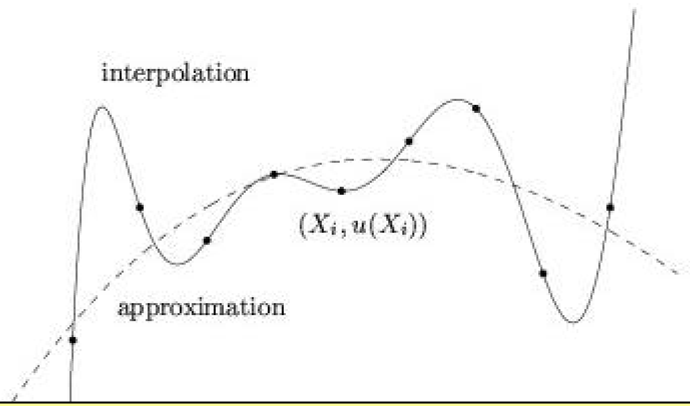
Interpolation, approximation et extrapolation…



Fonctions de base spécifiées a priori

$$u^h(x) = \sum_{j=1}^{n} U_j \ \phi_j(x)$$

Paramètres inconnus

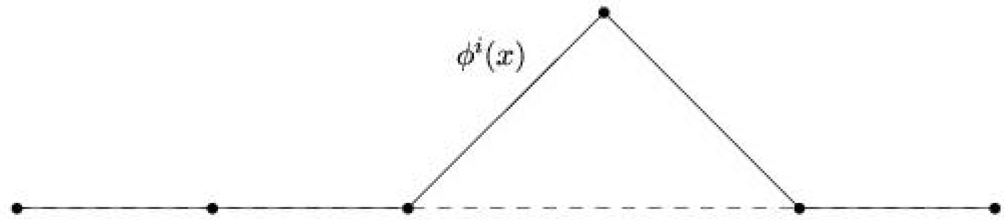
Interpolation :

la fonction $u^h(x)$ passe exactement par les points. Valeurs interpolées entre les points et valeurs extrapolées hors de l'intervalle.

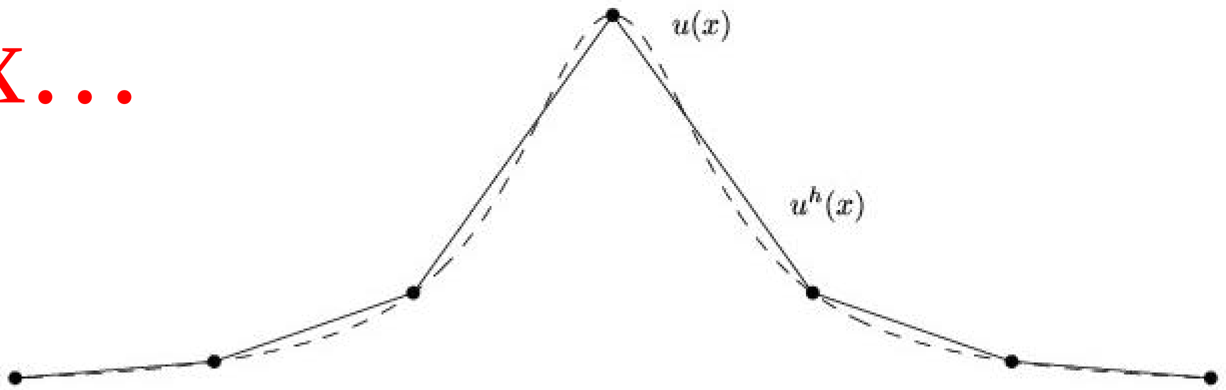
Approximation :

la fonction $u^h(x)$ ne passe pas par les points, mais s'en rapproche selon un critère à définir

$$\phi_i(x) = \begin{cases} 0 & x \leq X_{i-1} \\ \widehat{\phi}_1\left(\xi_{[X_{i-1},X_i]}(x)\right) & X_{i-1} \leq x \leq X_i \\ \widehat{\phi}_0\left(\xi_{[X_i,X_{i+1}]}(x)\right) & X_i \leq x \leq X_{i+1} \\ 0 & X_{i+1} \leq x \end{cases}$$



Interpolation polynomiale par morceaux…



Comment construire les fonctions de base ?

$$\begin{aligned}\widehat{\phi}_0(\xi) &= (1-\xi)\\ \widehat{\phi}_1(\xi) &= \xi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widehat{u}^{h_i}(\xi) &= U_{i-1}\,\widehat{\phi}_0(\xi) + U_i\,\widehat{\phi}_1(\xi) && 0 \leq \xi \leq 1\\ \widehat{u}^{h_i}(\xi) &= U_{i-1}\,(1-\xi) + U_i\,\xi && 0 \leq \xi \leq 1\end{aligned}$$

En appliquant le chgt de variable

$$\begin{aligned}\xi_{[X_{i-1},X_i]}(x) &= \frac{(x-X_{i-1})}{(X_i-X_{i-1})}\\ x_{[X_{i-1},X_i]}(\xi) &= \xi\,(X_i-X_{i-1})+X_{i-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u^{h_i}(x) &= U_{i-1}\,\frac{(X_i-x)}{h_i} + U_i\,\frac{(x-X_{i-1})}{h_i} && X_{i-1} \leq x \leq X_i\\ u^{h_i}(x) &= U_{i-1}\,\phi_{i-1}(x) + U_i\,\phi_i(x) && X_{i-1} \leq x \leq X_i\end{aligned}$$

Le problème d’Alphonse : approximer u(x) par une fonction linéaire par morceaux au sens des moindres carrés…

$$J(U_1, U_2, \ldots, U_n) = \int_a^b \left(u(x) - \sum_{j=1}^{n} \phi_j(x)\, U_j \right)^2 dx.$$

On souhaite maintenant minimiser l’intégrale du carré de l’écart entre u(x) et $u^h(x)$

Un peu d'algèbre avec Alphonse

$$\left.\frac{\partial J}{\partial V_k}\right|_{(U_1,\ldots,U_n)} = 0 \qquad k = 1,2,\ldots,n$$

$$\downarrow$$

$$\int_a^b -2\phi_k(x)\left(u(x) - \sum_{j=1}^{n}\phi_j(x)\,U_j\right)dx = 0 \qquad k = 1,2,\ldots,n$$

$$\downarrow$$

Il suffit de calculer ces intégrales

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\int_a^b \phi_k(x)\phi_j(x)dx\right)\,U_j = \int_a^b \phi_k(x)u(x)dx \qquad k = 1,2,\ldots,n$$

$$\downarrow$$

$$\mathbf{B}\ \mathbf{u} = \mathbf{c}$$

$$B_{ij} = \int_a^b \phi_i(x)\phi_j(x)dx$$

$$C_i = \int_a^b \phi_i(x)u(x)dx$$

B peut être calculée analytiquement
C doit être calculé numériquement

Comment écrire B avec Matlab ?

```
X = [1 2 3 4];
n = length(X);      % nombre de points
h = diff(X);

haux1 = ([h 0] /6)';
haux2 = ([0 h] /6)';
A = spdiags([haux1 2*(haux1+haux2) haux2],[-1 0 1],n,n);
```

spdiags

```
>>full(A*6)
ans =

     2     1     0     0
     1   2+2     1     0
     0     1   2+2     1
     0     0     1     2

>>
```

