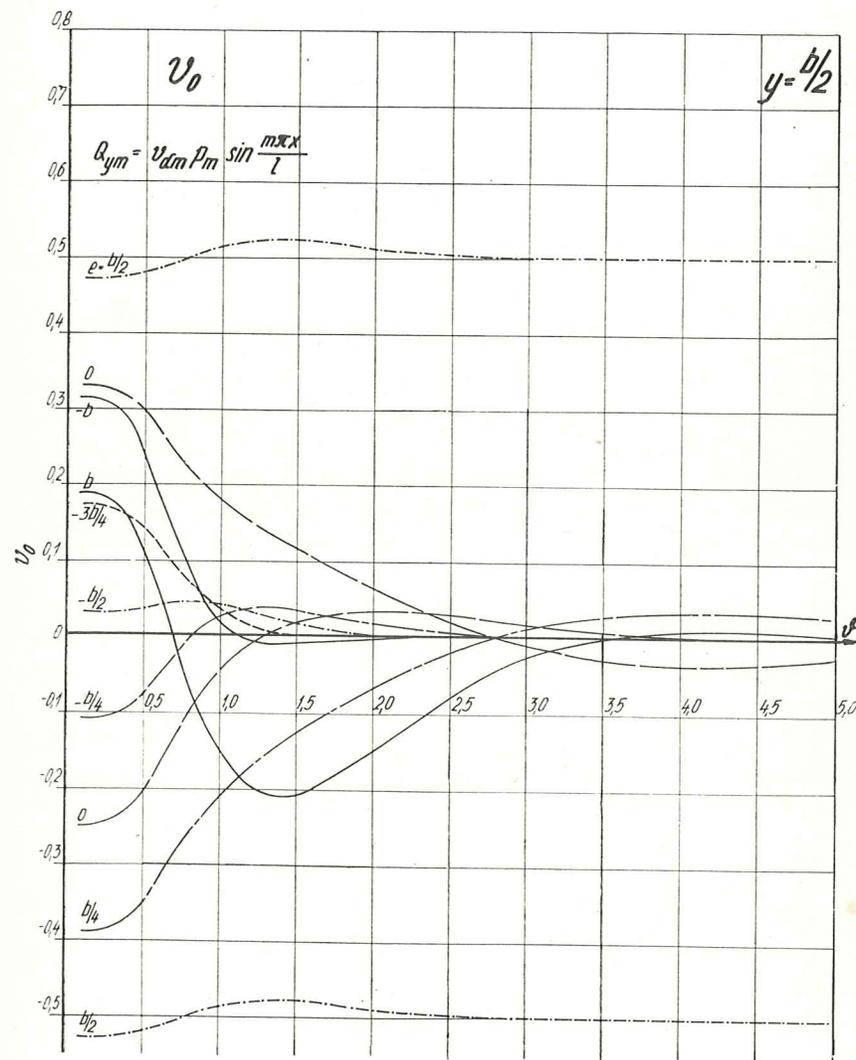


Figure 11-3

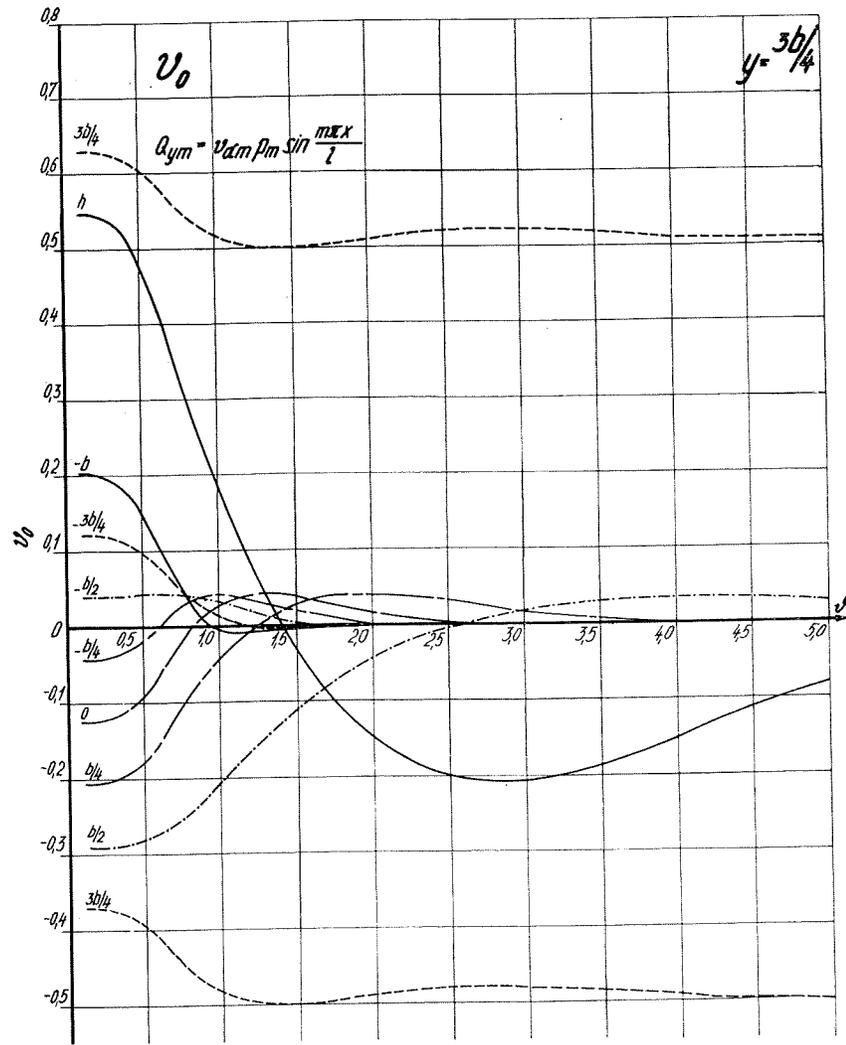


Figure 11-4

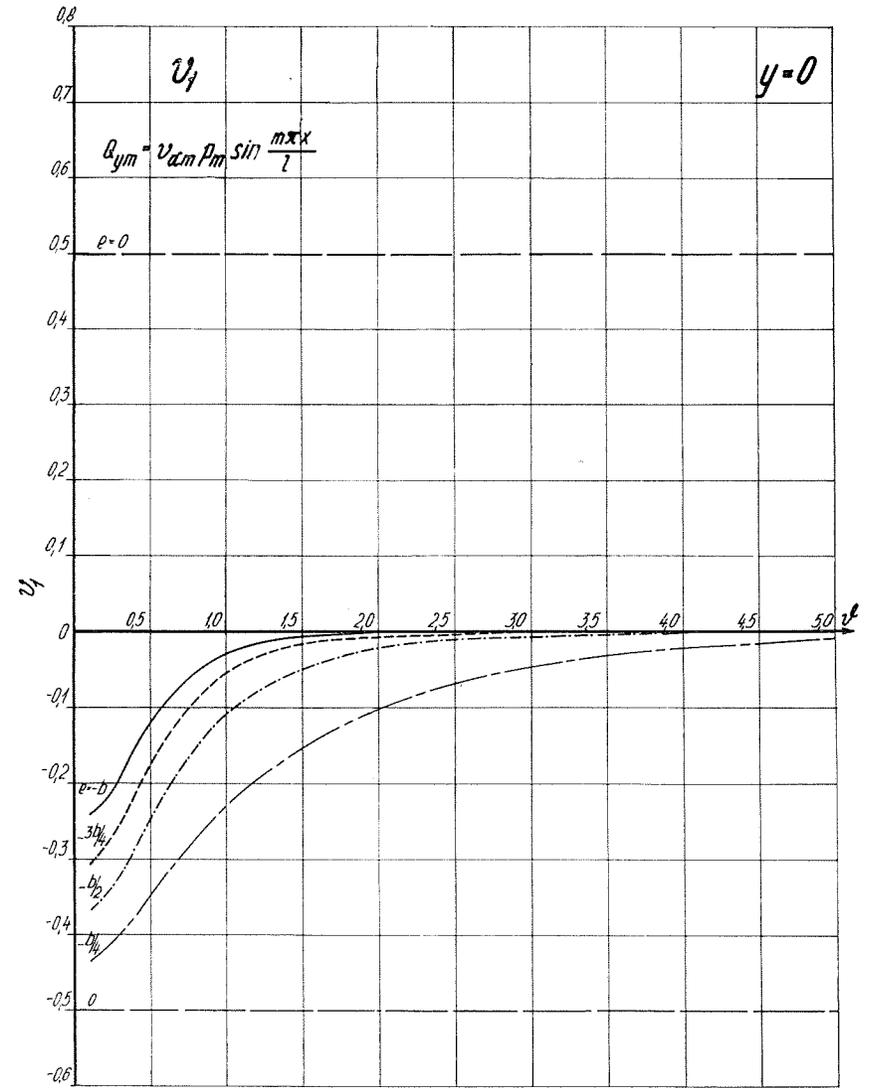
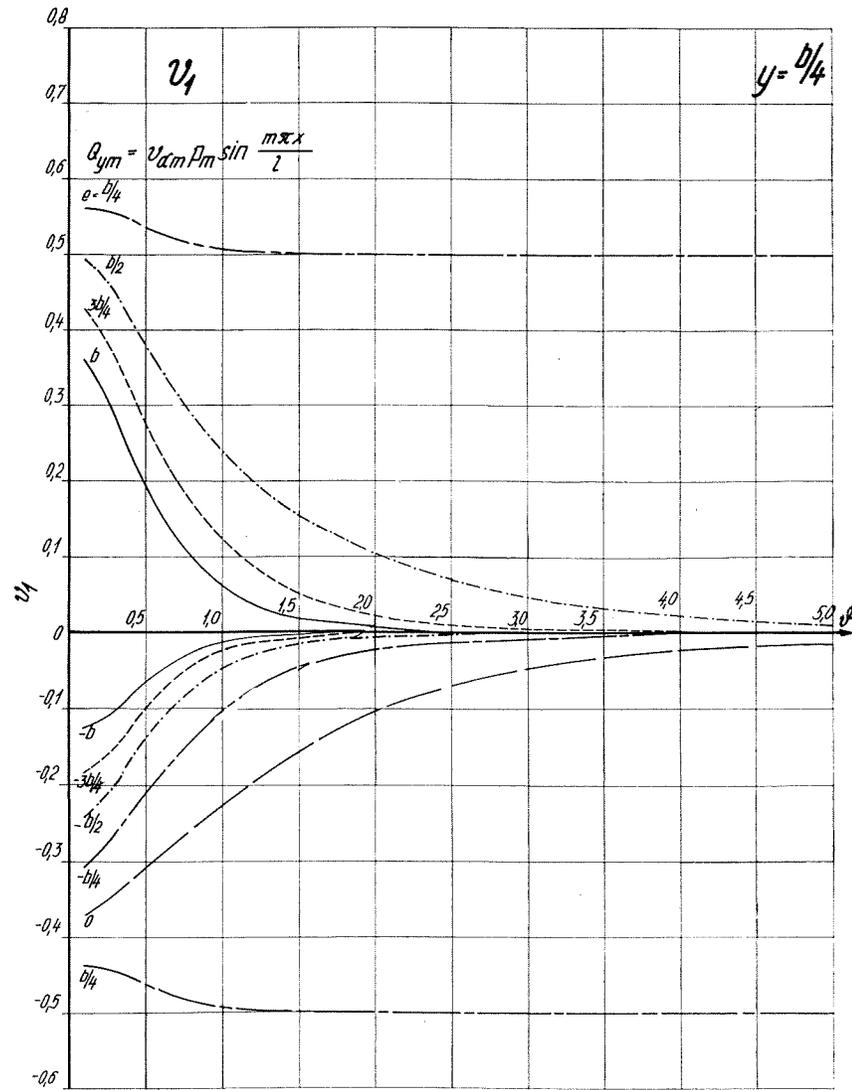


