

Remarque. Il est généralement admis que la région de discontinuité s'étend jusqu'à une distance h (hauteur transversale de la section de l'élément de structure) à partir de la discontinuité, selon le principe de Saint-Venant (Fig. 1).

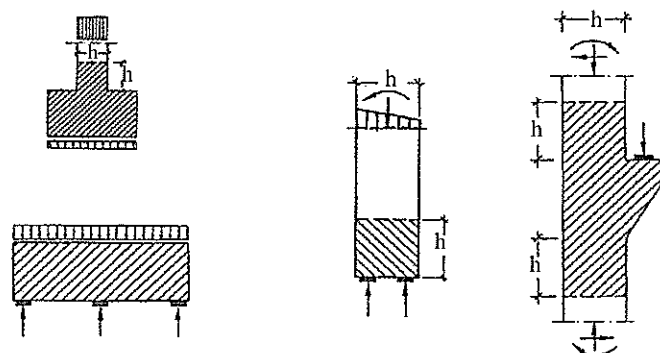


Figure 1. Exemples de régions de discontinuité (hachurées) présentant une distribution non linéaire des contraintes due aux discontinuités géométriques et (ou) de chargement [10]

1.1.1. Identification des modèles

Les modèles bielles et tirants (B-T) sont constitués [clause 6.5.4 (3)] :

- de *bielles* représentant les champs de contraintes de compression ;
- de *tirants* représentant les armatures ;
- de *nœuds* de connexion .

Les efforts dans les éléments du modèle B-T doivent être déterminés pour assurer l'équilibre avec les charges appliquées à l'ELU.

Les éléments des modèles B-T seront dimensionnés en accord avec les règles de justification données au chapitre 6.5 de l'EC2 (cf. § 2).

La définition de modèles B-T appropriés [clause 5.6.4 (5)] peut s'appuyer sur les *trajectoires* et les *distributions des contraintes* données par la théorie élastique linéaire (Fig. 2a) ou par la *méthode du cheminement* (ou des *lignes*) des charges (Fig. 3).

Les directions des bielles et des tirants sont confondues avec celles des résultantes des efforts de compression et de traction (Fig. 2a). Lors d'essais, l'évolution de la fissuration, suivant le tracé des isostatiques de compression (Fig. 2b), justifie la prise en compte du comportement élastique linéaire pour définir le modèle.

Les nœuds, situés à l'intersection des bielles et des tirants, constituent les éléments originaux de cette méthode (Fig. 2a). Les nœuds peuvent être *diffus* lorsqu'ils occupent une région importante (intersection des bielles), ou *concentrés* s'ils sont localisés (intersection des bielles et du tirant aux appuis).

Les tirants du modèle B-T doivent coïncider en position et direction avec les armatures correspondantes [clause 5.6.4 (4)].

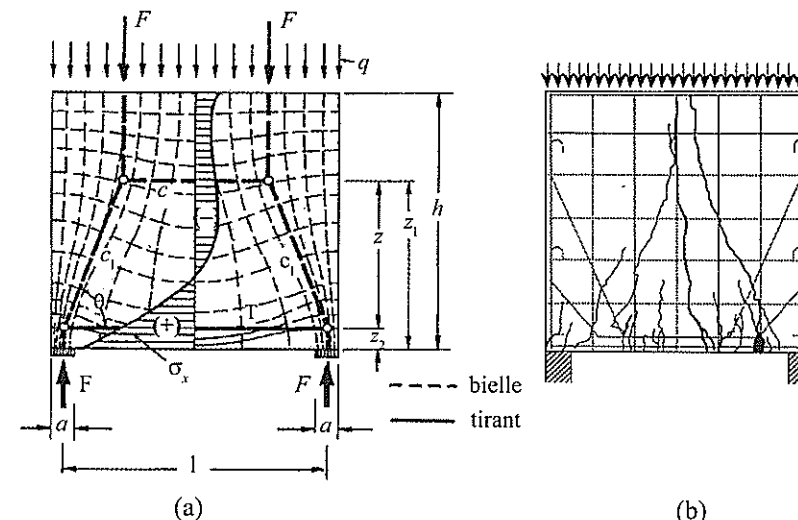


Figure 2. Poutre-voile soumise à un chargement uniforme par le haut :
a) trajectoires et distribution des contraintes ; modèle B-T simple correspondant [10] ;
b) fissuration en phase ultime (parallèle aux isostatiques de compression) [11].

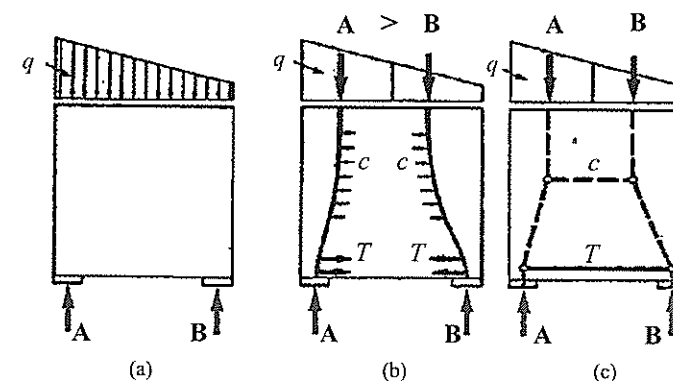


Figure 3. a) Chargement non symétrique ; b) lignes de charge à travers la poutre-voile ;
c) modèle B-T simple correspondant [10].