Notations du programme d'Alphonse : $A \,.\, U = b$

Notations des notes de cours : $B \,.\, U = c$

Comment intégrer C avec Matlab ?

```
B(ielem)  =B(ielem)  +quad8('b1',Xleft,Xright,[],[],Xleft,Xright);
B(ielem+1)=B(ielem+1)+quad8('b2',Xleft,Xright,[],[],Xleft,Xright);


function y = b1(x,Xleft,Xright)
y = u(x) .* (Xright - x) / (Xright - Xleft);

function y = b2(x,Xleft,Xright)
y = u(x) .* (x - Xleft) / (Xright - Xleft);
```

```
I = quad8('f',a,b);
```

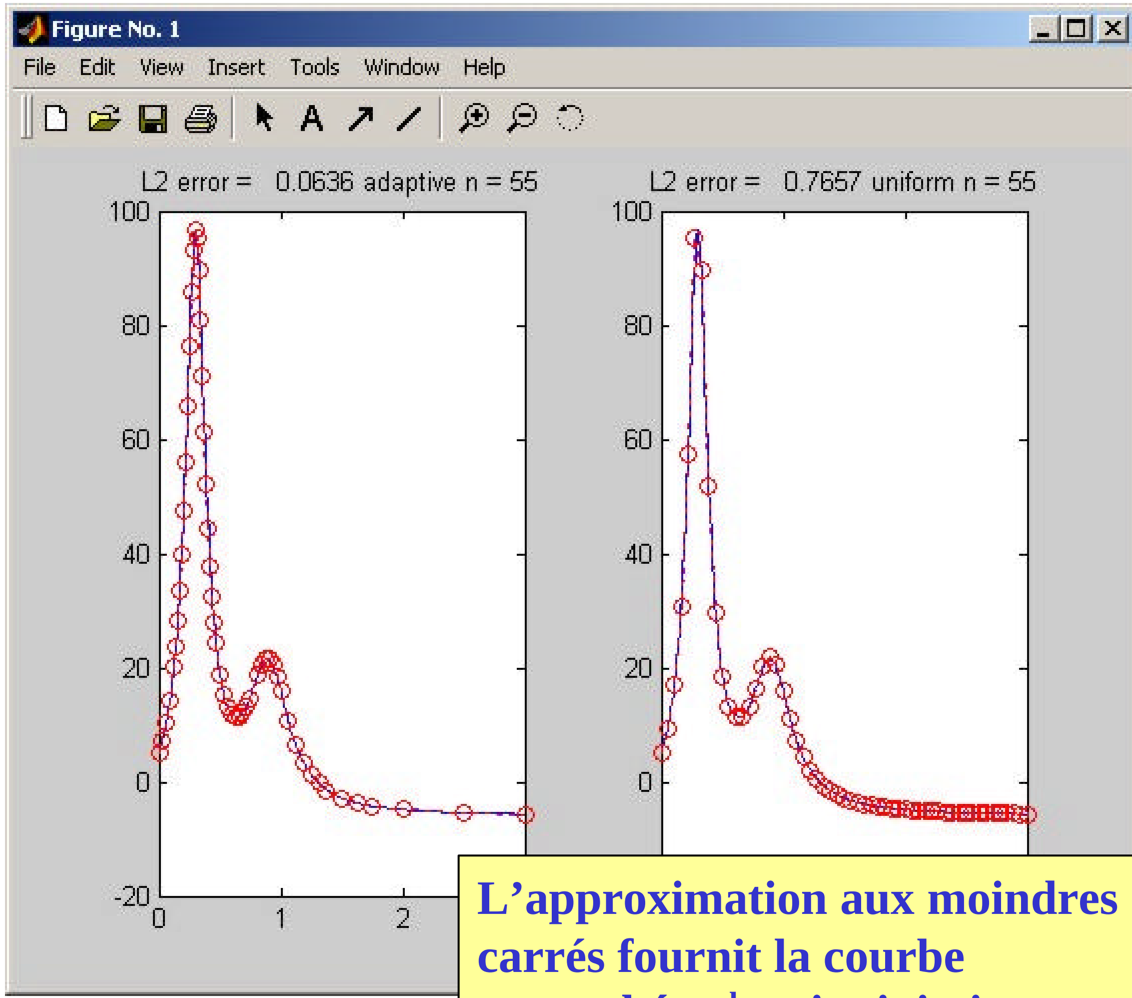
Notations du programme d'Alphonse : $A \,.\, U = b$

Notations des notes de cours : $B \,.\, U = c$

$$B_{ij} = \int_a^b \phi_i(x)\phi_j(x)dx$$

$$C_i = \int_a^b \phi_i(x)u(x)dx$$

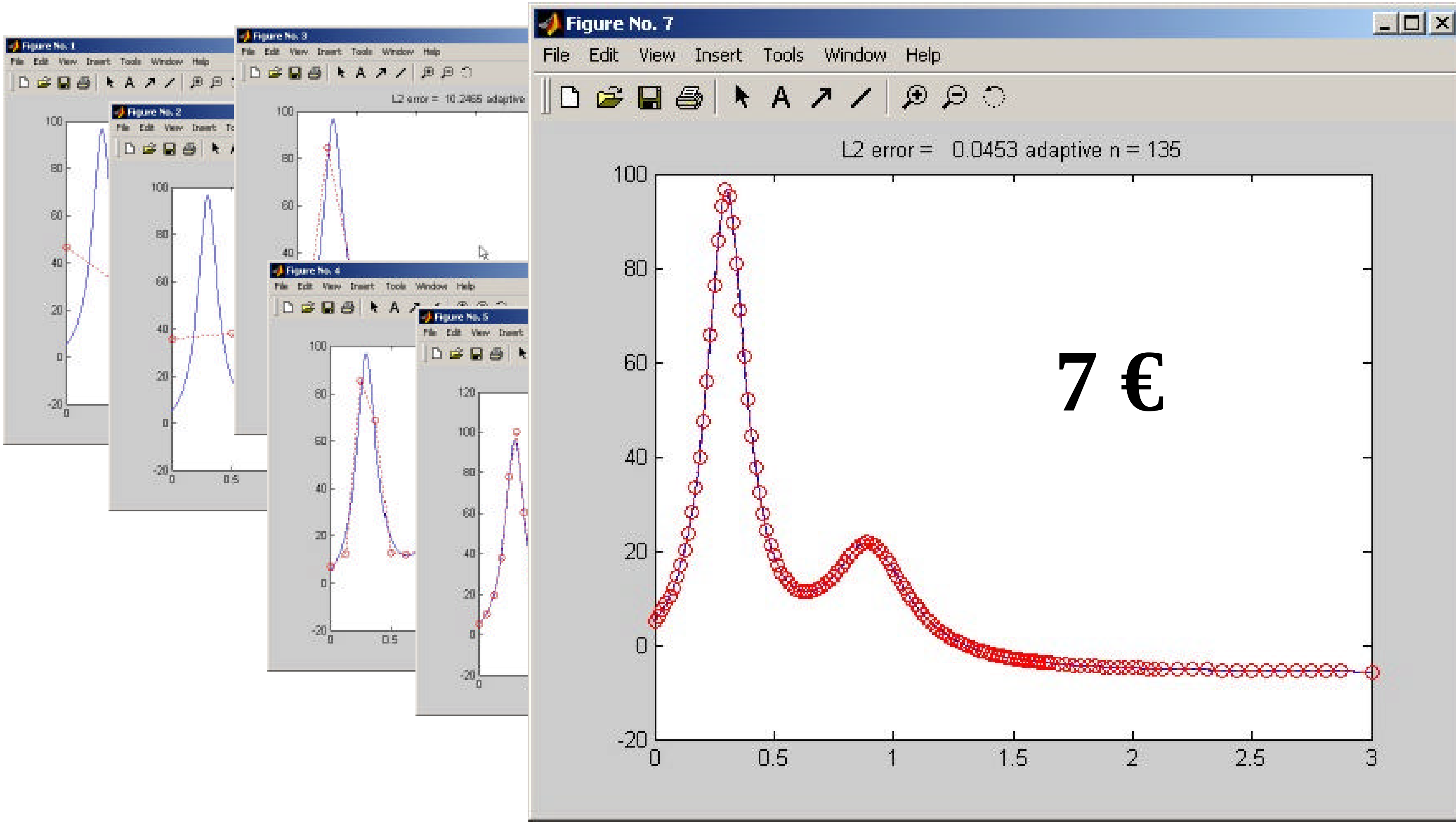
Approximation linéaire par morceaux



Pourquoi calculer une approximation, alors que l'interpolation fournit quasiment un résultat aussi précis ?