Figure 11-5



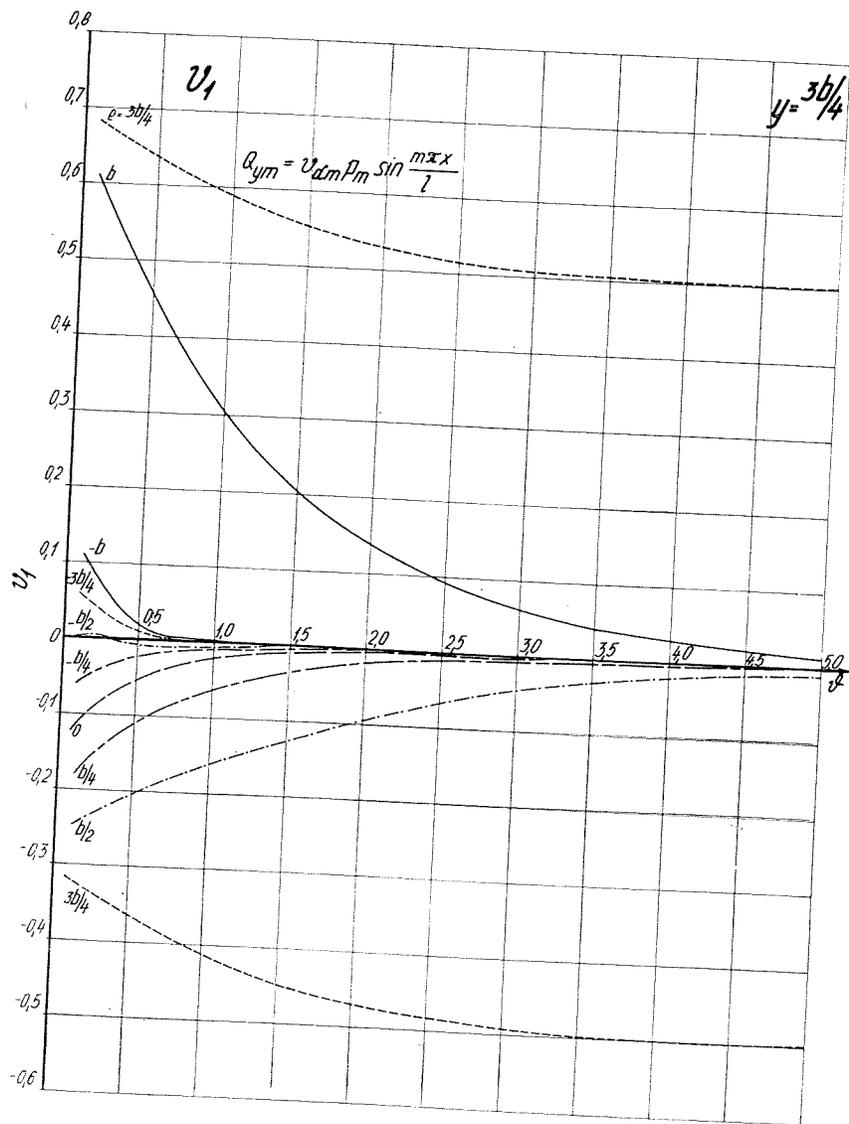


Figure 11-8

11.2 Efforts tranchants dans les entretoises du grillage

L'effort tranchant dans le sens Y par unité de largeur est donné par l'expression

$$Q_y = -\gamma_E \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \gamma_P \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \quad 11.9$$

En exprimant l'effort tranchant sous la forme ordinaire, on obtient, au moyen des coefficients κ_a et τ_a introduits précédemment

$$Q_{ym} = p_m \left[\kappa_{am} + \frac{2\gamma_P}{\gamma_P + \gamma_E} \tau_{am} \right] \sin \frac{m\pi x}{l} \quad 11.10$$

Ici, κ_{am} est donné par la formule 11.2 et τ_{am} par 9.5.

Pour $\alpha = 0$, l'effort tranchant est donné par la même expression 11.6 que dans le cas précédent en raison du fait que les moments de torsion sont nuls. C'est pourquoi pour $\alpha = 0$ on a $\kappa_0 = v_0$.

Pour $\alpha = 1$, on obtient, si nous écrivons l'expression de l'effort tranchant sous la forme ordinaire,

$$Q_{ym} = p_m \left[\kappa_{1m} + \frac{2\gamma_P}{\gamma_P + \gamma_E} \tau_{1m} \right] \sin \frac{m\pi x}{l}, \quad 11.10a$$

où

$$\kappa_1 = -\frac{1}{4 \operatorname{sh}^2 \sigma} \left[\pm [(\sigma \operatorname{ch} \sigma - 2 \operatorname{sh} \sigma) \operatorname{sh} \vartheta \chi - \vartheta \chi \operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} \sigma \chi] + \frac{[(\sigma \operatorname{ch} \sigma - 4 \operatorname{sh} \sigma) \operatorname{sh} \vartheta \varphi - \vartheta \varphi \operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} \vartheta \varphi][(\sigma \operatorname{ch} \sigma - \operatorname{sh} \vartheta \psi - \vartheta \psi \operatorname{sh} \sigma \operatorname{sh} \vartheta \psi)]}{3 \operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} \sigma - \sigma} + \frac{[(\sigma \operatorname{ch} \sigma - \operatorname{sh} \sigma) \operatorname{ch} \vartheta \varphi - \vartheta \varphi \operatorname{sh} \sigma \operatorname{sh} \vartheta \varphi][(2 \operatorname{sh} \sigma + \sigma \operatorname{ch} \sigma) \operatorname{sh} \vartheta \psi - \vartheta \psi \operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} \vartheta \psi]}{3 \operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} \sigma + \sigma} \right] \quad 11.11$$

et τ_1 est donné par la formule 9.8. Le signe positif du premier terme correspond au cas où $\psi < \varphi$, le signe négatif au cas où $\psi > \varphi$. κ_{1m} et τ_{1m} s'obtiennent à partir de ces formules en remplaçant ϑ par $m\vartheta$.

Pour α général, on calcule les coefficients κ_a et τ_a de la façon habituelle par les formules d'interpolation [5, 6]

$$\kappa_a = \kappa_0 + (\kappa_1 - \kappa_0) \sqrt{\alpha} \quad 11.8a$$

et

$$\tau_a = \tau_1 \sqrt{\alpha} \quad 9.9$$

à l'aide de $\kappa_0 = v_0$, κ_1 et τ_1 .

Sur les bords $y = \pm b$, la réaction est donnée par l'expression

$$\bar{Q}_{ym} = p_m \sin \frac{m\pi x}{l} \left[\kappa_{am} + \frac{4\gamma_P}{\gamma_P + \gamma_E} \tau_{am} \right] \quad 11.10b$$

et s'annule conformément aux conditions aux limites.