Les lignes de charge relient les résultantes du chargement aux réactions d'appui qui assurent leur équilibre (Fig. 3b). Les efforts de réaction développés au droit des courbures des lignes de charge imposent la présence d'une bielle comprimée et d'un tirant dans le modèle correspondant (Fig. 3c).

Dans certains cas, les lignes de charge peuvent prendre une forme en U, commençant et aboutissant sur le même côté (Fig. 4).

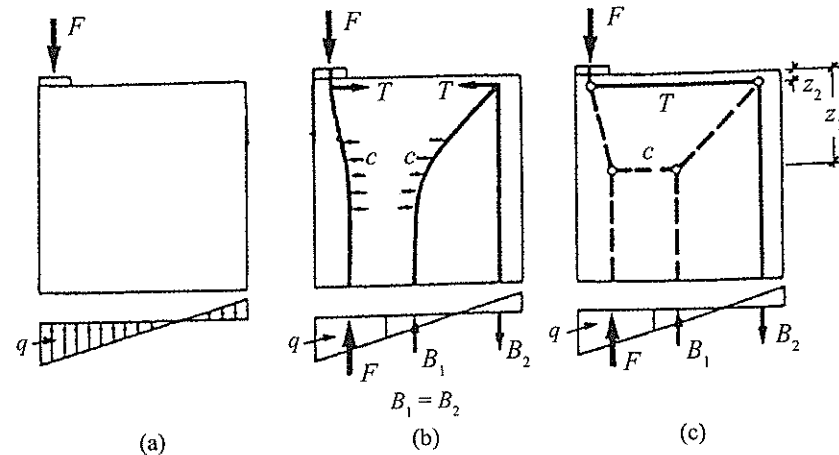


Figure 4. a) Chargement excentré ; b) lignes de charge en forme de U ; c) modèle B-T correspondant [10].

Remarque. La modélisation dépend du cas de charge à équilibrer. Il convient donc de modéliser pour chaque chargement donné (Fig. 2, 3 et 4).

1.1.2. Optimisation des modèles

Tous les modèles B-T peuvent être optimisés par un critère énergétique [clause 6.5.4 (5)], du type :

$$\sum F_i l_i \varepsilon_{mi} = \text{minimum}$$

où :

F_i est la force dans la bielle ou le tirant ;

l_i est la longueur de l'élément i ;

ε_{mi} est la déformation moyenne de l'élément i .

Les armatures étant plus déformables que les bielles de béton, le modèle dont le tracé des tirants est le plus court (de raideur plus élevée) correspond donc à la modélisation la plus pertinente. Ainsi, dans le cas de la poutre-voile précédente (Fig. 5a), le mauvais modèle (Fig. 5b) correspond au tracé des tirants le plus long. Une validation de ce principe est donnée expérimentalement lorsque les armatures sont relevées (Fig. 5c). Cette disposition conduit, en effet, à une charge de ruine plus faible que celle obtenue lorsque les armatures sont continues entre les appuis (modèle a).

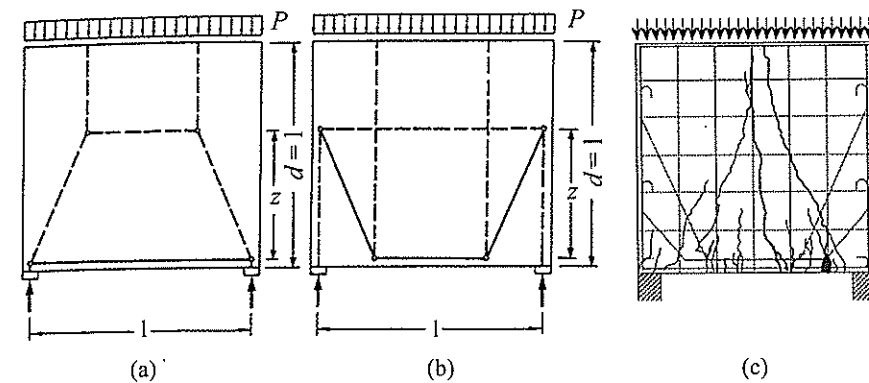


Figure 5. a) Bon modèle B-T : tracé des tirants plus court ; b) mauvais modèle B-T : tracé des tirants le plus long [10] ; c) ruine prématurée correspondant à la disposition des armatures principales relevées [11].

1.1.3. La combinaison de modèles B-T simples

a) Définition d'un modèle intermédiaire dont l'hyperstaticité interne est levée par interpolation [13] en attribuant des charges, F_1 et $F_2 = F_w$, pour chacun des modèles (1) et (2), dans le rapport des élancements a/z (Fig. 6).