L'approximation aux moindres carrés fournit la courbe approchée u^h qui minimise l'intégrale de $(u-u^h)^2$

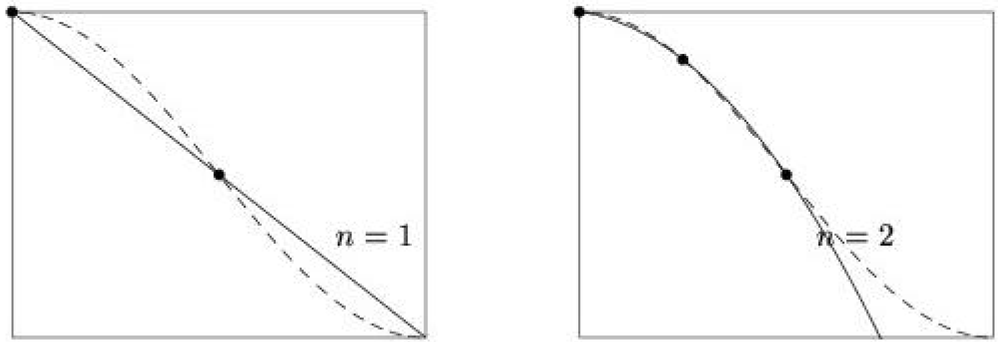
Et l’APP2 : la solution d’Alphonse…



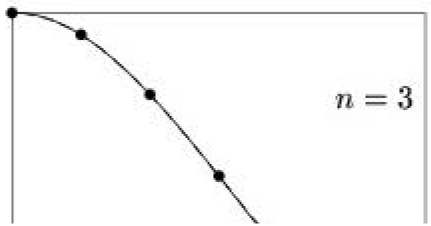
Convergence

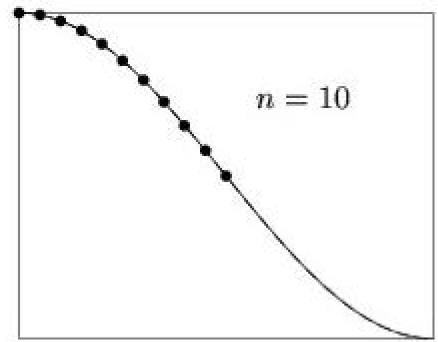
$$\lim_{n\to\infty} e^h(x) = 0 \quad \text{pour } x \in [a,b].$$

$$e^h(x) = u(x) - u^h(x)$$



Convergence de l'interpolation polynomiale de cos(x)





$$\boxed{|e^h(x)| \quad \leq \quad \frac{C}{(n+1)!}\,|(x-X_0)(x-X_1)(x-X_2)\cdots(x-X_n)|}$$

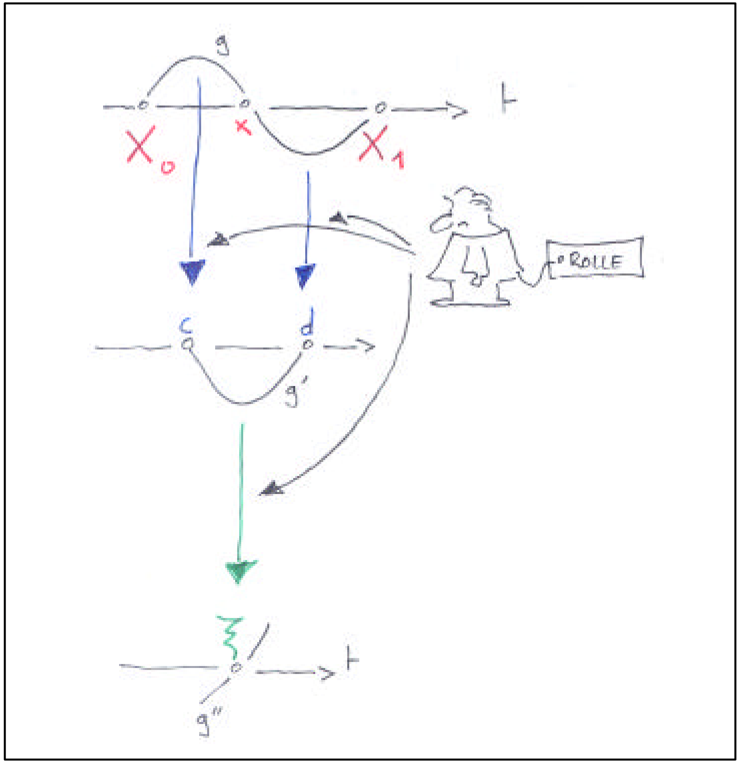
Borne d'erreur

$$\begin{array}{lcll} |e^h(x)| & \leq & C h^{n+1} & \qquad X_0 < x < X_n \\ & \big\downarrow & & \\ e^h(x) & \approx & \mathcal{O}(h^{n+1}) & \end{array}$$

Borne d'erreur pour une interpolation polynomiale

Une jolie application du théorème de Rolle….