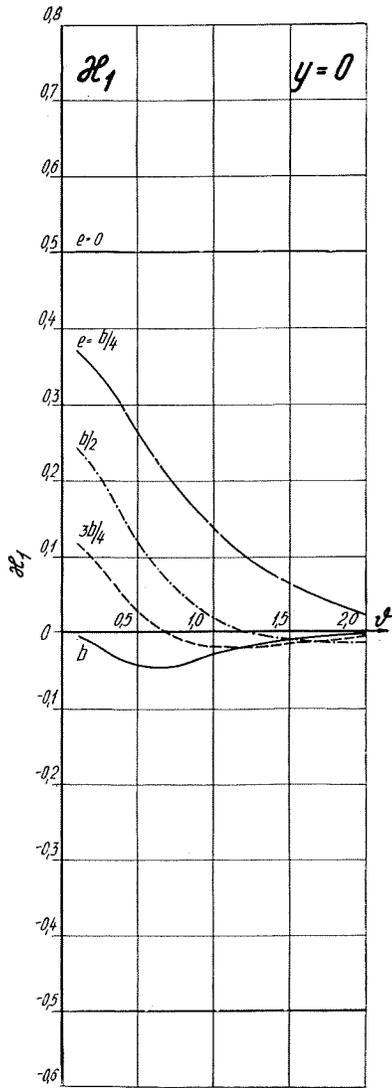


Figure 11-9

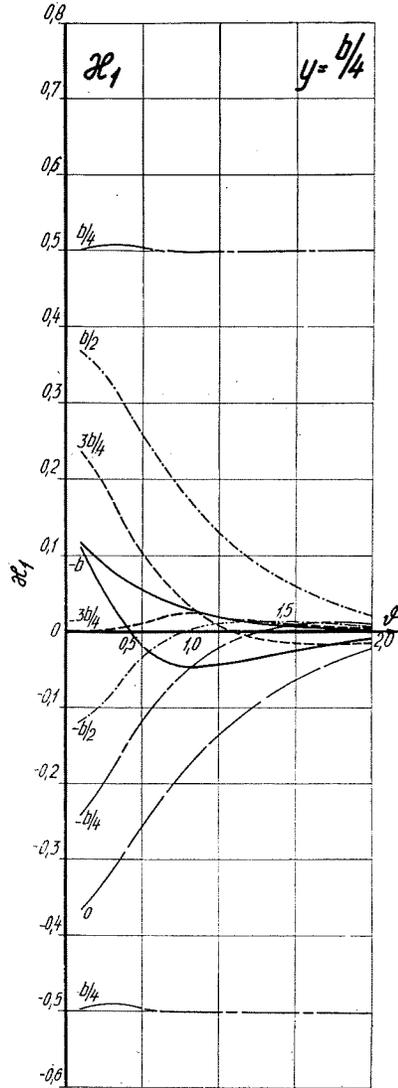


Figure 11-10

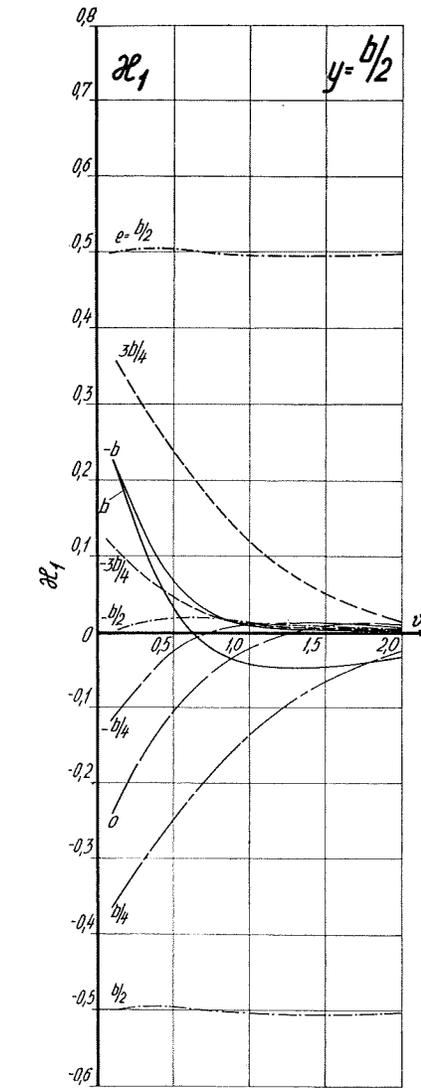


Figure 11-11

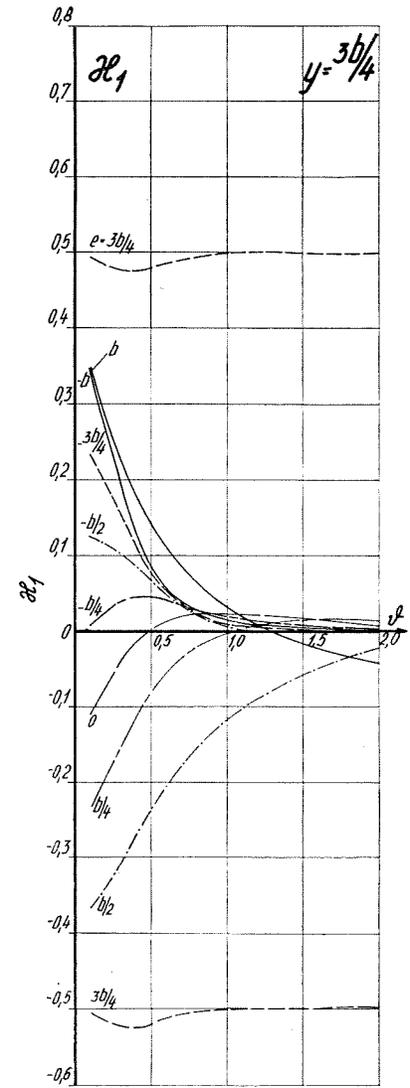


Figure 11-12

D'après 11.11, on a calculé [4, 5] les valeurs des lignes d'influence du coefficient $\kappa_1(\alpha = 1)$ aux points $y = 0, \frac{b}{4}, \frac{b}{2}, \frac{3b}{4}, b$ pour l'excentricité de la charge $e = -b, -\frac{3b}{4}, -\frac{b}{2}, -\frac{b}{4}, 0, \frac{b}{4}, \frac{b}{2}, \frac{3b}{4}, b$ pour $\vartheta = 0,10-2,0$ variant de 0,10 en 0,10 entre 0,10 et 1,0 et de 0,20 en 0,20

entre 1,0 et 2,0. Les valeurs du coefficient κ_1 sont consignées avec celles de v_0 et v_1 dans les tableaux V/1 à 30.

Pour les besoins d'un projet préliminaire et pour mettre en lumière leur allure, on a encore construit aux figures 11-9 à 11-12 les lignes d'influence des coefficients κ_1 sous forme de diagrammes.

Pour déterminer les valeurs maximales des efforts tranchants il faut déterminer, dans le sens transversal, la position la plus efficace de la charge, définie à partir des lignes d'influence de v (ou éventuellement de κ et τ pour les grillages); dans le sens longitudinal, on se place d'habitude au droit du chargement.

En procédant de même façon qu'au paragraphe 6.5 (figure 6-9) et au chapitre 8 (figure 8-10) et si $\vartheta = 0$ et $\alpha = 0$, on obtient des lignes d'influence v sous forme de lignes brisées formées de deux tronçons parallèles présentant un ressaut unitaire et qui ont pour équations

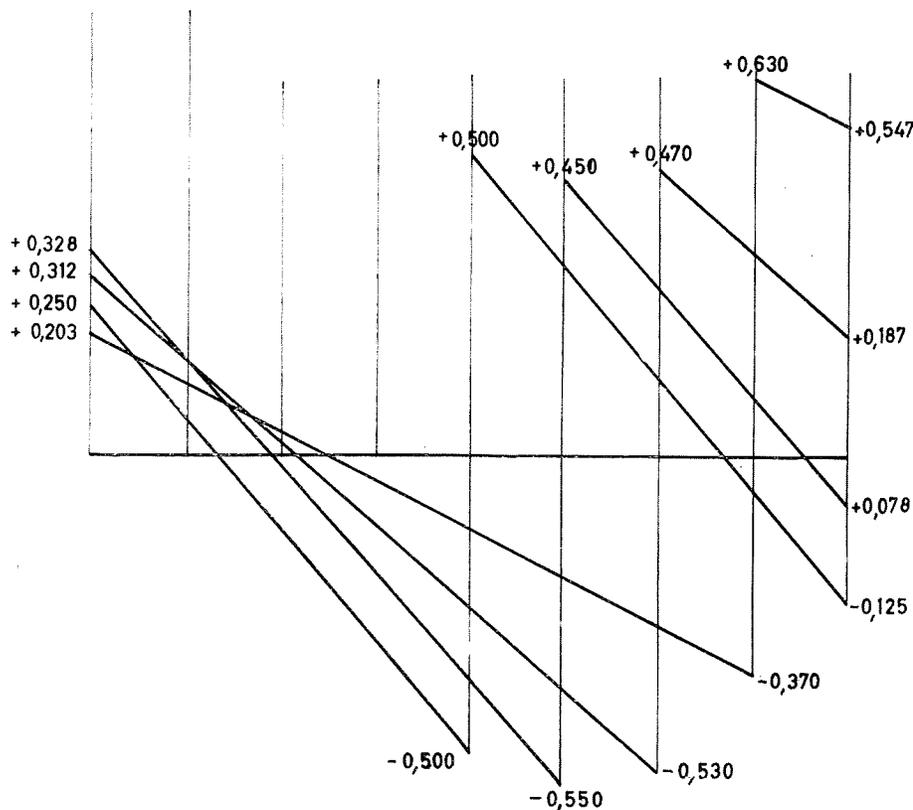


Figure 11-13

$$v_{00(y)} = -\frac{1 - \frac{y}{b}}{2} \left(1 + 3 \frac{e}{b} \frac{1 + \frac{y}{b}}{2} \right) \quad (e \leq y) \quad 11.12$$

$$v_{00(y)} = 1 - \frac{1 - \frac{y}{b}}{2} \left(1 + 3 \frac{e}{b} \frac{1 + \frac{y}{b}}{2} \right) \quad (e > y)$$

Ces lignes d'influence sont représentées à la figure 11-13.

Exemple 8

Pour la construction et la charge définies dans l'exemple 2, il faut déterminer l'allure des efforts tranchants transversaux sur la largeur de la construction et définir l'effort tranchant maximal dans la section $x = \frac{l}{2}$ (à condition qu'il s'agisse d'une dalle orthotrope).

De l'examen du tableau V/7, on déduit les valeurs du coefficient v_0 et v_1 pour les positions données de la charge $e = -\frac{3}{4}b, -\frac{b}{2}, \frac{b}{4}, \frac{b}{2}, b$ et pour y entre $-b$ et $+b$ en envisageant le vrai signe.

		v_0				
y	e	$-\frac{3}{4}b$	$-\frac{b}{2}$	$\frac{b}{4}$	$\frac{b}{2}$	b
$-b$		0	0	0	0	0
$-\frac{3}{4}b$		+0,43513 -0,56487	+0,25762	-0,01562	-0,04300	-0,07075
$-\frac{b}{2}$		-0,24734	+0,50954 -0,49045	+0,02773	-0,04311	-0,13818
$-\frac{b}{4}$		-0,04625	-0,26977	+0,13117	+0,00409	-0,19424
0		+0,06012	-0,10624	+0,29237	+0,10624	-0,21844
$\frac{b}{4}$		+0,09917	-0,00409	+0,49611 -0,50389	-0,26977	-0,17304
$\frac{b}{2}$		+0,09382	+0,04311	-0,29637	+0,49045 -0,50954	-0,00138
$\frac{3}{4}b$		+0,05863	+0,04300	-0,12351	-0,25762	+0,36707
b		0	0	0	0	1

		v_1				
$y \backslash e$		$-3/4b$	$-b/2$	$b/4$	$b/2$	b
b		0	0	0	0	0
$-3/4b$		+0,38340 -0,61660	+0,18595	+0,01484	+0,00392	+0,00440
$-b/2$		-0,35480	+0,44216 -0,55784	+0,07612	+0,04368	+0,01391
$-b/4$		-0,20296	-0,31955	+0,16100	+0,09697	+0,03564
0		-0,11403	-0,18032	+0,29577	+0,18032	+0,07049
$b/4$		-0,06045	-0,09697	+0,52223 -0,47777	+0,31955	+0,12629
$b/2$		-0,02560	-0,04368	-0,24443	+0,55784 -0,44216	+0,22124
$3/4b$		+0,00131	-0,00392	-0,08685	-0,18595	+0,38476
b		0	0	0	0	1

		$(v_1 - v_0)$				
$y \backslash e$		$-3/4b$	$-b/2$	$b/4$	$b/2$	b
$-b$		0	0	0	0	0
$-3/4b$		-0,05173 -0,05173	-0,07167	+0,03046	+0,04692	+0,07515
$-b/2$		-0,10646	-0,06738 -0,06738	+0,04839	+0,08679	+0,15209
$-b/4$		-0,15671	-0,04978	+0,02983	+0,09288	+0,22988
0		-0,17415	-0,07408	+0,00340	+0,07408	+0,28893
$b/4$		-0,15962	-0,09288	+0,02612 +0,02612	+0,04978	+0,29933
$b/2$		-0,11942	-0,08679	+0,05194	+0,06738 +0,06738	+0,22262
$3/4b$		-0,05732	-0,04692	+0,03666	+0,07167	+0,01769
b		0	0	0	0	0

		$\sqrt{\alpha}(v_1 - v_0)$				
$y \backslash e$		$-3/4b$	$-b/2$	$b/4$	$b/2$	b
$-b$		0	0	0	0	0
$-3/4b$		-0,0231 -0,0231	-0,0321	+0,0136	+0,0209	+0,0336
$-b/2$		-0,0476	-0,0301 -0,0301	+0,0216	+0,0388	+0,0680
$-b/4$		-0,0700	-0,0222	+0,0133	+0,0415	+0,1025
0		-0,0780	-0,0332	+0,0015	+0,0332	+0,1290
$b/4$		-0,0714	-0,0415	+0,0117 +0,0117	+0,0222	+0,1340
$b/2$		-0,0535	-0,0388	+0,0232	+0,0301 +0,0301	+0,0996
$3/4b$		-0,0256	-0,0209	+0,0164	+0,0321	+0,0079
b		0	0	0	0	0

		v_a				
$y \backslash e$		$-3/4b$	$-b/2$	$b/4$	$b/2$	b
$-b$		0	0	0	0	0
$-3/4b$		+0,4120 -0,5880	+0,2255	-0,0020	-0,0221	-0,0371
$-b/2$		-0,2949	+0,4794 -0,5205	+0,0493	-0,0043	-0,0702
$-b/4$		-0,1162	-0,2920	+0,1445	+0,0456	-0,0917
0		-0,0179	-0,1394	+0,2939	+0,1394	-0,0894
$b/4$		+0,0278	-0,0456	+0,5078 -0,4922	+0,2920	-0,0390
$b/2$		+0,0403	+0,0043	-0,2732	+0,5205 -0,4794	+0,0982
$3/4b$		+0,0377	+0,0221	-0,1071	-0,2255	+0,3750
b		0	0	0	0	1

y \ e	$v_a p_i$					$\Sigma v_a p_i$
	-3/4b	-b/2	b/4	b/2	b	
-b	0	0	0	0	0	0
-3/4b	+0,6190 -0,8830	+0,1127	-0,0020	-0,0442	-0,0185	+0,6670 -0,8350
-b/2	-0,4430	+0,2397 -0,2602	+0,0493	-0,0086	-0,0351	-0,1977 -0,6976
-b/4	-0,1745	-0,1460	+0,1445	+0,0912	-0,0458	-0,1406
0	-0,0268	-0,0697	+0,2939	+0,2788	-0,0447	+0,4315
b/4	+0,0417	-0,0228	+0,5078 -0,4922	+0,5840	-0,0195	+1,0912 +0,0912
b/2	+0,0605	+0,0021	-0,2732	+1,0410 -0,9588	+0,0491	+0,8795 -1,1203
3/4b	+0,0565	+0,0110	-0,1071	-0,4510	+0,1875	-0,3031
b	0	0	0	0	0	0

L'effort tranchant transversal maximum est appliqué à droite de la section $y = \frac{b}{2}$ au droit $x = \frac{l}{2}$ et vaut $(Q_y)_{\max} = 1,12 \text{ t/m'}$ (figure 11-14).