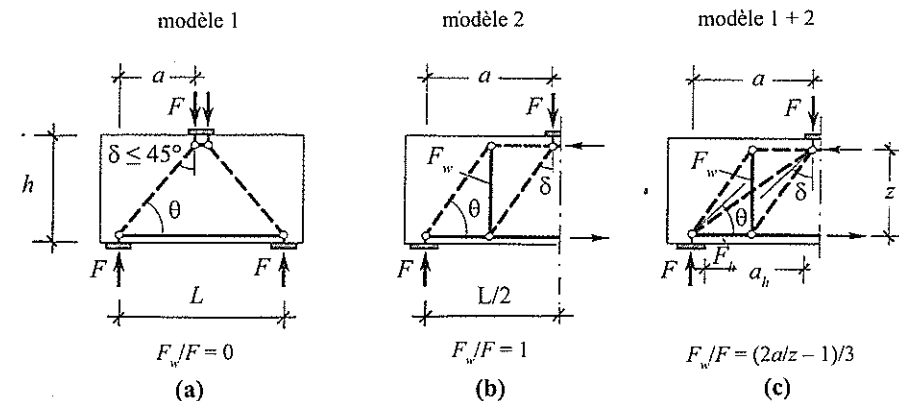


Figure 6. Combinaison de deux modèles B-T simples pour une poutre-voile ($h < L$) soumise à une charge concentrée [13] :
a) élancement : $a/z \leq 1/2$ (modèle B-T) ;
b) élancement : $a/z \geq 2$ (modèle flexion) ;
c) élancement : $1/2 < a/z < 2$ (modèle intermédiaire).

b) Définition d'un modèle combiné B-T (1 + 2) dont l'hyperstaticité interne est levée en attribuant des charges, F_1 et F_2 , pour chacun des modèles, (1) et (2), dé-

terminées dans le rapport des raideurs attendues (Fig. 7). La comparaison de la longueur des tracés des tirants montre que le modèle (1) est moins rigide que le modèle (2). En conséquence :

$$F_1 = k_1 F \text{ et } F_2 = k_2 F$$

avec $0,3 < k_1 < 0,5$ et $k_2 = (1 - k_1) > 0,5$.

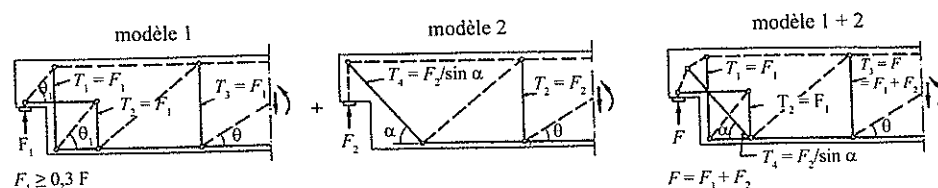


Figure 7. Combinaison de deux modèles B-T simples pour l'about d'une poutre de hauteur réduite (préférable à un modèle compliqué) [10].

N.B. Il est souvent préférable de limiter la sophistication en ne combinant que deux modèles B-T simples.

1.2. Vérifications à l'état limite de service (ELS)

Les vérifications à l'ELS peuvent être aussi effectuées à partir des modèles B-T (ex : vérification des contraintes des aciers et contrôle de la largeur des fissures) si la compatibilité approchée des modèles B-T est assurée, en particulier la position et la direction des bielles importantes doivent être orientées en accord avec la théorie de l'élasticité linéaire [clause 5.6.4 (2)].

2. JUSTIFICATION DES TIRANTS, BIELLES ET NŒUDS

2.1. Généralités [clause 6.5.1]

Dans les zones où il existe une distribution non linéaire des déformations relatives (appuis, voisinage de charges concentrées...) les modèles bielles et tirants peuvent être utilisés (Fig. 1).

N.B. La modélisation complète doit prendre en compte les *efforts secondaires* d'éclatement dans les bielles de béton par un *modèle affiné* (Fig. 8).

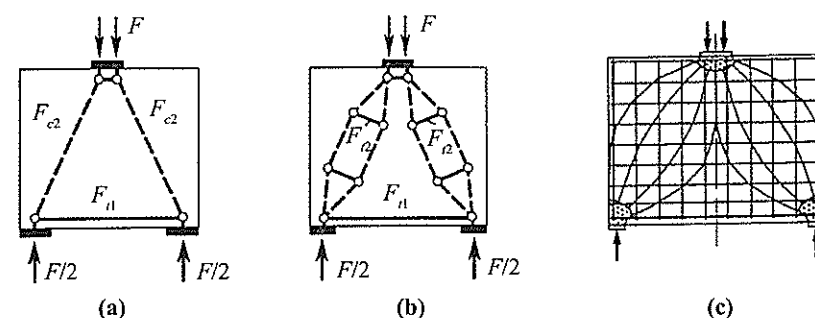


Figure 8. Poutre-voile sous charge concentrée :

- a) modèle B-T simple avec *tirant principal* primaire (F_{11}) ;
- b) modèle B-T affiné avec *tirants transversaux* secondaires (F_{12}) contrôlant le fendage transversal des bielles ;
- c) *bielles* avec les *armatures* équilibrant les efforts F_{12} des *tirants secondaires* (réseau orthogonal) et les *armatures* équilibrant l'effort F_{11} du *tirant principal* entre les appuis [9].