$$g(t) = u(t) - u^h(t) - e^h(x)\frac{(t-X_0)(t-X_1)}{(x-X_0)(x-X_1)}$$



$$g''(\xi) = 0$$

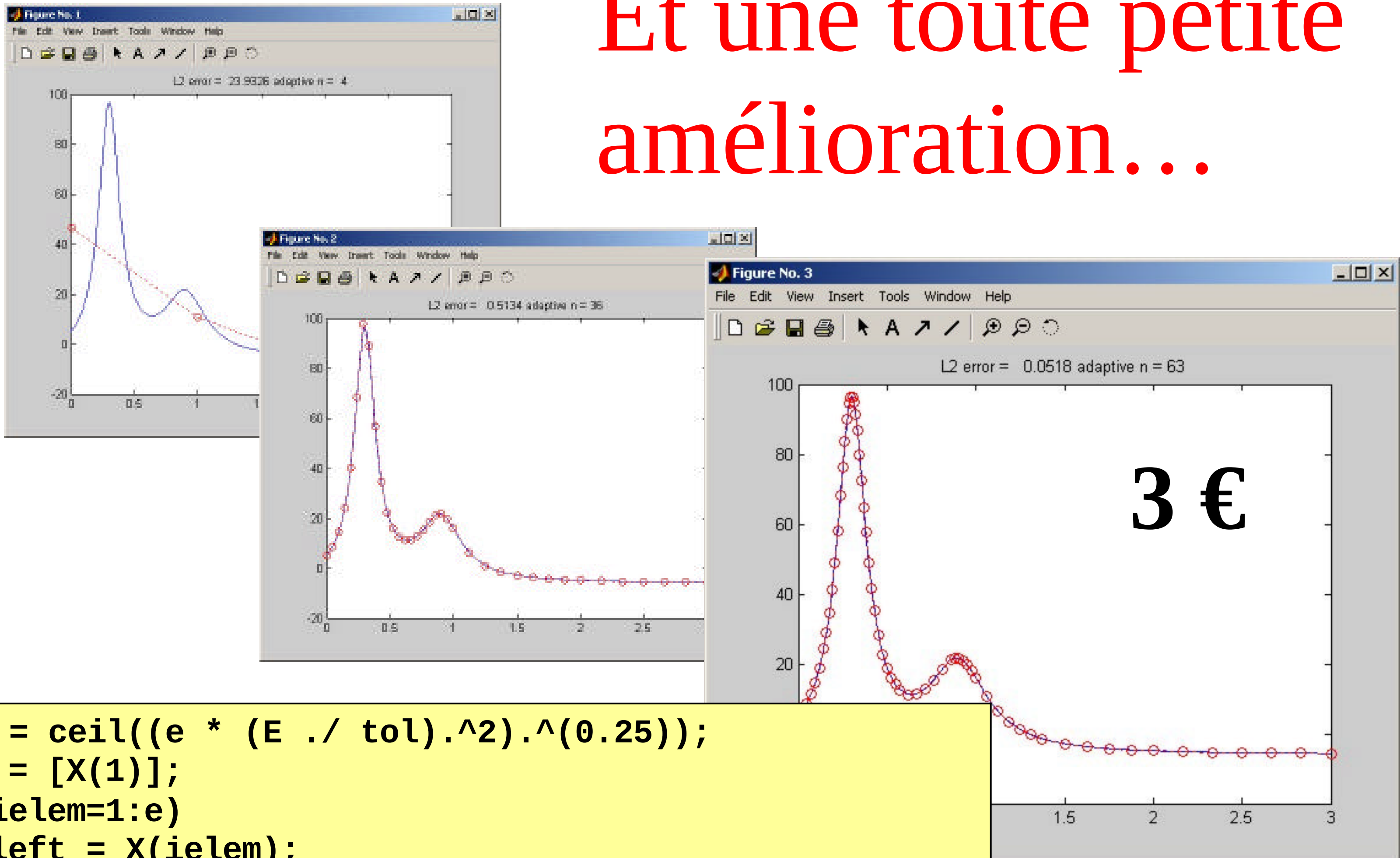
$$\downarrow$$

$$u''(\xi) - \underbrace{(u^h)''(\xi)}_{=0} - e^h(x)\frac{2}{(x-X_0)(x-X_1)} = 0$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{e^h(x) = \frac{u''(\xi)}{2}(x-X_0)(x-X_1)}$$

Et une toute petite amélioration…




```
subd = ceil((e * (E ./ tol).^2).^(0.25));
Xnew = [X(1)];
for(ielem=1:e)
   Xleft = X(ielem);
   Xright = X(ielem+1);
   nsubd = subd(ielem);
   Xnew = [Xnew Xleft+[1:nsubd]*(Xright-Xleft)/nsubd]
end
```

Splines cubiques : interpolation C^2

$$\begin{aligned}
\widehat{\phi}_0(\xi) &= (1-\xi) \\
\widehat{\phi}_1(\xi) &= \tfrac{1}{6}(1-\xi)^3 - \tfrac{1}{6}(1-\xi) \\
\widehat{\phi}_2(\xi) &= \xi \\
\widehat{\phi}_3(\xi) &= \tfrac{1}{6}\xi^3 - \tfrac{1}{6}\xi
\end{aligned}$$

Dérivées secondes que l'on va calculer afin d'obtenir une courbe globale C^2

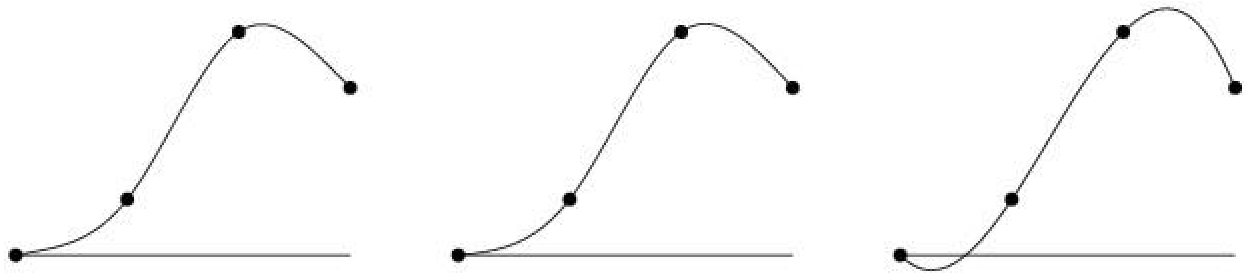
$$\widehat{u}^{h_i}(\xi) = U_{i,0}\widehat{\phi}_0(\xi) + U''_{i,0}\widehat{\phi}_1(\xi) + U_{i,1}\widehat{\phi}_2(\xi) + U''_{i,1}\widehat{\phi}_3(\xi)$$

Valeurs nodales

$$\boxed{\frac{h_i}{6}\,U''_{i-1} + \frac{2(h_i+h_{i+1})}{6}\,U''_i + \frac{h_{i+1}}{6}\,U''_{i+1} = \frac{(U_{i+1}-U_i)}{h_{i+1}} - \frac{(U_i-U_{i-1})}{h_i} \qquad i=1,\ldots,n-1}$$

Système de n-1 équations à n+1 inconnues
Il faut 2 conditions supplémentaires

Et les petites conditions supplémentaires…



- ❑Spline cubique encastrée
- ❑Spline cubique naturelle
- ❑Spline cubique extrapolée

Et quid pour une courbe fermée ?

$$
\frac{1}{6}\begin{bmatrix}
1 & 0 & & & & & & & \\
1 & 4 & 1 & & & & & & \\
 & 1 & 4 & 1 & & & & & \\
 & & 1 & 4 & 1 & & & & \\
 & & & 1 & 4 & 1 & & & \\
 & & & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\
 & & & & & 1 & 4 & 1 & \\
 & & & & & & 1 & 4 & 1 \\
 & & & & & & & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
U_0'' \\ U_1'' \\ U_2'' \\ U_3'' \\ U_4'' \\ \vdots \\ U_{n-2}'' \\ U_{n-1}'' \\ U_n''
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\ U_0 - 2U_1 + U_2 \\ U_1 - 2U_2 + U_3 \\ U_2 - 2U_3 + U_4 \\ U_3 - 2U_4 + U_5 \\ \vdots \\ \vdots \\ U_{n-2} - 2U_{n-1} + U_n \\ 0
\end{bmatrix}
$$

Spline cubique naturelle avec des abscisses équidistantes

Pratiquement…

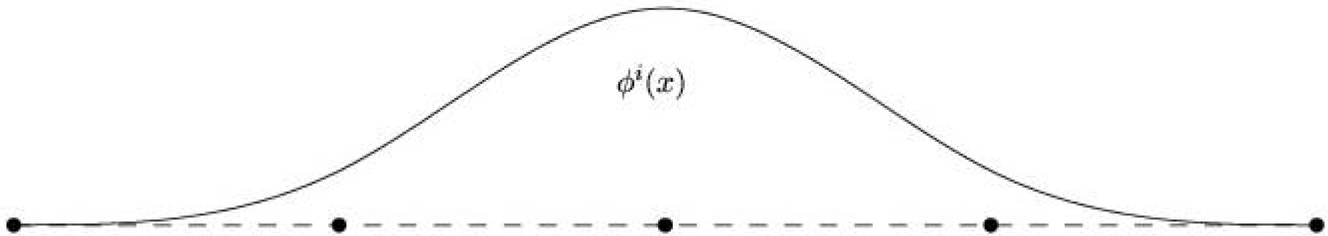
$$
\begin{aligned}
u^{h_i}(x) \quad &= \quad U_{i-1} + \left(\frac{U_i - U_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i(2U_{i-1}'' + U_i'')}{6} \right)(x - X_{i-1}) \\
&\qquad + \left(\frac{U_{i-1}''}{2} \right)(x - X_{i-1})^2 \\
&\qquad + \left(\frac{U_i'' - U_{i-1}''}{6h_i} \right)(x - X_{i-1})^3
\end{aligned}
$$