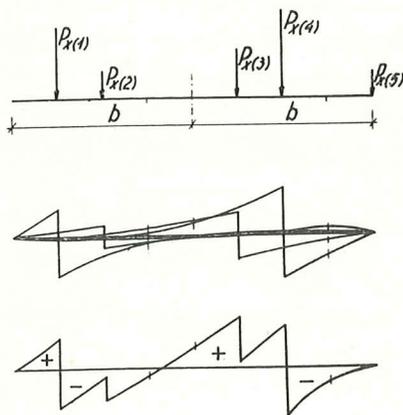


Figure 11-14

12. Méthode rigoureuse de calcul

12.1 Surfaces d'influence

Le but de la méthode rigoureuse est de déterminer les surfaces d'influence de différents effets de chargement de la construction étudiée.

Toute charge générale peut être remplacée par une charge développée en série de Fourier. Pour notre propos, il convient de choisir la fonction $p(x)$ antisymétrique par rapport à $x = 0$ (impaire) où $p(-x) = -p(x)$.

En prenant les notations d'après la figure 12-1 (et en choisissant la période $L = 2l$), nous obtiendrons, pour une charge unitaire partielle, le coefficient par les formules connues [40]

$$p_m = \frac{4}{2l} \int_{d-c}^{d+c} p \sin \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{4p}{m\pi} \sin \frac{m\pi c}{l} \sin \frac{m\pi d}{l} \quad 12.1$$

et la série de Fourier

$$p(x) = \sum_{m=1}^{\infty} p_m \sin \frac{m\pi x}{l} = \frac{4p}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sin \frac{m\pi c}{l} \sin \frac{m\pi d}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} \quad 12.2$$

Pour une charge linéaire uniforme complète, on a, d'après 12.2, pour $c = \frac{l}{2}$ et $d = \frac{l}{2}$ (figure 12-2)

$$p_m = \frac{4p}{\pi m} \sin^2 \frac{m\pi}{2}$$

et

$$p(x) = \frac{4p}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sin^2 \frac{m\pi}{2} \sin \frac{m\pi x}{l} \quad 12.3$$

Cette équation peut s'écrire aussi

$$p(x) = \frac{4p}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sin \frac{m\pi x}{l}, \quad (m = 1, 3, 5, \dots) \quad 12.3a$$

car

$$p_m = \frac{4p}{\pi m} \text{ pour } m = 1, 3, 5, \dots$$

On obtient une expression analogue pour une charge concentrée (figure 12-3) - dont nous avons besoin surtout afin de pouvoir déterminer les surfaces d'influence - à partir de l'équation 12.2 en posant d'abord $P = 2pc$ et en effectuant, ensuite, pour P constant, la limite de l'expression

$$\frac{\sin \frac{m\pi c}{l}}{\frac{m\pi c}{l}} \text{ pour } c \text{ tendant vers zéro.}$$

Comme

$$\lim_{c \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{m\pi c}{l}}{\frac{m\pi c}{l}} = 1,$$

on a

$$p_m = \frac{2P}{l} \sin \frac{m\pi d}{l};$$

la série s'obtient sous la forme

$$p(x) = \frac{2P}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi d}{l} \sin \frac{m\pi x}{l}. \quad 12.4$$

Pour un système de charges d'abscisses $d_1, d_2 \dots d_n$ (figure 12-4), on a

$$p(x) = \frac{2}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n P_i \sin \frac{m\pi d_i}{l} \sin \frac{m\pi x}{l}. \quad 12.5$$

Une charge uniforme partielle appliquée à la surface $2c \times 2d$ (fi-

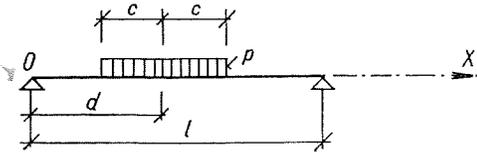


Figure 12-1

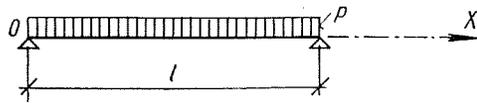


Figure 12-2

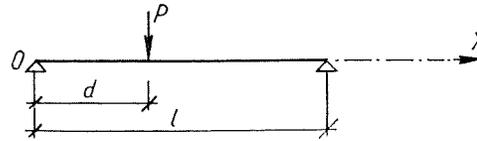


Figure 12-3

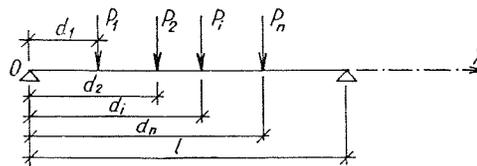


Figure 12-4

gure 12-5) peut s'exprimer, de façon analogue, par la série double de Fourier sous forme

$$p(x, y) = \frac{16p}{\pi^2} \sum_m \sum_n \frac{1}{mn} \sin \frac{m\pi u}{l} \sin \frac{m\pi c}{l} \sin \frac{n\pi(b-v)}{2b} \sin \frac{n\pi d}{2b} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi(b-y)}{2b}. \quad 12.6$$

Pour la pleine charge uniforme, on a, enfin,

$$p(x, y) = \frac{16p}{\pi^2} \sum_m \sum_n \frac{1}{mn} \sin^2 \frac{m\pi}{2} \sin^2 \frac{n\pi}{2} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi(b-y)}{2b}.$$

À l'aide des formules ci-dessus, on peut calculer rigoureusement une construction formée de poutres et d'entretoises pour un cas quelconque de chargement.

En employant la série 12.4 pour une charge concentrée unitaire appliquée à un point général de coordonnées $x = d, y = e$, on peut calculer la surface d'influence des flèches, moments et efforts tranchants, c'est-à-dire la surface représentant la grandeur de la quantité cherchée à un certain point x, y , si la charge unitaire se déplace sur la construction. L'équation de la surface d'influence du déplacement vertical est donnée par la relation

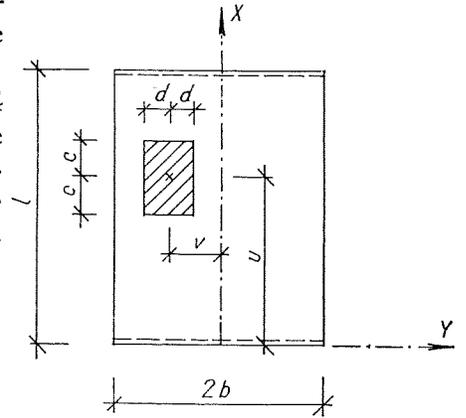


Figure 12-5

$$w(x, y) = \frac{l^3}{b^2 \pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} K_m \frac{1}{m^4} \sin \frac{m\pi d}{l} \sin \frac{m\pi x}{l}; \quad 12.7$$

de façon analogue, la surface d'influence des moments fléchissants longitudinaux est

$$M_x(x, y) = \frac{l}{b\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} K_m \frac{1}{m^2} \sin \frac{m\pi d}{l} \sin \frac{m\pi x}{l}, \quad 12.8$$

la surface d'influence des moments transversaux

$$M_y(x, y) = \frac{2b}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m \sin \frac{m\pi d}{l} \sin \frac{m\pi x}{l}, \quad 12.9$$

la surface d'influence des moments de torsion (d'une dalle orthotrope)

$$M_{xy}(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \tau_m \frac{1}{m} \sin \frac{m\pi d}{l} \cos \frac{m\pi x}{l}, \quad 12.10$$

la surface d'influence des efforts tranchants longitudinaux (de la dalle orthotrope)

$$Q_x(x, y) = \frac{2}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m \sin \frac{m\pi d}{l} \cos \frac{m\pi x}{l} \quad 12.11$$

et la surface d'influence des efforts tranchants transversaux (de la dalle orthotrope)

$$Q_y(x, y) = \frac{2}{l} \sum_{m=1}^{\infty} v_m \sin \frac{m\pi d}{l} \sin \frac{m\pi x}{l}. \quad 12.12$$

Les coefficients K_m , μ_m , τ_m , ε_m , v_m sont donnés par les relations 6.46, 8.5, 9.5, 10.7 et 11.5 qui ont été établies antérieurement.

12.2 Termes suivants de la série

Pour la méthode rigoureuse, il ne suffit pas, ordinairement, de déterminer, dans le calcul des différentes quantités statiques, le premier terme seul de la série correspondante, comme dans la méthode approchée que nous avons décrite antérieurement.

Pour obtenir la valeur exacte au droit du chargement, il est nécessaire, dans le calcul des moments fléchissants et de torsion et des efforts tranchants, de conserver trois à cinq des premiers termes de la série correspondante pour le chargement dû à une charge concentrée, et trois termes dans le calcul des déplacements verticaux.

Comme il est extrêmement pénible et peut entraîner beaucoup d'erreurs, un tel calcul de plusieurs termes de la série est pratiquement inapplicable. Heureusement, l'analyse détaillée des équations déduites a montré que le m -ième coefficient de la série lequel correspond à la répartition de la charge $p = p_m \sin \frac{m\pi x}{l}$ était égal au premier terme de la série de construction dont l'entretoisement est m -fois plus souple, c'est-à-dire dont le paramètre d'entretoisement est $m\vartheta$. En d'autres termes, cela signifie que l'entretoisement pour la charge $p = p_m \sin \frac{m\pi x}{l}$ devient m -fois plus souple que pour la charge $p = p_1 \sin \frac{\pi x}{l}$ (voir figures 7-1 et 7-2).

Cette notion est d'une grande importance pour les projets pratiques, car elle permet de calculer très rapidement et avec une précision aussi grande qu'on veut une construction quelconque à l'aide des tableaux de coefficients de répartition transversale. Pour le paramètre réel d'entretoisement ϑ , on calculera facilement les valeurs statiques approchées et on modifiera, éventuellement, les dimensions de la construction. On peut procéder de telle manière plusieurs fois jusqu'à ce qu'on arrive à la construction la plus économique. Ensuite, on calcule les valeurs statiques à l'aide de tableaux des K , μ , τ , ε , v de façon à faire la somme des valeurs partielles obtenues pour les paramètres d'entretoisement ϑ , 2ϑ , 3ϑ , ..., $m\vartheta$ pour les charges $p_1 \sin \frac{\pi x}{l}$, $p_2 \sin \frac{2\pi x}{l}$, $p_3 \sin \frac{3\pi x}{l}$, ..., $p_m \sin \frac{m\pi x}{l}$.

12.3 Formule d'interpolation

Pour calculer en pratique le coefficient K_α , nous avons fait usage de la formule d'interpolation de Massonnet suivant laquelle il suffit de déterminer seulement K_0 et K_1 pour $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$.