Il convient de justifier la résistance des éléments issus de la modélisation B-T : tirants, bielles et nœuds de connexion.

2.2. Justification des tirants en acier [clause 6.5.3]

La résistance de calcul des *tirants transversaux* et des *armatures* doit être limitée en accord avec les articles 3.2 et 3.3 de l'EC2 :

$$f_{yd} = f_{yk} / \gamma_s$$

où :

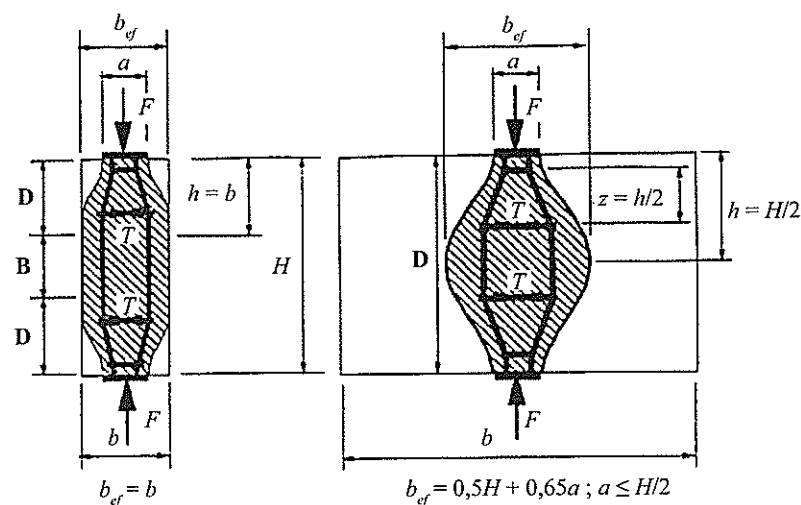
f_{yd} = résistance de calcul en traction ;

f_{yk} = contrainte élastique caractéristique ;

γ_s = coefficient partiel de sécurité de l'acier.

Remarque 1. Les armatures doivent être suffisamment ancrées dans les nœuds.

Remarque 2. Lorsque les *nœuds diffus* (aux extrémités des tirants) occupent une largeur importante de la structure (Fig. 9), les armatures situées dans l'aire du nœud doivent être distribuées sur toute l'étendue de la zone où les trajectoires de compression sont incurvées (Fig. 10 et 11).



(a) discontinuité partielle

(b) discontinuité totale

Figure 9. Forces de traction transversale T (entre les nœuds diffus) dans un champ de contraintes de compression entre efforts concentrés : [B] région de continuité ; [D] région de discontinuité [1].

N.B. La distribution des armatures transversales peut être considérée sur une zone distante de $0,4h$ de part et d'autre de l'effort de traction T à équilibrer (Fig. 10 et 11). Leur longueur ne doit pas être inférieure à $1,3 b_{ef}$ [10].

La force de traction transversale T peut être obtenue à l'aide des relations suivantes (Fig. 9a et b) :

a) Pour les régions de discontinuité partielle ($b \leq H/2$) :

$$T = \frac{1}{4} \cdot \frac{b-a}{b} \cdot F \quad [6.5.3 (3)a]$$

La distribution des contraintes de compression est constante dans la section de la bielle située dans la région continue (Fig. 10) :

$$T_a = T = \frac{F(b-a)}{2 \cdot 4} \frac{1}{Z}$$

avec $Z = 0,5h = \frac{b}{2}$, d'où $T = \frac{1}{4} \cdot \frac{b-a}{b} \cdot F$

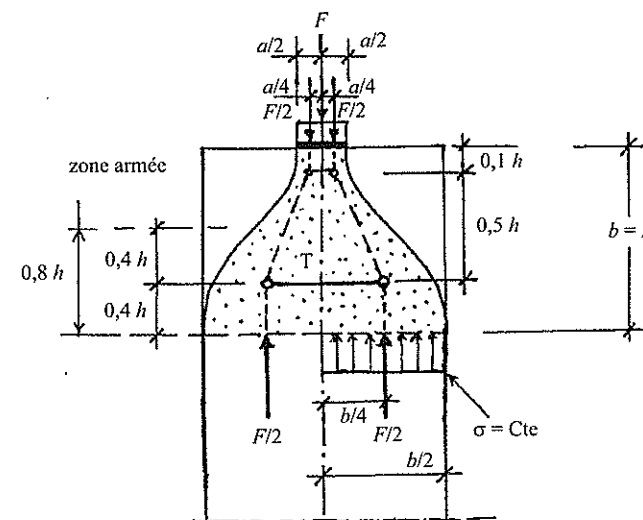


Figure 10. Distribution des contraintes de compression σ dans la section limite d'une région de discontinuité partielle soumise à un effort axial concentré F : largeur b ; position de la résultante $F/2$ et modèle B-T associé (nœuds diffus).

b) Pour les régions de discontinuité totale ($b > H/2$) :

$$T = \frac{1}{4} \left(1 - 0,7 \frac{a}{h} \right) F \quad [6.5.3. (3)b]$$

La distribution des contraintes de compression est conforme à la théorie élastique dans la section médiane (Fig. 11).