Et les B-splines : approx. C^2

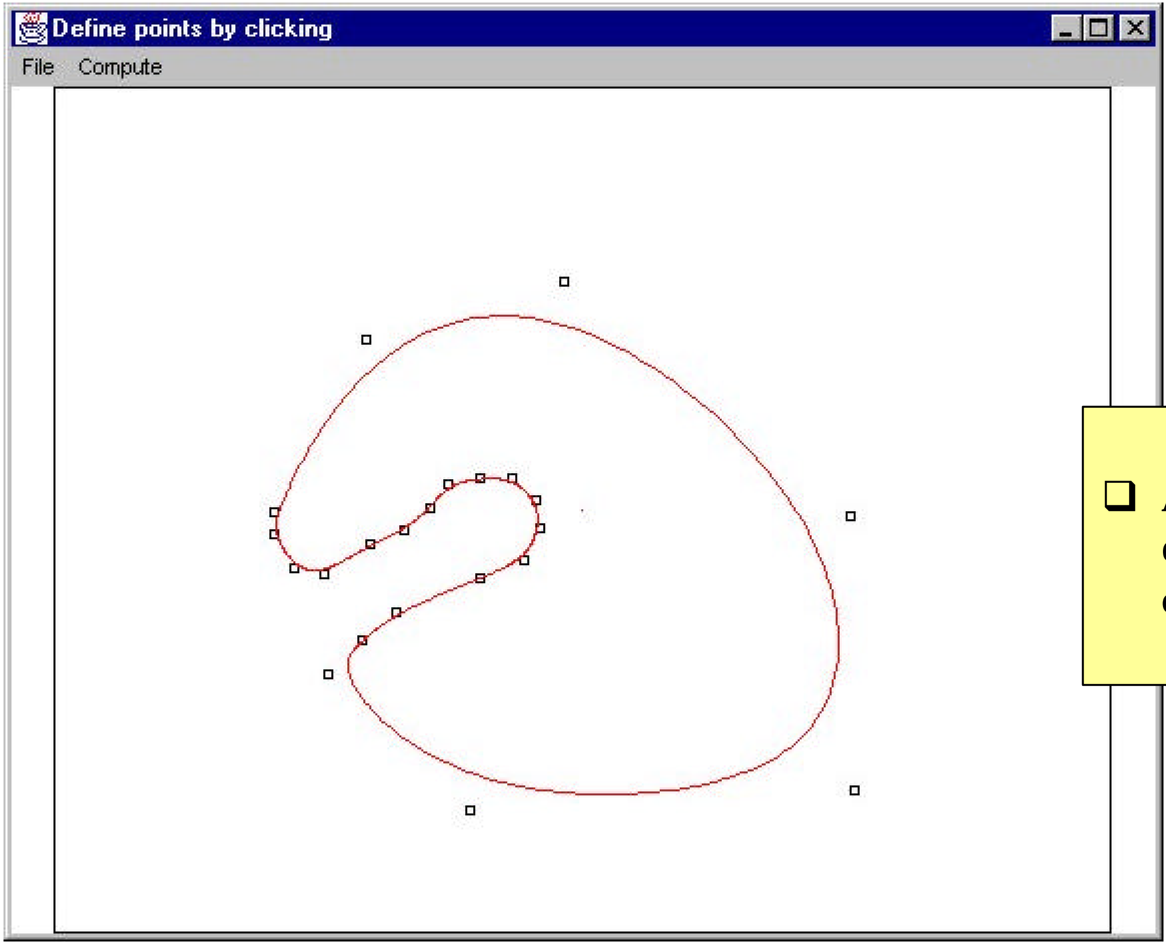
$$\phi_i(x) = \begin{cases} 0 & x \leq X_{i-2} \\ \widehat{\phi}_3\left(\xi_{[X_{i-2},X_{i-1}]}(x)\right) & X_{i-2} \leq x \leq X_{i-1} \\ \widehat{\phi}_2\left(\xi_{[X_{i-1},X_{i}]}(x)\right) & X_{i-1} \leq x \leq X_{i} \\ \widehat{\phi}_1\left(\xi_{[X_{i},X_{i+1}]}(x)\right) & X_{i} \leq x \leq X_{i+1} \\ \widehat{\phi}_0\left(\xi_{[X_{i+1},X_{i+2}]}(x)\right) & X_{i+1} \leq x \leq X_{i+2} \\ 0 & X_{i+2} \leq x \end{cases}$$

où les fonctions de forme locales $\widehat{\phi}_i$ sont définies par :

$$\begin{aligned} \widehat{\phi}_0(x) &= \tfrac{1}{6}(1-\xi)^3 \\ \widehat{\phi}_1(x) &= \tfrac{1}{6}(4-6\xi^2+3\xi^3) \\ \widehat{\phi}_2(x) &= \tfrac{1}{6}(1+3\xi+3\xi^2-3\xi^3) \\ \widehat{\phi}_3(x) &= \tfrac{1}{6}(\xi)^3 \end{aligned}$$



Les B-splines pour une courbe fermée….



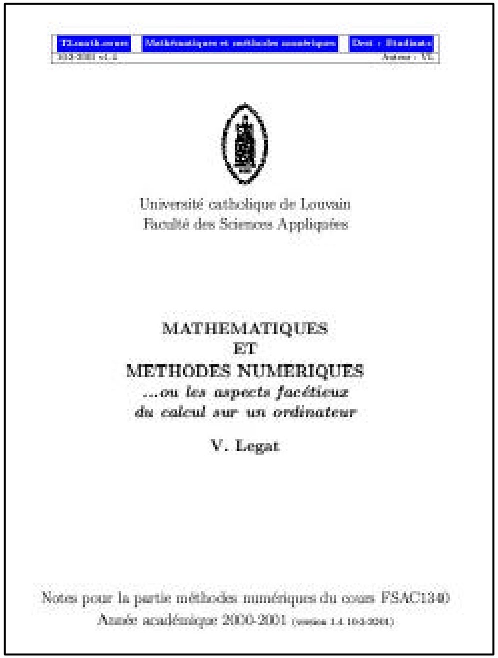
- A effectuer à titre d'exercice complémentaire

Une application des B-splines

The Art of 3D Computer Modeling

www.pixar.com

Plan des cours de méthodes numériques


Université catholique de Louvain
Faculté des Sciences Appliquées

MATHEMATIQUES
ET
METHODES NUMERIQUES
...ou les aspects facétieux du calcul sur un ordinateur

V. Legat

Notes pour la partie méthodes numériques du cours FSAC1340
Année académique 2000-2001

36 pages

Comment approximer une fonction ?

Comment intégrer numériquement une fonction ?

20 pages

20 pages

Comment dériver numériquement une fonction ?

Comment résoudre numériquement une équation différentielle ordinaire ?

Comment résoudre numériquement un problème aux valeurs initiales ?