Cette formule ne représente cependant pas tout à fait exactement les variations du coefficient K en fonction de α pour tous les ϑ . Dans un calcul rigoureux, il est nécessaire d'appliquer les formules établies par Sattler [142] et qui dépendent aussi de la valeur de ϑ :

pour

$$0 < \vartheta \leq 0,1 \quad K_\alpha = K_0 + (K_1 - K_0) \alpha^{0,05},$$

pour

$$0,1 < \vartheta \leq 1,0 \quad K_\alpha = K_0 + (K_1 - K_0) \alpha \left(1 - e^{-\frac{0,065-\vartheta}{0,663}} \right), \quad 12.13$$

pour

$$\vartheta > 1,0 \quad K_\alpha = K_0 + (K_1 - K_0) \sqrt{\alpha}.$$

Dans le calcul des moments transversaux, il est possible d'employer, pour l'interpolation des valeurs de μ_α , les mêmes relations

pour

$$0 < \vartheta \leq 0,1 \quad \mu_\alpha = \mu_0 + (\mu_1 - \mu_0) \alpha^{0,05}$$

pour

$$0,1 < \vartheta \leq 1,0 \quad \mu_\alpha = \mu_0 + (\mu_1 - \mu_0) \alpha \left(1 - e^{-\frac{0,065-\vartheta}{0,663}} \right), \quad 12.14$$

pour

$$\vartheta > 1,0 \quad \mu_\alpha = \mu_0 + (\mu_1 - \mu_0) \sqrt{\alpha}.$$

Exemple 9

Soit à déterminer la surface d'influence des moments fléchissants longitudinaux pour la construction de l'exemple 1 au point C ($x = \frac{l}{2}, y = \frac{b}{2}$).

Le calcul doit être effectué à l'aide des trois premiers termes de la série correspondante et des formules exactes d'interpolation 12.13.

Le calcul sera effectué dans un réseau de 15 points d'après la figure 12-6. Pour $\vartheta = 0,7$ et $3\vartheta = 2,1$, on trouve dans le tableau I/14 de $y = \frac{b}{2}$ et $e = -b, -\frac{b}{2}, 0, \frac{b}{2}, b$ les coefficients K_0 et K_1 . Selon l'équation 12.13 on a employé, pour $\vartheta = 0,7$, la formule d'interpolation

$$K_a = K_0 + (K_1 - K_0) \alpha^{1 - e^{\frac{0,065 - \vartheta}{0,663}}}$$

Rechercher, pour $2\vartheta = 1,4$, les valeurs de

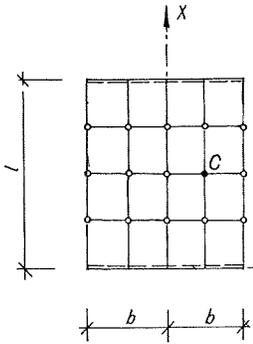


Figure 12-6

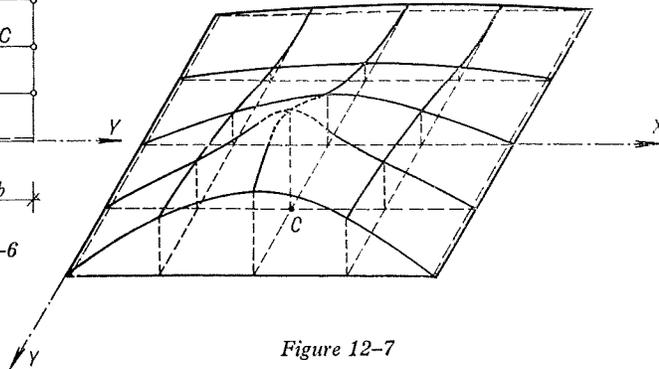


Figure 12-7

K n'a pas de sens, le terme $\sin \frac{m\pi x}{l}$ de l'équation 12.8 étant nul pour $x = \frac{l}{2}$ et $m = 2$. L'exposant de e dans la formule d'interpolation est

$$\frac{0,065 - 0,70}{0,663} = -0,95$$

et puis

$$e^{-0,95} = 0,390,$$

$$1 - 0,390 = 0,610,$$

$$\alpha^{0,610} = 0,49^{0,610} = 0,649.$$

Calcul du coefficient de répartition transversale K_a :

e	K_0	K_1	$K_1 - K_0$	$0,649(K_1 - K_0)$	K_a
	$\vartheta = 0,7$				
$-b$	-0,5114	0,3342	0,8456	0,549	0,038
$-b/2$	0,1798	0,5535	0,3737	0,242	0,422
0	1,0580	0,9923	-0,0657	-0,043	1,015
$b/2$	1,9393	1,5134	-0,4259	-0,276	1,663
b	2,0618	1,5262	-0,5356	-0,348	1,714
$\vartheta = 2,1$					
$-b$	0,0140	0,0030	-0,0110	-0,0077	0,0063
$-b/2$	-0,0483	0,0354	0,0837	0,0586	0,0103
0	0,0147	0,5276	0,5129	0,3590	0,3737
$b/2$	4,7937	3,3496	-1,4441	-1,0109	3,7828
b	-1,2340	0,8620	2,0961	1,4673	0,2333

Détermination des termes partiels de l'équation 12.8:

$\frac{d}{l}$	$\frac{1}{m^2} \sin \frac{m\pi d}{l}$			$\sin \frac{m\pi x}{l}$			$\frac{1}{m^2} \sin \frac{m\pi d}{l} \sin \frac{m\pi x}{l}$		
	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$
1/4	0,707	0,250	0,0787	1	0	-1	0,707	0	-0,0787
1/2	1	0	-0,111	1	0	-1	1	0	+0,111
3/4	0,707	-0,250	+0,0787	1	0	-1	0,707	0	-0,0787

$$\frac{l}{b\pi^2} = \frac{10}{8\pi^2} = 0,253$$

Calcul des ordonnées d'influence du moment fléchissant longitudinal:

e	$\sum_{m=1}^3 K_m \frac{1}{m^2} \sin \frac{m\pi d}{l} \sin \frac{m\pi x}{l}$		$\frac{l}{b\pi^2} \sum_{m=1}^3 K_m \frac{1}{m^2} \sin \frac{m\pi d}{l} \sin \frac{m\pi x}{l}$	
	$d = 1/4l, 3/4l$	$d = 1/2l$	$d = 1/4, 3/4l$	$d = 1/2l$
$-b$	0,027	0,038	0,007	0,010
$-b/2$	0,298	0,423	0,076	0,107
0	0,689	1,056	0,175	0,267
$b/2$	0,880	2,033	0,223	0,528
b	1,194	1,740	0,313	0,440

La surface d'influence du point C est représentée à la figure 12-7.

12.4 Influence du coefficient de Poisson

Dans les chapitres précédents, nous avons supposé en général que le coefficient de Poisson η peut être, pour le béton, posé égal à zéro, alors que la valeur exacte est à peu près 0,15. Pour les calculs rigoureux, il est nécessaire, dans les constructions en béton et surtout dans les constructions en métal où le coefficient de Poisson est de l'ordre de 0,30, de tenir compte de son influence. En calculant la fonction du déplacement vertical w , on rencontre le coefficient de Poisson dans les conditions aux limites 6.27 et 6.28. Si le coefficient de Poisson augmente, la dalle semble devenir plus rigide; les déplacements verticaux se réduisent et les moments augmentent.

Pour déterminer les moments fléchissants, il faut écrire, de manière exacte, l'expression 7.3 ou 8.1 comme suit:

$$M_x = -q_P \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \eta_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad 12.15$$

$$M_y = -q_E \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \eta_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right),$$

où

$$q_P = \frac{E_x I_x}{b_0(1 - \eta_x \eta_y)} \quad \text{et} \quad q_E = \frac{E_y I_y}{l_0(1 - \eta_x \eta_y)}. \quad 12.16$$

De façon analogue, les efforts tranchants dans la dalle ont pour expressions exactes

$$Q_x = -q_P \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - (q_{xy} + 2\gamma) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}, \quad 12.17$$

$$Q_y = -q_E \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - (q_{xy} + 2\gamma) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \quad 12.18$$

et les expressions des efforts tranchants dans le grillage sont

$$Q_x = -q_P \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - [\gamma_E + q_{xy}] \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \quad 12.19$$

et

$$Q_y = -q_E \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - [\gamma_P + q_{xy}] \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}. \quad 12.20$$

L'influence du coefficient de Poisson a été étudiée en détail par Rowe [131]. Rowe a constaté que le déplacement vertical et les moments fléchissants dans le sens longitudinal ne dépendaient que très peu du coefficient de Poisson et qu'il ne fallait pas le prendre en considération dans la pratique. Par contre, les moments fléchissants dans le sens transversal sont influencés assez considérablement par la valeur du coefficient de Poisson de sorte qu'il

est désirable d'apporter une correction au procédé précité. Dans les calculs pratiques de ces moments, on fait usage des coefficients μ_0 et μ_1 pour le paramètre de rigidité torsionnelle α égal à zéro ou à l'unité. Il résulte de l'analyse des rapports correspondants que le coefficient μ_0 n'est que très peu influencé par le coefficient de Poisson et qu'il suffit de déterminer la variation du coefficient μ_1 avec η .

En introduisant le coefficient de Poisson η dans les relations pour une plaque isotrope qui ont été déduites par Guyon [42, 131], on obtient le coefficient $(\mu_1)_\eta$ sous la forme

$$(\mu_1)_\eta = -\frac{1}{4\sigma \operatorname{sh}^2 \sigma} \left([(1 - \eta) \sigma \operatorname{ch} \sigma - (1 + \eta) \operatorname{sh} \sigma] \operatorname{ch} \vartheta \chi - \right. \\ \left. - (1 - \eta) \vartheta \chi \operatorname{sh} \sigma \operatorname{sh} \vartheta \chi + \right. \quad 12.21 \\ \left. \frac{\{[(1 - \eta) \sigma \operatorname{ch} \sigma - (3 + \eta) \operatorname{sh} \sigma] \operatorname{ch} \vartheta \varphi - (1 - \eta) \vartheta \varphi \operatorname{sh} \sigma \operatorname{sh} \vartheta \varphi\}}{\{(1 - \eta) \sigma \operatorname{ch} \sigma - (1 + \eta) \operatorname{sh} \sigma\} \operatorname{ch} \vartheta \psi - (1 - \eta) \vartheta \psi \operatorname{sh} \sigma \operatorname{sh} \vartheta \psi} + \right. \\ \left. + \frac{\{(1 - \eta) \sigma \operatorname{ch} \sigma \vartheta \varphi - (1 - \eta) \vartheta \varphi \operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} \vartheta \varphi\} \{[(1 - \eta) \sigma \operatorname{ch} \sigma + \right. \\ \left. + 2 \operatorname{sh} \sigma\} \operatorname{sh} \vartheta \psi - (1 - \eta) \vartheta \psi \operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} \vartheta \psi\}}{(3 + \eta) \operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} \sigma + (1 - \eta) \sigma} \right),$$

qui est semblable à la formule 8.7. De même, les significations des symboles $\varphi, \psi, \sigma, \chi$ dans cette formule sont conformes à celles qui ont déjà été introduites (6.33, 6.55).