La résultante $F/2$ est plus proche de l'axe de l'effort F ($x < b_{ef}/4$) :

$$T_b = T = \frac{F}{2} \left(x - \frac{a}{4} \right) \frac{1}{Z}$$

avec $Z = 0,5h$ et $x = \frac{1}{4}(h + 0,3a) < \frac{b_{ef}}{4} = \frac{1}{4}(h + 0,65a)$

et b_{ef} = largeur efficace (Fig. 9b)

d'où $T = \frac{1}{4} \left(1 - 0,7 \frac{a}{h} \right) F$.

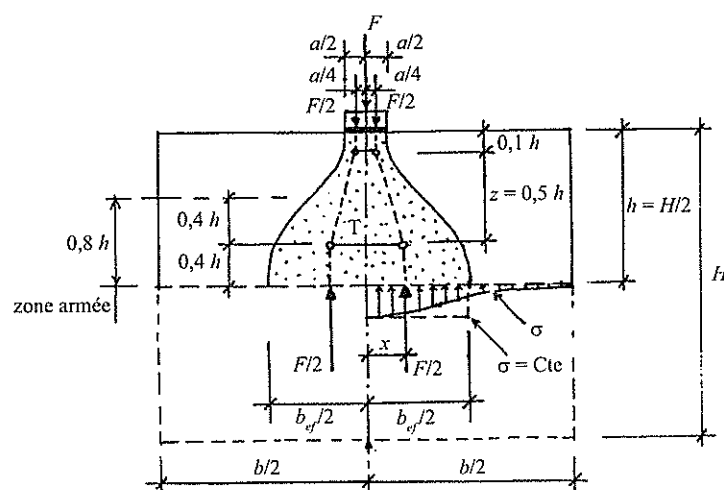


Figure 11. Distribution des contraintes de compression σ dans la section médiane d'une région de discontinuité totale ($b \times H$) soumise à un effort axial concentré F : largeur efficace b_{ef} ; position de la résultante $F/2$ et modèle B-T associé ; zone de distribution des armatures transversales (nœuds diffus) [14].

N.B. Le domaine de validité de la relation [(3)b] donné par l'EC2 : $b > H/2$ conduit, à la limite $b = \frac{H}{2} = h$ à l'inégalité des efforts de traction :

$$T_a = \frac{F}{4} \left(1 - \frac{a}{h}\right) < \frac{F}{4} \left(1 - 0,7 \frac{a}{h}\right)$$

En conséquence, la relation donnant T_b suppose $b > b_{ef}$. Lorsque $\frac{H}{2} \leq b \leq b_{ef}$, il conviendrait d'interpoler entre les valeurs de T_a et T_b .

2.3. Justification des bielles de béton [clause 6.5.2]

Les bielles de béton sont identifiables (fig. 9a) ou fictives (fig. 9b) :

2.3.1. Bielle identifiable avec ou sans compression transversale [clause 6.5.2 (1)]

La résistance de calcul d'une bielle de béton identifiable dans une région avec ou sans contrainte transversale de compression est donnée par la relation ci-dessous (Fig. 12) :

$$\sigma_{Rd, \max} = f_{cd}$$

où

f_{cd} = résistance de calcul en compression ;

$$f_{cd} = \alpha_{cc} f_{ck} / \gamma_c$$

avec :

f_{ck} = résistance caractéristique en compression ;

γ_c = coefficient partiel de sécurité du béton ;

α_{cc} = coefficient prenant en compte les effets à long terme et le mode de chargement. La valeur recommandée est $\alpha_{cc} = 1$.

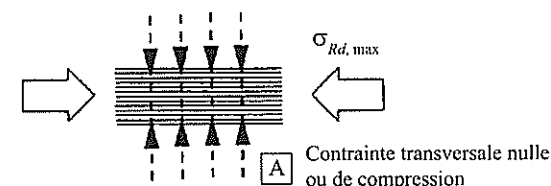


Figure 12. Résistance de calcul des bielles sans traction transversale [1].

Remarque. Il peut être admis une résistance de calcul plus élevée appropriée dans les zones de *compression multiaxiale*.

2.3.2. Bielle fictive avec traction transversale [clause 6.5.2 (2)]

La résistance de calcul d'une bielle de béton fictive doit être réduite dans les zones de compression fissurées et, à moins qu'une analyse plus rigoureuse ne soit utilisée, est donnée par la relation ci-dessous (Fig. 13) :

$$\sigma_{Rd, \max} = 0,6 v' f_{cd}$$

N.B. La valeur du coefficient v' est donnée dans l'annexe nationale [2].

La valeur recommandée est : $v' = 1 - \frac{f_{ck}}{250}$.

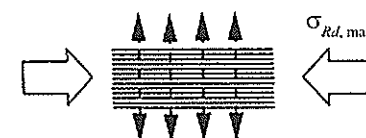


Figure 13. Bielle soumise à une traction transversale [1].