Comment résoudre numériquement un problème aux conditions frontières ?

Et les équations non-linéaires ?

Intégration numérique

Quadrature :

On estime l'intégrale définie I en effectuant une somme pondérée des valeurs u(X_i)

$$I = \int_a^b u(x)\, dx$$

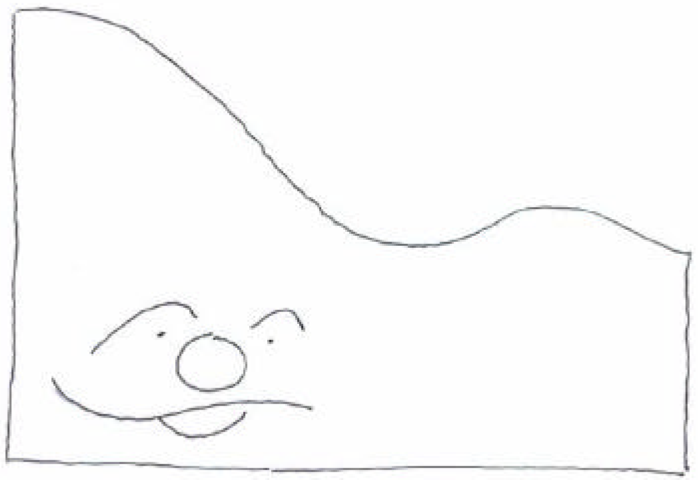
Abcisses d'intégration calculées a priori

$$I \approx I^h = \sum_{i=0}^{m} w_i\, u(X_i)$$

Poids calculés a priori

$$E^h = I - I^h$$

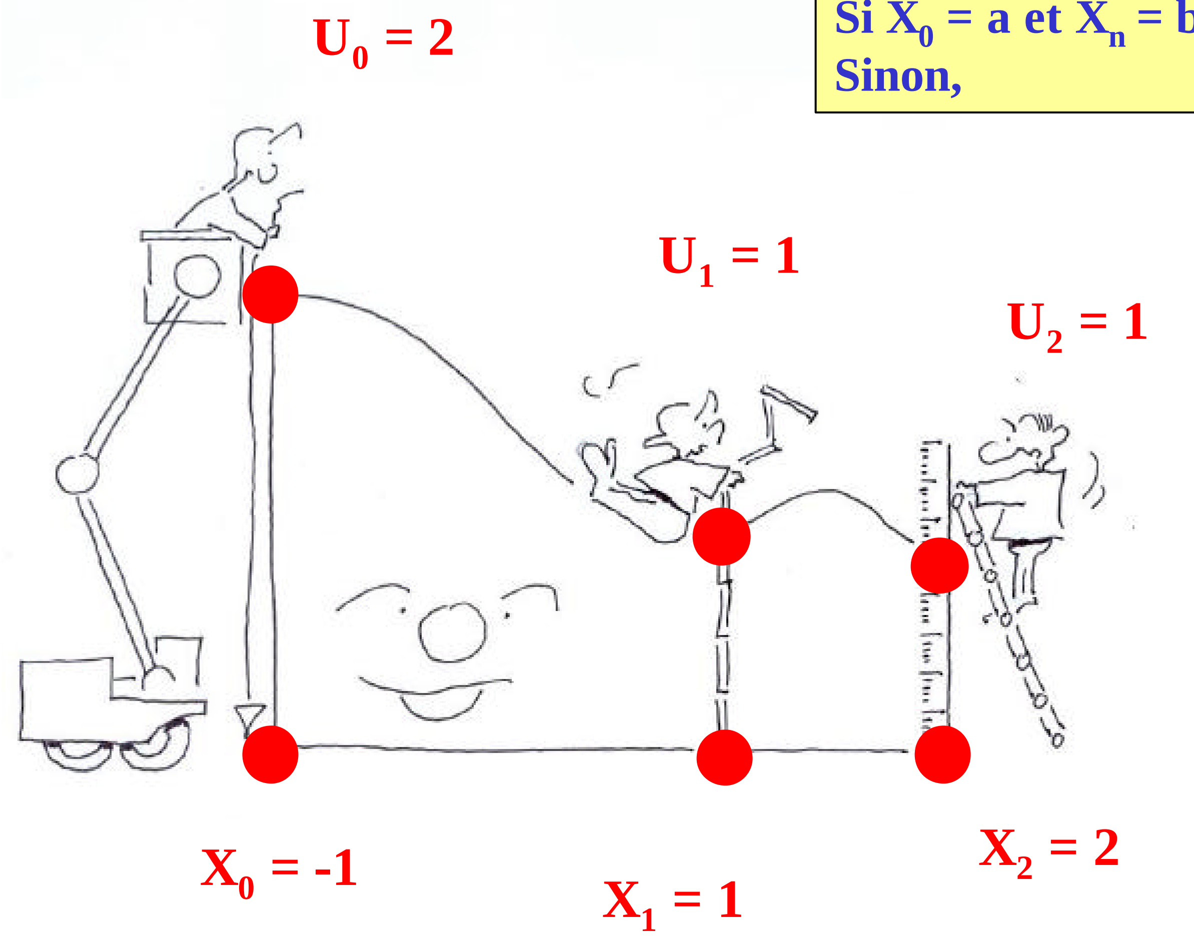
Une surface à intégrer….



Comment l'intégrer sur un ordinateur ?

Prise de mesures…

Si X_0 = a et X_n = b,	méthode fermée
Sinon,	méthode ouverte



Simplifions, standardisons,

...

$$\boxed{x(\xi) = \frac{(b-a)}{2}\xi + \frac{(b+a)}{2}}$$

$$I = \int_a^b u(x)\,dx = \int_{-1}^{1} u(x(\xi))\frac{dx}{d\xi}d\xi = \underbrace{\int_{-1}^{1} u(x(\xi))\,d\xi}_{\approx \sum_{i=0}^{m} w_i\,u(x(\Xi_i))} \frac{(b-a)}{2}$$

Méthodes d'intégration

Méthodes à pas égaux :

Règles de Newton-Cotes

Méthodes à pas inégaux :

Règles de Gauss-Legendre

Méthodes récursives :

Extrapolation de Richardson

Méthodes de Romberg

Méthodes adaptatives :

ou les méthodes numériques intelligentes…

Avec l'interpolation polynomiale, tout est facile…

$$
\begin{aligned}
I \;&\approx\; \overbrace{\int_{-1}^{1} u^h(x)\,dx}^{I^h} \\
&\downarrow \\
&\approx\; \int_{-1}^{1} \sum_{i=0}^{m} u(X_i)\,\phi_i(x)\,dx \\
&\downarrow \\
&\approx\; \sum_{i=0}^{m} u(X_i) \underbrace{\int_{-1}^{1} \phi_i(x)\,dx}_{w_i}
\end{aligned}
$$

$\int_{-1}^{1} u(x)dx \approx U_{-1} + U_1$ (méthode des trapèzes) $d = 1$
$\int_{-1}^{1} u(x)dx \approx \frac{1}{3}\,U_{-1} + \frac{4}{3}\,U_0 + \frac{1}{3}\,U_1$ (méthode de Simpson) $d = 3$
$\int_{-1}^{1} u(x)dx \approx \frac{1}{4}\,U_{-1} + \frac{3}{4}\,U_{-2/3} + \frac{3}{4}\,U_{2/3} + \frac{1}{4}\,U_1$ (méthode de Simpson $\frac{3}{8}$) $d = 3$
$\int_{-1}^{1} u(x)dx \approx \frac{7}{45}\,U_{-1} + \frac{32}{45}\,U_{-1/2} + \frac{12}{45}\,U_0 + \frac{32}{45}\,U_{1/2} + \frac{7}{44}\,U_1$ (méthode de Boole) $d = 5$