Afin de trouver les valeurs correspondantes de μ_α on peut, pour les valeurs intermédiaires de α ($0 < \alpha < 1$), employer la formule d'interpolation [131]

$$(\mu_\alpha)_\eta = (\mu_1)_\eta + [(\mu_1)_\eta - (\mu_0)_0] \sqrt{\alpha}, \quad 12.22$$

où la signification des coefficients est donnée par leurs indices:

$$(\mu_\alpha)_\eta = \text{coefficient cherché } \mu \text{ pour certains } \alpha \text{ et } \eta, \\ (\mu_1)_\eta = \text{coefficient } \mu \text{ pour } \alpha = 1 \text{ et un certain } \eta, \\ (\mu_0)_0 = \text{coefficient } \mu \text{ pour } \alpha = 0 \text{ et } \eta = 0.$$

Dans les tableaux VI/1 à 30, on a consigné d'après [4] les valeurs des lignes d'influence du coefficient $(\mu_1)_{0,15}$ pour $\vartheta = 0,1$ à $5,0$ variant de $0,1$ en $0,1$ entre $0,1$ et $1,0$ et de $0,2$ en $0,2$ pour $\vartheta > 1$, aux points $y = 0, \frac{b}{4}, \frac{b}{2}, \frac{3}{4}b, b$, pour les excentricités de la charge $e = -b, -\frac{3}{4}b, -\frac{b}{2}, -\frac{b}{4}, 0, \frac{b}{4}, \frac{b}{2}, \frac{3}{4}b, b$ et pour le coefficient de Poisson $\eta = 0,15$; pour un projet prélimi-

naire, l'allure du coefficient μ_1 pour $\eta = 0,15$ est représentée aux diagrammes figures 12-8 à 12-11. La formule d'interpolation est, dans ce cas,

$$(\mu_a)_{0,15} = (\mu_1)_{0,15} + [(\mu_1)_{0,15} - (\mu_0)_0] \sqrt{\alpha} . \quad 12.22a$$

On peut procéder de façon analogue même dans les calculs du coefficient de répartition transversale K , si l'on veut déterminer, au point d'application d'une charge extraordinairement lourde agissant sur le bord libre de la construction, la valeur exacte des déplacements verticaux ou surtout celle du moment fléchissant longitudinal. Le coefficient de répartition transversale $(K_1)_\eta$ pour $\alpha = 1$ et η quelconque est donné par la formule

$$(K_1)_\eta = \frac{\sigma}{2 \operatorname{sh}^2 \sigma} \left((\sigma \operatorname{ch} \sigma + \operatorname{sh} \sigma) \operatorname{ch} \vartheta \chi - \vartheta \chi \operatorname{sh} \sigma \operatorname{sh} \vartheta \chi + \right. \\ \left. \frac{\{[(1-\eta)\sigma \operatorname{ch} \sigma - (1+\eta)\operatorname{sh} \sigma] \operatorname{ch} \vartheta \varphi - (1-\eta) \vartheta \varphi \operatorname{sh} \sigma \operatorname{sh} \vartheta \varphi\} \cdot \{[(1-\eta)\sigma \operatorname{ch} \sigma - (1+\eta)\operatorname{sh} \sigma] \operatorname{ch} \vartheta \psi - (1-\eta) \vartheta \psi \operatorname{sh} \sigma \operatorname{sh} \vartheta \psi\}}{[(3+\eta)\operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} \sigma - (1-\eta)\sigma](1-\eta)} + \right. \\ \left. \frac{\{[(1-\eta)\sigma \operatorname{ch} \sigma + 2\operatorname{sh} \sigma] \operatorname{sh} \vartheta \varphi - (1-\eta) \vartheta \varphi \operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} \vartheta \varphi\} \cdot \{[(1-\eta)\sigma \operatorname{ch} \sigma + 2\operatorname{sh} \sigma] \operatorname{sh} \vartheta \psi - (1-\eta) \vartheta \psi \operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} \vartheta \psi\}}{[(3+\eta)\operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} \sigma + (1-\eta)\sigma](1-\eta)} \right) \quad 12.23$$

et le coefficient $(K_a)_\eta$ pour α et η quelconques est

$$(K_a)_\eta = (K_1)_\eta + [(K_1)_\eta - (K_0)_0] \sqrt{\alpha} , \quad 12.24$$

où les significations des différents facteurs sont les mêmes que dans la formule 12.22.

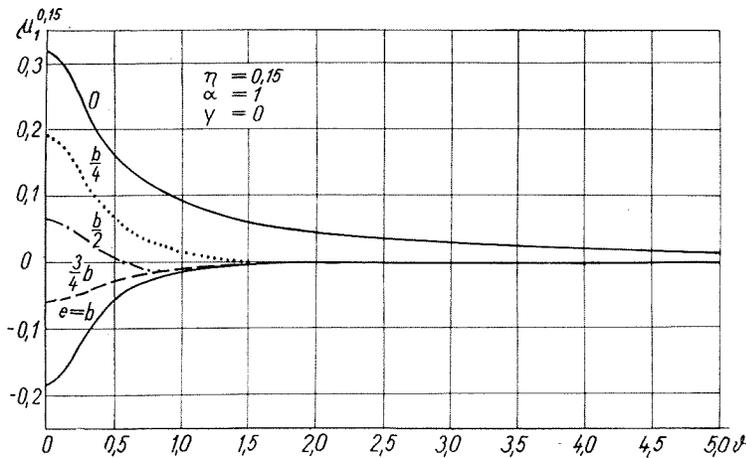


Figure 12-8

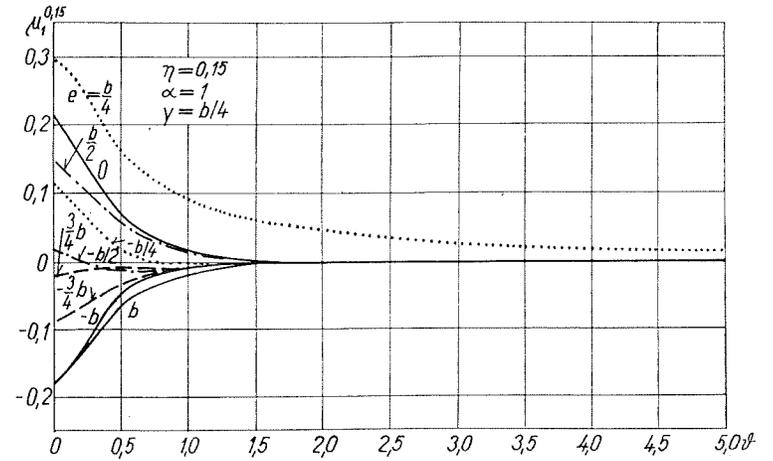


Figure 12-9

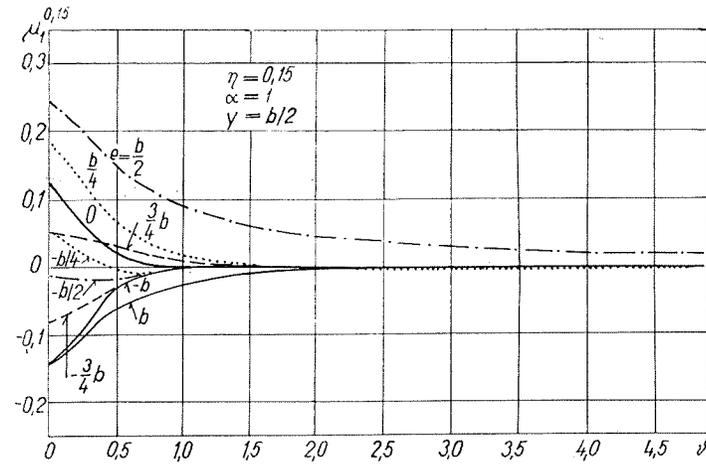


Figure 12-10

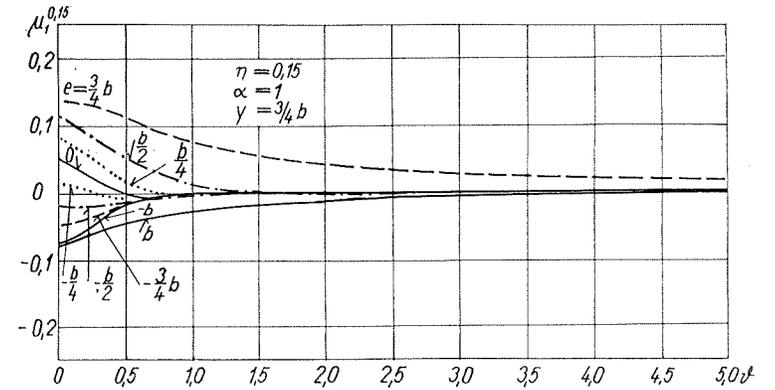


Figure 12-11

Les valeurs du coefficient $(K_1)_{0,15}$ pour $\vartheta = 0,1$ à $5,0$ variant de $0,1$ en $0,1$ entre $0,1$ et $1,0$ et de $0,2$ en $0,2$ pour $\vartheta > 1$, aux points $y = 0, \frac{b}{4}, \frac{b}{2}, \frac{3}{4}b, b$, pour l'excentricité de la charge $e = -b, -\frac{3}{4}b, -\frac{b}{2}, -\frac{b}{4}, 0, \frac{b}{4}, \frac{b}{2}, \frac{3}{4}b, b$ et le coefficient de Poisson $\eta = 0,15$, sont consignées dans les tableaux VII/1 à 30. La formule d'interpolation 12.24 prend, dans ce cas, la forme

$$(K_a)_{0,15} = (K_1)_{0,15} + [(K_1)_{0,15} - (K_0)_0] \sqrt{\alpha}. \quad 12.24a$$

Pour les constructions métalliques où le coefficient de Poisson est compris entre $0,25$ et $0,30$, on peut obtenir des résultats plus exacts par réduction des valeurs des quantités statiques qui ont été trouvées pour $\eta = 0$ ou $\eta = 0,15$.

Si nous connaissons la grandeur d'une force intérieure pour deux valeurs η_1 et η_2 , nous pourrons, d'une manière approchée (sans tenir compte des modifications des équations exprimant les conditions aux limites), fixer sa grandeur pour une autre valeur du coefficient de Poisson η . Pour chaque force intérieure on a trois équations, par exemple

$$\begin{aligned} M_x &= -q_P \left(\frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} + \eta \frac{\partial^2 w}{\partial^2 y} \right), \\ (M_x)_1 &= -q_P \left(\frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} + \eta_1 \frac{\partial^2 w}{\partial^2 y} \right), \\ (M_x)_2 &= -q_P \left(\frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} + \eta_2 \frac{\partial^2 w}{\partial^2 y} \right), \end{aligned}$$

par leur combinaison, on a

$$M_x = \frac{(\eta_2 - \eta)(M_x)_1 - (\eta_1 - \eta)(M_x)_2}{\eta_2 - \eta_1} \quad 12.25$$

et, de même,

$$M_y = \frac{(\eta_2 - \eta)(M_y)_1 - (\eta_1 - \eta)(M_y)_2}{\eta_2 - \eta_1} \quad 12.26$$

$$\bar{Q}_x = \frac{(\eta_2 - \eta)(\bar{Q}_x)_1 - (\eta_1 - \eta)(\bar{Q}_x)_2}{\eta_2 - \eta_1}, \quad 12.27$$

$$\bar{Q}_y = \frac{(\eta_2 - \eta)(\bar{Q}_y)_1 - (\eta_1 - \eta)(\bar{Q}_y)_2}{\eta_2 - \eta_1}. \quad 12.28$$

Si nous connaissons la flèche w_1 de la dalle correspondant au coefficient η_1 , la flèche w dans la dalle de coefficient η sera

$$w = \frac{1 - \eta^2}{1 - \eta_1^2} w_1; \quad 12.29$$

de façon analogue

$$M_{xy} = \frac{1 - \eta}{1 - \eta_1} (M_{xy})_1. \quad 12.30$$

Les efforts tranchants ne dépendant pas de η , on a donc

$$Q_x = (Q_x)_1, \quad Q_y = (Q_y)_1. \quad 12.31$$

Si nous connaissons, en certain point, les moments fléchissants $(M_x)_1$ et $(M_y)_1$ dans les deux sens pour η_1 , il paraît plus simple de calculer les moments pour la valeur η à partir des équations

$$M_x = \frac{1}{1 - \eta_1^2} [(1 - \eta_1 \eta) (M_x)_1 + (\eta - \eta_1) (M_y)_1], \quad 12.32$$

$$M_y = \frac{1}{1 - \eta_1^2} [(\eta - \eta_1) (M_x)_1 + (1 - \eta_1 \eta) (M_y)_1]. \quad 12.33$$