Remarque 1. Pour une région de *discontinuité totale*, la contrainte de référence est la *contrainte moyenne de compression* dans la bielle fictive σ_c (Fig. 14).

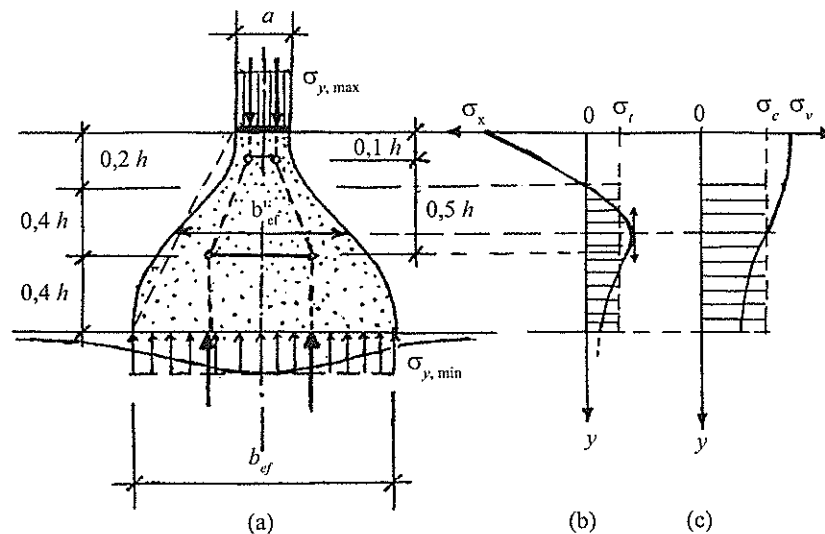


Figure 14. Justification de la bielle comprimée dans une région de discontinuité totale :
 a) diffusion de la compression, avec b_{ef} = largeur efficace de la bielle fictive ;
 b) distribution des contraintes transversales, où : σ_t = contrainte moyenne de traction (zone de distribution uniforme des armatures transversales) ;
 c) distribution des contraintes normales, où : σ_c = contrainte moyenne de compression, avec la section moyenne : $e \cdot b'_{ef}$ où : $b'_{ef} = (b_{ef} + a)/2$ et e = épaisseur constante [15].

Remarque 2. Pour les bielles comprises entre les aires de chargement direct, telles que dans les corbeaux ou les petites poutres-voiles, d'autres méthodes de calcul sont données en EC2, clauses 6.2.2 et 6.2.3.

2.4. Justification des nœuds [clause 6.5.4]

2.4.1. Forces nodales

Les forces agissant aux nœuds doivent être en équilibre. Les forces de traction transversale perpendiculaire au plan du nœud doivent être considérées.

Remarque 1. Les règles présentées sont aussi applicables aux régions pour lesquelles les forces concentrées sont transmises dans un élément qui n'est pas calculé par la méthode des bielles et tirants [clause 6.5.4(1)].

Remarque 2. Les nœuds peuvent apparaître là où des charges ponctuelles sont appliquées : au droit des appuis, dans les zones d'ancrage avec une forte densité de ferrailage ou de câbles de précontrainte, dans les parties courbes des armatures et dans les jonctions et angles des éléments [clause 6.5.4(3)].

2.4.2. Valeurs de calcul des contraintes de compression dans les nœuds

L'EC2 distingue trois cas.

a) Les nœuds en compression où il n'y a pas de tirants ancrés (Fig. 15) :

$$\sigma_{Rd, \max} = k_1 v' f_{cd}$$

où $\sigma_{Rd, \max} = \max [\sigma_{Rd1} ; \sigma_{Rd2} ; \sigma_{Rd3}]$.

La valeur de k_1 est donnée dans l'annexe nationale [2]. La valeur recommandée est $k_1 = 1$ ou une valeur supérieure, sur justifications spéciales, sans excéder $k_1 = 1/v'$ (voir § 2.3.2 pour la définition de v').

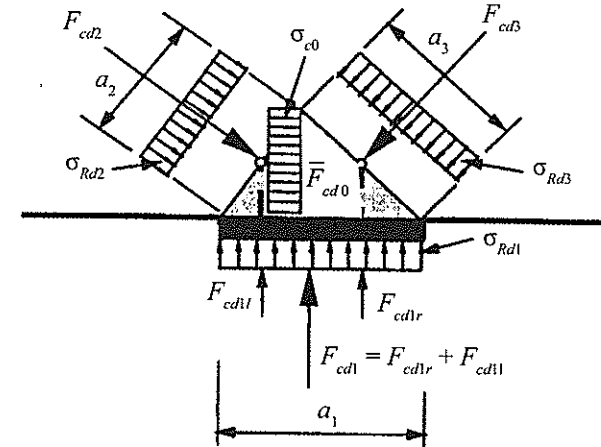


Figure 15. Nœud en compression sans tirants [1].

b) Les nœuds en compression-traction avec des tirants ancrés placés dans une direction (Fig. 16) :

$$\sigma_{Rd, \max} = k_2 v' f_{cd}$$

où $\sigma_{Rd, \max} = \max [\sigma_{Rd1} ; \sigma_{Rd2}]$.