Quelques pages du grimoire de Gargamel

Comment obtenir les formules magiques ?

$$\int_{-1}^{1} u(x)\,dx \approx \overbrace{\int_{-1}^{1} u^h(x)\,dx}^{I^h}$$

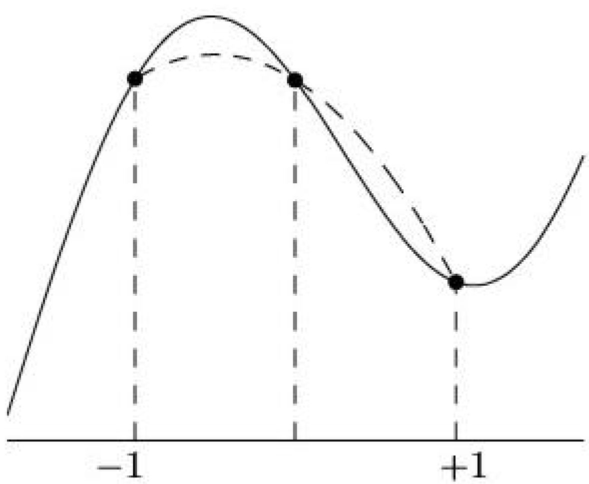
$$\approx \sum_{i=0}^{2} u(X_i) \underbrace{\int_{-1}^{1} \phi_i(x)\,dx}_{w_i}$$

En fixant $X_0 = -1$, $X_1 = 0$ et $X_2 = 1$

$$\approx U(-1) \underbrace{\int_{-1}^{1} \frac{(x-1)x}{2}\,dx}_{w_0}$$

$$+ U(0) \underbrace{\int_{-1}^{1} \frac{(x-1)(x+1)}{-1}\,dx}_{w_1}$$

$$+ U(1) \underbrace{\int_{-1}^{1} \frac{(x+1)x}{2}\,dx}_{w_2}$$



Calcul des poids

$$w_0 = \int_{-1}^{1} \frac{(x-1)x}{2}\,dx = \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}$$

$$w_1 = \int_{-1}^{1} 1 - x^2\,dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$w_2 = \int_{-1}^{1} \frac{(x-1)x}{2}\,dx = \left[\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{4}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}$$

Avec une interpolation polynomiale de degré 2, on intégre exactement un polynôme de degré 3….

$$\int_{-1}^{1} \sum_{i=0}^{2n+1} a_i\ x^i\ dx = \int_{-1}^{1} \sum_{j=0}^{n} a_{2j}\ x^{2j} dx + \underbrace{\int_{-1}^{1} \sum_{j=0}^{n} a_{2j+1}\ x^{2j+1}\ dx}_{=0}$$

$$= \int_{-1}^{1} \sum_{i=0}^{2n} a_i\ x^i\ dx$$

Une formule symétrique développée pour un degré n pair a un degré de précision n+1

L'intervalle d'intégration ne doit pas être symérique !
Le changement de variable ne change en rien la précision de la méthode.

Introduisons le symbole h

Trapèzes ***h = (b-a)***
Simpson ***h = (b-a)/2***
Boole ***h = (b-a)/4***

$$\int_{-h/2}^{h/2} u(x)dx \approx \tfrac{h}{2} \left(U_{-h/2} + U_{h/2}\right)$$

(méthode des trapèzes) $d = 1$

$$\int_{-h}^{h} u(x)dx \approx \tfrac{h}{3} \left(U_{-h} + 4\, U_0 + U_h\right)$$

(méthode de Simpson) $d = 3$

$$\int_{-2h}^{2h} u(x)dx \approx \tfrac{2h}{45} \left(7\, U_{-2h} + 32\, U_{-h} + 12\, U_0 + 32\, U_h + 7\, U_{2h}\right)$$

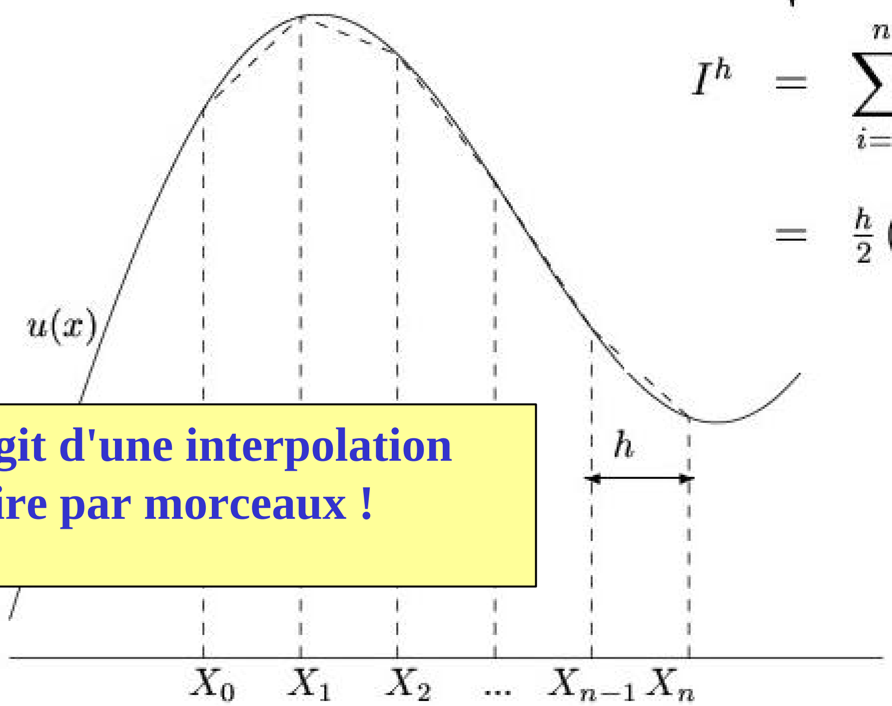
(méthode de Boole) $d = 5$

Méthode composite des trapèzes

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{X_0}^{X_n} u(x)\;dx \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_{X_{i-1}}^{X_i} u(x)\;dx
\end{aligned}
$$

En utilisant la règle des trapèzes (2.7) pour chaque sous-intervalle

$$
\begin{aligned}
I^h &= \sum_{i=1}^{n} \frac{h}{2}\;(U_{i-1} + \;U_i) \\
&= \tfrac{h}{2}\,(U_0 + 2U_1 + 2U_2 + \ldots + 2U_{n-1} + U_n)
\end{aligned}
$$



Il s'agit d'une interpolation linéaire par morceaux !