Si $\eta_1 = 0$, les équations ci-dessus prennent la forme

$$M_x = (M_x)_1 + \eta (M_y)_1, \quad 12.32a$$

$$M_y = \eta (M_x)_1 + (M_y)_1 \quad 12.33a$$

Au contraire, si nous connaissons les valeurs des moments fléchissants pour un certain $\eta_1 \neq 0$ et que nous voulons déterminer les moments correspondant à $\eta = 0$, on a

$$M_x = \frac{(M_x)_1 - \eta_1 (M_y)_1}{1 - \eta_1^2}, \quad 12.32b$$

$$M_y = \frac{(M_y)_1 - \eta_1 (M_x)_1}{1 - \eta_1^2}. \quad 12.33b$$

De façon analogue, pour les réactions sur les bords simplement appuyés, on trouve successivement

$$\bar{Q}_x = \frac{1}{1 - \eta_1} [(1 - \eta) (\bar{Q}_x)_1 + (\eta - \eta_1) Q_x], \quad 12.34$$

$$\bar{Q}_y = \frac{1}{1 - \eta_1} [(1 - \eta) (\bar{Q}_y)_1 + (\eta - \eta_1) Q_y], \quad 12.35$$

et, si $\eta_1 = 0$,

$$\bar{Q}_y = (\bar{Q}_y)_1 - \eta [(\bar{Q}_y)_1 - Q_y] \quad 12.34a$$

$$\bar{Q}_x = (\bar{Q}_x)_1 - \eta [(\bar{Q}_x)_1 - Q_x], \quad 12.35a$$

Par contre, pour $\eta = 0$,

$$\bar{Q}_x = \frac{(\bar{Q}_x)_1 - \eta_1 Q_x}{1 - \eta_1}, \quad 12.34b$$

$$\bar{Q}_y = \frac{(\bar{Q}_y)_1 - \eta_1 Q_y}{1 - \eta_1}. \quad 12.35b$$

Les réactions sur les bords encastrés étant égales aux efforts tranchants, elles ne dépendent pas de η , comme c'est aussi le cas des moments fléchissants.

Exemple 10

Soit à déterminer, pour la construction de l'exemple 4, les moments fléchissants transversaux en adoptant le coefficient de Poisson $\eta = 0,15$. On comparera ces derniers avec les valeurs calculées antérieurement pour $\eta = 0$.

Des diagrammes figures 12-8 et 12-9, nous tirons les valeurs des coefficients $(\mu_1)_{0,15}$; les valeurs de $(\mu_0)_0$ sont, d'après l'exemple 4:

$e = b/4$	$y = 0$	$y = b/4$
$(\mu_1)_{0,15}$	0,0367	0,1215
$(\mu_0)_0$	0,0639	0,1619

A l'aide de la formule d'interpolation 12.26a, nous trouvons, pour $\alpha = 0,49$:

	$y = 0$	$y = b/4$
$[(\mu_1)_{0,15} - (\mu_0)_0]$	-0,0272	-0,0404
$\sqrt{\alpha}[(\mu_1)_{0,15} - (\mu_0)_0]$	-0,0133	-0,0198
$\mu_a = (\mu_1)_{0,15} + \sqrt{\alpha}[(\mu_1)_{0,15} - (\mu_0)_0]$	0,0234	0,1027

Les moments fléchissants transversaux calculés pour $\eta = 0,15$ dans la section $x = \frac{l}{2}$, $x = \frac{l}{4}$ sont consignés au tableau ci-dessous et comparés avec les moments obtenus pour $\eta = 0$ dans l'exemple 4.

	x	η	$y = 0$	$y = b/4$
M_y (tm/m')	$l/2$	0	0,132	0,480
		0,15	0,094	0,411
	$l/4$	0	0,093	0,339
		0,15	0,066	0,290

12.5 Valeurs statiques dans une direction quelconque

Pour le dimensionnement, il suffit, dans les cas ordinaires, de déterminer les valeurs statiques (moments fléchissants et de torsion et les efforts tranchants) dans les directions parallèles aux axes X et Y . Si l'on veut déterminer aussi les valeurs statiques dans les autres directions, il est possible de se servir de formules de transformation ressemblant à celles dont on fait usage en transformant par exemple les coordonnées cartésiennes en coordonnées polaires.

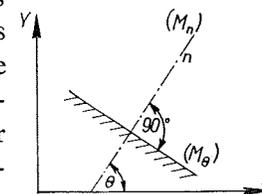


Figure 12-12

En menant perpendiculairement à la surface de la dalle une coupe quelconque dont la normale n forme avec l'axe X un angle θ (figure 12-12), on obtient le moment fléchissant dans le sens de cette normale

$$M_n = M_x \cos^2 \theta + M_y \sin^2 \theta - M_{xy} \sin 2\theta, \quad 12.36$$

le moment fléchissant dans le sens de la normale m à une coupe tournée de 90°

$$M_m = M_x \sin^2 \theta + M_y \cos^2 \theta + M_{xy} \sin 2\theta, \quad 12.37$$

les moments de torsion (qui sont égaux au signe près)

$$M_{nm} = -\frac{1}{2} (M_x - M_y) \sin 2\theta + M_{xy} \cos 2\theta = -M_{mn} \quad 12.38$$

et efforts tranchants

$$\begin{aligned} Q_n &= Q_y \sin \theta + Q_x \cos \theta, \\ Q_m &= -Q_y \cos \theta + Q_x \sin \theta. \end{aligned} \quad 12.39$$

Les valeurs extrêmes M_n ou M_m et M_{nm} ou M_{mn} sont les moments dits principaux. La direction dans laquelle les moments fléchissants atteignent leurs valeurs extrêmes est donnée par la relation

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2M_{xy}}{(M_x - M_y)} \quad 12.40$$

et celle dans laquelle les moments de torsion atteignent leurs valeurs extrêmes, par la relation

$$\operatorname{tg} 2\theta = -\frac{(M_x - M_y)}{2M_{xy}}. \quad 12.41$$

Les valeurs extrêmes résultent des relations: pour les moments fléchissants

$$(M_n)_{\max, \min} = \frac{1}{2} (M_x + M_y) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(M_x - M_y)^2 + 4M_{xy}^2}, \quad 12.42$$

pour les moments de torsion

$$(M_{nm})_{\max, \min} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(M_x - M_y)^2 + 4M_{xy}^2}. \quad 12.43$$

Les moments fléchissants atteignent leurs valeurs maxima (minima) dans la direction qui forme avec l'axe X un angle aigu (obtus) si $M_{yx} > 0$ (< 0). Les directions des moments fléchissants maxima et minima forment avec celles de moments maxima et minima de torsion un angle de 45° . Dans les sections où les moments fléchissants atteignent leurs valeurs maxima, les moments de torsion sont nuls. De la somme des équations 12.36 et 12.37, il résulte de plus que

$$M_x + M_y = M_n + M_m. \quad 12.44$$

Exemple 11

Soit à déterminer les valeurs et les directions des moments principaux en un point de la construction où les moments fléchissants et de torsion dans les directions des axes X et Y sont connus: $M_x = 12,5$ tm, $M_y = 3,2$ tm et $M_{xy} = -1,52$ tm.

Directions des moments principaux:

moments fléchissants longitudinaux (formule 12.40)

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\theta &= \frac{(-3,04)}{9,3} = -0,325 \\ 2\theta &= 162^\circ \\ \theta_1 &= 81^\circ, \theta_2 = 171^\circ, \end{aligned}$$

moments de torsion (formule 12.41)

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\theta &= -\frac{1}{-0,325} = 3,08 \\ 2\theta &= 72^\circ \\ \theta_1 &= 36^\circ, \theta_2 = 126^\circ. \end{aligned}$$

Valeurs des moments principaux:

moments fléchissants (formule 12.42)

$$(M_n)_{\max, \min} = \frac{1}{2} 15,8 \pm \sqrt{9,3^2 + 4 \cdot 1,52^2} = 7,9 \pm 4,88 = \begin{cases} +12,78 \text{ tm/m}' \\ +3,02 \text{ tm/m}' \end{cases}$$

moments de torsion (formule 12.43)

$$(M_{nm})_{\max, \min} = \pm 4,88 \text{ tm/m}'.$$

12.6 Influence de l'excentricité des poutres et entretoises par rapport au feuillet moyen de la dalle isotrope

La théorie établie précédemment n'est valable que dans le cas où les poutres et entretoises sont disposées symétriquement par rapport au plan médian de la dalle. Dans la pratique, les poutres et entretoises n'existent, généralement, que d'un côté du plan médian. Une solution rigoureuse s'obtient en posant, selon la forme réelle de la construction, des équations différentielles pour les déplacements u , v , w dans les sens de trois axes coordonnés, comme il est indiqué au chapitre 21. En éliminant les déplacements u et v , on peut transformer ce système en une équation aux dérivées partielles du huitième ordre pour w [2]. L'équation aux dérivées partielles de Huber dont nous partions jusqu'ici, est du quatrième ordre; il s'ensuit qu'il n'existe aucune dalle orthotrope dans l'acception de Huber exactement équivalente à une dalle à nervures asymétriques. Cependant, il est possible de trouver une dalle de Huber équivalente approximativement à une dalle à nervures asymétriques si l'on remplace les rigidités de flexion et de torsion résultant de la théorie de l'élasticité par certaines rigidités fictives.

De l'analyse effectuée par Bareš [2] de la solution rigoureuse d'une dalle à entretoises asymétriques, résulte une conclusion importante: la valeur du cisaillement dans la dalle varie de point en point. Elle dépend surtout du type de chargement et du mode d'appui de la dalle nervurée. Il s'ensuit qu'il n'existe aucune formule générale qui peut donner la rigidité fictive de torsion de la dalle de Huber approximativement équivalente à une dalle nervurée réelle; on ne peut déduire que des formules dont chacune n'est valable que pour un certain cas spécial.

Massonnet a montré dans un de ses mémoires [89] comment on détermine approximativement l'influence de l'asymétrie des poutres et entretoises à l'aide de la méthode du minimum du travail de déformation d'une dalle nervurée. Après une série d'opérations différentielles et ayant remplacé les déplacements horizontaux par les expressions $u = a_P \frac{\partial w}{\partial x}$ et $v = a_E \frac{\partial w}{\partial y}$, il a obtenu l'équation de Huber de la dalle (5.7a) sous la forme

$$q_P^f \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H^f \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + q_E^f \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y). \quad 12.45$$

q_P^f , q_E^f , H^f sont ici les rigidités fictives de flexion et de torsion.