La valeur de k_2 est donnée dans l'annexe nationale [2]. La valeur recommandée est $k_2 = 0,85$ ou une valeur supérieure, sur justifications spéciales, sans excéder $k_2 = 1$.

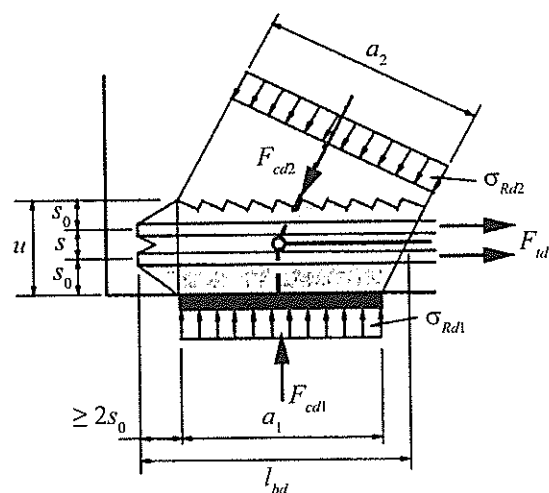


Figure 16. Nœud en compression-traction avec armatures placées dans une direction [1].

c) Les nœuds en compression-traction avec des tirants ancrés placés dans plus d'une direction (Fig. 17) :

$$\sigma_{Rd, \max} = k_3 v' f_{cd}$$

La valeur de k_3 est donnée dans l'annexe nationale [2]. La valeur recommandée est $k_3 = 0,75$ ou une valeur supérieure, sur justifications spéciales, sans excéder $k_3 = 0,9$.

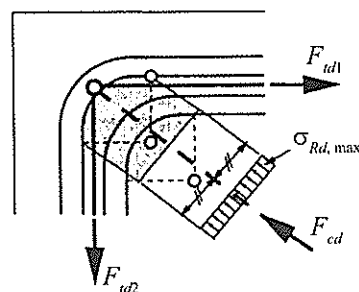


Figure 17. Nœud en compression-traction avec armatures placées dans deux directions [1].

Remarque 1. Sous les conditions indiquées, ci-dessous, les valeurs de calcul des contraintes de compression précédentes peuvent être augmentées au plus de 10 % lorsqu'au moins une des conditions suivantes est assurée [clause 6.5.4 (5)] :

- compression triaxiale ;
- tous les angles entre les bielles et les tirants sont supérieurs ou égaux à 55° ;

- les contraintes appliquées à l'appui ou au point de chargement sont uniformes, et le nœud est confiné par des armatures transversales ;
- les armatures sont disposées sur plusieurs lits ;
- le nœud est confiné avec sûreté au moyen de dispositions constructives ou par frottement.

Remarque 2. Les nœuds soumis à une compression triaxiale peuvent être justifiés à l'ELU selon les expressions (3.24) et (3.25) de l'EC2 pour un béton soumis à une contrainte de compression latérale $\sigma_2 (= \sigma_3)$, si la distribution de la charge est connue dans les trois directions des bielles, avec : $\sigma_{Rd, \max} = k_4 v' f_{cd}$.

La valeur de k_4 est donnée dans l'annexe nationale [2]. La valeur recommandée est $k_4 = 3$; ou une valeur supérieure, sur justifications spéciales, sans excéder $k_4 = 3/v'$.

Remarque 3 L'ancrage des armatures dans les nœuds, en compression-traction intervient au début du nœud (Fig. 16). La longueur d'ancrage doit s'étendre au-delà du nœud entier (voir clauses 8.4 à 8.6).

Remarque 4. Les nœuds soumis à la compression plane à la jonction de trois bielles peuvent être vérifiés à partir des contraintes moyennes principales maximales (σ_{c0} , σ_{c1} , σ_{c2} , σ_{c3}) en accord avec la clause de l'EC2 2.4.2 (a).

L'état hydrostatique des contraintes ($\sigma_{c0} = \sigma_{c1} = \sigma_{c2} = \sigma_{c3}$) correspond à des facettes des nœuds normales à l'axe des bielles.

CONCLUSION

La méthode des bielles et tirants a une portée générale. Elle donne une grande liberté au projeteur pour le choix d'un modèle adéquate qui nécessite, toutefois, un peu d'expérience.

Cette méthode trouve de nombreuses applications dans les ouvrages courants en béton du bâtiment et des travaux publics : âme des poutres (cf. chapitre 2), semelles (cf. chapitres 3 et 4), poutres-voiles (cf. chapitre 5), voiles en console (cf. chapitre 6), et corbeaux (cf. chapitre 7).

Ces éléments de structure en béton font l'objet d'études spécifiques dans cet ouvrage où cette méthode de calcul, peu utilisée en France, est appliquée et comparée à celle des règles françaises [15, 18].