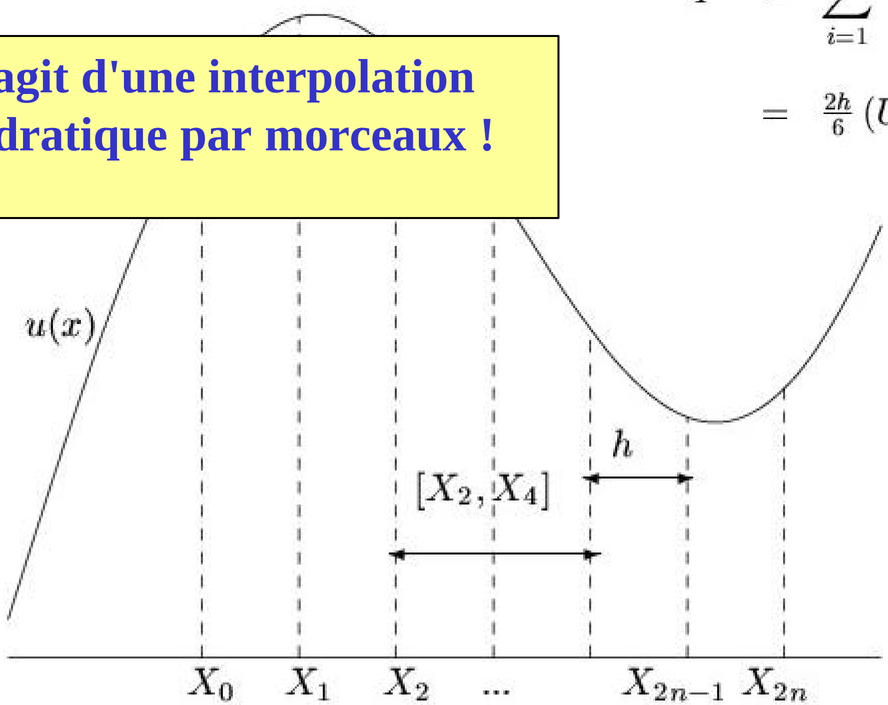
Méthode composite de Simpson

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{X_0}^{X_n} u(x)\ dx \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_{X_{2i-2}}^{X_{2i}} u(x)\ dx
\end{aligned}
$$

En utilisant la règle de Simpson (2.7) pour chaque sous-intervalle

$$
\begin{aligned}
I^h &= \sum_{i=1}^{n} \frac{2h}{6}\ (U_{2i-2} + 4\ U_{2i-1} +\ U_{2i}) \\
&= \tfrac{2h}{6}\ (U_0 + 4U_1 + 2U_2 + 4U_3 + 2U_4 + \ldots + 4U_{2n-1} + U_{2n})
\end{aligned}
$$

Il s'agit d'une interpolation quadratique par morceaux !



n intervalles juxtaposés de longueur 2h
2n+1 abscisses d'intégration

Comment estimer l'erreur de discrétisation ?

Erreur de l'interpolation polynomiale $e^h(x)$

Erreur de l'intégration nmérique $E^h(x)$

Estimation de l'erreur de la méthode de Simpson

$$E^h = \sum_{i=1}^{n} \int_{-h}^{h} \frac{u^{(4)}(\xi_i)}{4!} (x-h)x(x+h)(x-\alpha)\ dx$$

En définissant $\frac{u^{(4)}(\xi)}{4!} = \max_i \frac{u^{(4)}(\xi_i)}{4!}$

$$\leq n \int_{-h}^{h} \frac{u^{(4)}(\xi)}{4!} (x-h)x(x+h)(x-\alpha)\ dx$$

$$\leq n\frac{u^{(4)}(\xi)}{4!} \left(\int_{-h}^{h} x^2(x-h)(x+h)\, dx - \alpha \underbrace{\int_{-h}^{h} (x-h)x(x+h)\, dx}_{=0} \right)$$

$$\leq n\frac{u^{(4)}(\xi)}{4!} \left[\frac{x^5}{5} - \frac{h^2x^3}{3} \right]_{-h}^{h}$$

$$\leq -n\frac{u^{(4)}(\xi)}{90} h^5$$

Car $2nh = (b-a)$ pour une méthode composite de Simpson

$$\leq -(b-a)\frac{u^{(4)}(\xi)}{180} h^4$$

n et h sont deux paramètres liés entre eux !
h = (b-a)/2n

$$\boxed{|E^h| \leq \frac{C_4(b-a)}{180} h^4}$$

Degré de précision = 3
Ordre de précision = 4

Combien de sous-intervalles pour obtenir une précision donnée ?

$$\int_{-h/2}^{h/2} u(x)dx \;=\; \tfrac{h}{2}\,\left(U_{-h/2} + U_{h/2}\right) - \tfrac{h^3}{12}u^{(2)}(\xi)$$

$$|E^h| \;\leq\; \frac{C_2(b-a)}{12}\,h^2 \qquad \text{(méthode des trapèzes)} \qquad \mathcal{O}(h^2)$$

$$\int_{-h}^{h} u(x)dx \;=\; \tfrac{h}{3}\left(U_{-h} + 3\,U_0 + U_h\right) - \tfrac{h^5}{90}u^{(4)}(\xi)$$

$$|E^h| \;\leq\; \frac{C_4(b-a)}{180}\,h^4 \qquad \text{(méthode de Simpson)} \qquad \mathcal{O}(h^4)$$

$$\int_{-2h}^{2h} u(x)dx \;=\; \tfrac{2h}{45}\left(7\,U_{-2h} + 32\,U_{-h} + 12\,U_0 + 32\,U_h + 7\,U_{2h}\right) - \tfrac{8h^7}{945}u^{(6)}(\xi)$$

$$|E^h| \;\leq\; \frac{2C_6(b-a)}{945}\,h^6 \qquad \text{(méthode de Boole)} \qquad \mathcal{O}(h^6)$$

$$\frac{C_2}{12}\;n\;\frac{(b-a)^3}{n^3} \;\leq\; \epsilon$$

$$\sqrt{\frac{C_2(b-a)^3}{12\epsilon}} \;\leq\; n$$

Méthodes à pas inégaux : Gauss-Legendre

Simpson sur un intervalle
Degré de précision = 3
Nombre de points = 3

$$\int_{-1}^{1} p(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} w_k p(X_k)\ ,$$

En développant le polynôme,

Choisir des abscisses équidistantes n'est pas le meilleur choix !

$$\sum_{i=0}^{2n+1} \int_{-1}^{1} a_i\, x^i\,dx = \sum_{k=0}^{n} w_k \sum_{i=0}^{2n+1} a_i\, X_k^i$$

Gauss-Legendre sur un intervalle
Degré de précision = 2n+1
Nombre de points = n+1

En séparant les termes pairs et impairs,

$$\sum_{j=0}^{n} \int_{-1}^{1} a_{2j} x^{2j}\,dx + \sum_{j=0}^{n} \int_{-1}^{1} a_{2j+1} x^{2j+1}\,dx = \sum_{k=0}^{n} w_k \sum_{j=0}^{n} a_{2j} X_k^{2j} + \sum_{k=0}^{n} w_k \sum_{j=0}^{n} a_{2j+1} X_k^{2j+1}$$

En effectuant les intégrales,

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{2}{(2j+1)} a_{2j} + 0 = \sum_{k=0}^{n} w_k \sum_{j=0}^{n} a_{2j} X_k^{2j} + \sum_{k=0}^{p} w_k \sum_{j=0}^{n} a_{2j+1} X_k^{2j+1}$$

$n+1$	$X_k, -X_{n-k}$	w_k, w_{n-k}
1	0.000000000000000	2.000000000000000
2	0.577350269189626	1.000000000000000
3	0.774596669241483	0.555555555555556
	0.000000000000000	0.888888888888889
4	0.861136311594053	0.347854845137454
	0.339981043584856	0.652145154862546
5	0.906179845938664	0.236926885056189
	0.538469310105683	0.478628670499366
	0.000000000000000	0.568888888888889
6	0.932469514203152	0.171324492379170
	0.661209386466265	0.360761573048139
	0.238619186083197	0.467913934572691

La manière la plus efficace et la plus précise d'intégrer sur un intervalle donné (et borné!) un polynôme de degré 2n+1 dont on connaît les coefficients est d'utiliser une règle de Gauss-Legendre avec n+1 points.

Vrai ou Faux ?

Evaluation S5 : vrai ou faux…