Leurs valeurs sont

$$\begin{aligned} q_P^f &= q_P + (e_P - a_P)^2 E f_P, \\ q_E^f &= q_E + (e_E - a_E)^2 E f_E, \end{aligned}$$

$$H^f = \varrho + \frac{\bar{\gamma}_P + \bar{\gamma}_E}{2} + \frac{Ed}{4(1-\eta)} (a_P + a_E)^2 + \eta \frac{Ed}{1-\eta^2} a_P a_E =$$

$$= \frac{\gamma_P + \gamma_E}{2} + \frac{Ed}{4(1-\eta)} (a_P + a_E)^2 + \eta \frac{Ed}{1-\eta^2} a_P a_E, \quad 12.45a$$

où $\varrho_P, \varrho_E, \gamma_P, \gamma_E$ sont les rigidités unitaires des la dalle nervurée données par les relations 5.9 et 5.10,

$\bar{\gamma}_P, \bar{\gamma}_E$ sont les rigidités de torsion des poutres et entretoises (sans dalle),

ϱ est la rigidité unitaire de la dalle $\frac{Ed^3}{12(1-\eta^2)}$,

e_P, e_E est la distance entre les axes neutres de renforcements (de la section entière) et le plan moyen de la dalle isotrope,

f_P, f_E est la surface de la section longitudinale ou, éventuellement, transversale de la dalle nervurée par rapport à l'unité de largeur ou longueur (surface de la nervure + $\frac{\text{surface de la dalle}}{1-\eta^2}$),

a_P, a_E sont des constantes qui se déterminent à condition que les bords de la dalle soient rigides (c'est-à-dire que

$$\iint \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx dy = \iint \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy, \text{ par les équations}$$

$$a_P \iint \left[E f_P \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{Ed}{(1+\eta)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy +$$

$$+ \frac{Ed}{2(1-\eta)} a_E \iint \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy = e_P f_P E \iint \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx dy,$$

$$\frac{Ed}{2(1-\eta)} a_P \iint \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + a_E \iint \left[E f_E \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \quad 12.46$$

$$\left. + \frac{Ed}{2(1+\eta)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy = e_E f_E E \iint \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 dx dy.$$

Les coefficients de ce système de deux équations linéaires (par rapport aux inconnues a_P et a_E) dépendent de la ligne élastique de la surface $w = w(x, y)$ de la dalle. Les valeurs a_P et a_E obtenues par solution du système varient donc considérablement de cas en cas. Il y a lieu de souligner à nouveau qu'il n'existe pas d'expressions générales pour les rigidités $\varrho_P^f, \varrho_E^f, H^f$ de la dalle de Huber approximativement équivalente à une dalle réelle; on ne connaît que des expressions valables pour certains modes de sollicitation.

Si, par exemple, une dalle nervurée est sollicitée par flexion pure ($M_x = \text{const}, M_y = 0$), elle prend une déformée à deux courbures (constan-

tes) opposées et, par là, $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \text{const}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \text{const}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0$. Après remplacement dans l'équation 12.46, il vient $a_P = e_P, a_E = e_E$ et

$$\varrho_P^f = \varrho_P, \quad \varrho_E^f = \varrho_E$$

$$H^f = \varrho + \frac{\bar{\gamma}_P + \bar{\gamma}_E}{2} + \frac{Ed}{4(1+\eta)} (e_P + e_E)^2 + \frac{\eta Ed}{1-\eta^2} e_P e_E. \quad 12.47$$

Si la dalle est sollicitée par torsion pure ($M_x = M_y = 0, M_{xy} \neq 0$) elle prend la déformée d'un paraboløide hyperbolique et on a

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \neq 0, \quad a_P = a_E = 0 \quad \text{d'où}$$

$$\varrho_P^f = \varrho_P + e_P^2 f_P E > \varrho_P, \quad \varrho_E^f = \varrho_E + e_E^2 f_E E > \varrho_E, \quad 12.48$$

$$H^f = H = \varrho + \frac{\bar{\gamma}_P + \bar{\gamma}_E}{2} \quad .1)$$

La valeur des rigidités de flexion selon les relations 12.47 et de celles de torsion d'après 12.48 sont les valeurs minima. En général, dans la dalle à nervures asymétriques, les rigidités réelles varient de point en point et sont toujours supérieures aux valeurs minima données par les relations 12.47 et 12.48.

Recherchons maintenant les valeurs approximatives des constantes a_P, a_E dans un grillage type pont-dalle. Considérons un pont infiniment large soumis à une charge sinusoïdale linéaire dans l'axe X et supposons qu'on puisse faire usage des valeurs obtenues, même pour un pont de largeur finie. L'équation 12.45 est, pour le problème examiné, l'équation de la dalle de Huber équivalente en moyenne à une dalle nervurée réelle. Selon les équations 6.21 et 6.24, la surface de flexion d'une dalle de Huber infiniment large devient, après modification,

$$w(x, y) = \bar{C}_m e^{-mny} \sin \frac{m\pi x}{l} \left[\cos mty + \frac{n}{t} \sin mty \right], \quad (y \geq 0) \quad 12.49$$

à condition que

$$n = \omega \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}, \quad t = \omega \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}},$$

$$\omega = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{\varrho_P^f}{\varrho_E^f}}, \quad \alpha = \frac{H^f}{\sqrt{\varrho_P^f \cdot \varrho_E^f}}, \quad 12.50$$

$$\bar{C}_m = \frac{p}{m^3 \omega^3 \varrho_E^f 2 \sqrt{2(1+\alpha)}}.$$

1) Si nous employons la notation déjà introduite, H_f sera $\frac{\gamma_P + \gamma_E}{2}$; quant à la rigidité de torsion, il faut substituer seulement la moitié de la valeur résultant de la théorie de l'élasticité (voir paragraphe 20.2).

Pour simplifier, posons encore

$$e^{-mny} \cos mty = f_1(y), \quad e^{-mny} \sin mty = f_2(y), \quad 12.51$$

de sorte que

$$w(x, y) = \bar{C}_m \sin \frac{m\pi x}{l} \left(f_1 + \frac{n}{t} f_2 \right). \quad 12.49a$$

Pour $y = 0$, on a $f_1(0) = 1$, $f_2(0) = 0$; en dérivant successivement les fonctions $f(y)$, il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial y} &= -mf_1(y) - tf_2(y), & \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} &= m^2(n^2 - t^2)f_1(y) + 2m^2ntf_2(y), \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} &= -mf_2(y) + tf_1(y), & \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} &= m^2(n^2 - t^2)f_2(y) - 2m^2ntf_1(y). \end{aligned}$$

Les valeurs des intégrales dont on a besoin pour remplacer dans l'équation 12.46, sont

$$\begin{aligned} \iint \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx dy &= 2 \int_0^l dx \int_0^\infty \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dy = \\ &= \frac{m^4 \pi^4}{l^4} \frac{n^2 + 5t^2}{n^2 + t^2} = m^4 \omega^4 \frac{\varrho_E^f}{\varrho_P^f} (3 - 2\alpha), \\ \iint \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 dx dy &= m^4 (n^2 + t^2)^2 = \omega^4 m^4, \\ \iint \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy &= \frac{m^4 \pi^2}{l^2} (n^2 + t^2) = m^4 \omega^4 \sqrt{\frac{\varrho_E^f}{\varrho_P^f}}. \end{aligned}$$

D'habitude, il suffit de tenir compte seulement du premier terme de la série. Après remplacement et modification, on obtient, pour $m = 1$,

$$\begin{aligned} a_P \left[(3 - 2\alpha) + \frac{d}{2(1 + \eta) f_P} \sqrt{\frac{\varrho_P^f}{\varrho_E^f}} \right] + \\ + \frac{d}{2(1 - \eta) f_P} a_E \sqrt{\frac{\varrho_P^f}{\varrho_E^f}} = e_P (3 - 2\alpha), \quad 12.52 \\ a_E \left[1 + \frac{d}{2(1 + \eta) f_E} \sqrt{\frac{\varrho_E^f}{\varrho_P^f}} \right] + \\ + \frac{d}{2(1 - \eta) f_E} a_P \sqrt{\frac{\varrho_E^f}{\varrho_P^f}} = e_E. \end{aligned}$$

Nous pouvons résoudre ce système de deux équations par rapport à a_P et a_E par approximations successives. Pour obtenir les valeurs approchées de a_P et a_E , on calculera par les formules 12.45a les valeurs approchées de ϱ_P^f , ϱ_E^f , H^f et on remplacera dans les équations 12.52; leur solution fournira

des valeurs plus précises de a_P et a_E . On peut répéter le tout autant de fois que l'on veut. Ordinairement, une ou deux approximations sont suffisantes pour obtenir des résultats de précision satisfaisante. A partir des valeurs ainsi trouvées de ϱ_P^f , ϱ_E^f , H^f on détermine, de façon analogue aux formules 5.31 et 5.27, le paramètre d'entretoisement

$$\vartheta = \frac{b}{l} \sqrt[4]{\frac{\varrho_P^f}{\varrho_E^f}}$$

et le paramètre de torsion

$$\alpha = \frac{H^f}{\sqrt{\varrho_P^f \cdot \varrho_E^f}}.$$

Pour les valeurs des paramètres ainsi calculées, on peut, de la façon ordinaire, trouver dans les tableaux les coefficients correspondants des flèches, moments ou efforts tranchants.

L'asymétrie des nervures ne se manifestera pas seulement dans la valeur des rigidités fictives de la dalle mais aussi dans la répartition des tensions dans cette dalle. Des conditions d'équilibre, on déduit les expressions exactes des forces intérieures suivantes:

$$\begin{aligned} N_x &= Ef_P(a_P - e_P) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \eta \frac{Ed}{1 - \eta^2} a_E \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ N_y &= Ef_E(a_E - e_E) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \eta \frac{Ed}{1 - \eta^2} a_P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ Q_{xy} &= \frac{Ed}{2(1 + \eta)} (a_P + a_E) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \\ M_x &= -[Q_P + (e_P^2 - e_P a_P) Ef_P] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \eta Q \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad 12.53 \\ M_y &= -[Q_E + (e_E^2 - e_E a_E) Ef_E] \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \eta Q \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ M_{xy} &= [(1 - \eta) Q + \bar{\gamma}_P] \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \\ M_{yx} &= -[(1 - \eta) Q + \bar{\gamma}_E] \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \\ Q_x &= -[Q_P + (e_P^2 - e_P a_P) Ef_P] \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - [Q + \bar{\gamma}_E] \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}, \\ Q_y &= -[Q_E + (e_E^2 - e_E a_E) Ef_E] \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - [Q + \bar{\gamma}_P] \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}. \end{aligned}$$

Les valeurs précises des forces intérieures s'obtiennent par réduction des

valeurs qu'on avait trouvées aux tableaux par le rapport des coefficients des différentes dérivées de w . En supposant, par exemple, $\eta = 0$, nous déterminerons à l'aide des tableaux II le moment fléchissant dans le sens transversal M_y . La valeur exacte s'obtiendra en réduisant ce moment par le rapport $\frac{[Q_E + (e_E^2 - e_{EA}E) E f_E]}{Q_E}$.

13. Influence des hypothèses sur l'exactitude et importance des erreurs

Pour apprécier l'exactitude de la méthode de calcul exposée dans ce livre, il faut d'abord se rendre compte de la grandeur de l'erreur commise en remplaçant le nombre fini de poutres par un renforcement longitudinal réparti continûment (sur la largeur de la construction) et le nombre fini d'entretoises par un renforcement transversal réparti continûment (sur la longueur de la construction).

Pour la rigidité unitaire de poutres réparties continûment, nous nous sommes servis de l'expression $Q_P = \frac{EI_P}{b_0}$. Le nombre de poutres réelles étant n , la largeur totale de la construction est donc (figure 13-1)

$$2b = nb_0; \quad 13.1$$

cela veut dire qu'elle est supérieure à la largeur réelle donnée par la distance entre les poutres de rive. Nous l'appellerons largeur active.

Si nous comparons (tout d'abord sans tenir compte de la torsion la déformation de l'entretoise d'une construction calculée d'après Leonhardt et dont le nombre de poutres est variable (c'est-à-dire la déformation de la poutre sur un nombre variable d'appuis élastiques) avec la déformation de l'entretoise d'une construction calculée d'après Guyon et dont la rigidité des poutres est répartie continûment sur la largeur nb_0 (déformation de

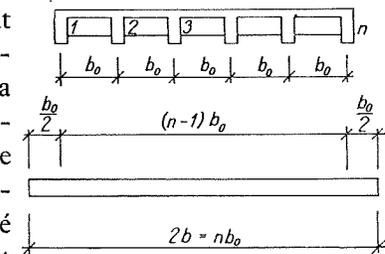


Figure 13-1