Bibliographie

- [1] Eurocode 2 (EN 1992-1-1) – *Calcul des structures en béton*, Partie 1-1 : Règles générales et règles pour les bâtiments. AFNOR 18-711-1-1, octobre 2005.
- [2] Annexe nationale de l'Eurocode 2. AFNOR P18-711-1-1/NA, mars 2007.
- [3] RITTER W. – « La méthode de construction de Hennebique » (*Die Bauweise Hennebique*). *Schweizerische Bauzeitung*, vol. 17, Zurich, 1899.
- [4] MÖRSCH E. – *Construction en béton armé. Théorie et applications (Der Eisenbetonbau. Seine Theorie und Anwendung)*. - Verlag von Konrad Wittwer, Stuttgart, 1912.

- [5] LEBELLE P. – « Semelles de béton armé ». *Mémoires de l'Association internationale des ponts et charpentes*, vol. 4, Zurich, 1934.
- [6] BLÉVOT J., FRÉMY R. – « Semelles sur pieux. Méthode de calcul, compte rendu d'essais, dispositions constructives ». *Annales de l'ITBTP*, février 1967.
- [7] LEONHARDT F. – "Reducing the Shear reinforcement in reinforced concrete beams and slabs". *Magazine of concrete research*, vol. 17, n° 53, décembre 1965.
- [8] THÜRLIMANN B., MARTI P., PRALONG J., RITZ P., ZIMMERLI B. – „Vorlesung zum Fortbildungskurs für Bauingenieure“. Advanced lecture for civil engineers, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, 1983.
- [9] SCHLAICH J., SCHÄFER K., JENNEWEIN M. – "Toward a Consistent Design of Structural Concrete". *Journal of the Prestressed Concrete Institut*, vol. 32, n° 3, mai-juin 1987.
- [10] SCHLAICH J., SCHÄFER K. - Design and detailing of structural concrete using strut-and-tie models. *The Structural Engineer*, vol. 69, n° 6, March 1991.
- [11] WALTHER R. - *Construire en béton*, EPFL, 1993.
- [12] THONIER H. – *Conception et calcul des structures de bâtiments*, Tome 4, Presses des Ponts et Chaussées 1996.
- [13] SCHÄFER K. – "Deep beams and discontinuity regions. Structural concrete". *Textbook on behaviour, design and performance 7.3* vol. 3 FIB, December 1999.
- [14] BOSC J.-L. – « La méthode des bielles et tirants selon l'Eurocode 2 ». *Annales du bâtiment et des travaux publics*, février 2004.
- [15] BOSC J.-L. – « Méthode des bielles et tirants ». *Applications de l'Eurocode 2. Calcul des bâtiments en béton*, sous la dir. de J.-A. Calgaro et J. Cortade, Presses des Ponts et Chaussées, 2008 (2^e édition), p. 203-210.
- [16] BOSC J.-L. – « Calcul des semelles sur pieux par la méthode des bielles et tirants selon l'Eurocode 2 ». *Annales du bâtiment et des travaux publics*, décembre 2004.
- [17] BOSC J.-L. – « Calcul des corbeaux par la méthode des bielles et tirants selon l'Eurocode 2 ». *Annales du bâtiment et des travaux publics*, août 2005.
- [18] BOSC J.-L. – « Calcul des poutres-voiles et voiles en console par la méthode des bielles et tirants selon l'Eurocode 2 ». *Annales du bâtiment et des travaux publics*, août 2007.

CHAPITRE 2

Âme des poutres

INTRODUCTION

L'âme des poutres en béton correspond à un élément de structure où coexistent des régions de discontinuité et de continuité dans l'état fissuré pour lesquelles une modélisation en bielles et tirants (B-T) peut être utilisée pour leur justification à l'état limite ultime [clauses 5.6.4 et 6.5].

Dans ce chapitre, la méthode des bielles et tirants est appliquée aux cas des poutres fléchies soumises à une charge ponctuelle ou uniforme.

Après avoir identifié les modèles B-T à considérer dans les calculs, une justification de l'about et des sections courantes est présentée de façon générale pour les poutres usuelles soumises à un effort tranchant. Puis, un exemple numérique est développé dans le cas d'une poutre à une travée, afin de comparer les résultats de cette méthode avec ceux issus des prescriptions de l'Eurocode 2 vis-à-vis de l'effort tranchant [clause 6.2] et de la pratique française.

1. MODÉLISATION EN BIELLES ET TIRANTS

Les modèles de bielles et tirants à considérer pour l'âme des poutres en béton sont présentés en fonction du type de chargement et de poutre fléchie.

1.1. Poutre chargée ponctuellement

Les trajectoires des contraintes principales dans le domaine élastique (Fig. 1) font apparaître des régions de discontinuité (D) et de continuité (B).

L'application de la méthode des bielles et tirants à l'âme d'une poutre en béton armé (armatures transversales : $\alpha = 90^\circ$) conduit à un modèle de treillis simple distinct selon la région considérée (Fig. 2). Dans les régions au voisinage des charges concentrées, les bielles comprimées sont inclinées d'un angle θ_A par rapport aux tirants principaux (constitués par les armatures longitudinales), alors que dans la région de continuité courante ces bielles sont inclinées d'un angle θ ($\theta < \theta_A$). Les