# Annexe I

# Éléments de calcul tensoriel

**MOTS CLÉS**

Forme multilinéaire. Tenseur. Variance.
Produit tensoriel. Décomposition.
Contraction. Produit contracté.
Invariants.
Tenseurs euclidiens.
Champ de tenseurs. Gradient. Divergence.
Coordonnées curvilignes.

# *En bref...*

**Étant donné un espace vectoriel $E$ et son espace dual $E^*$, la notion de tenseur est liée à l'étude des formes multilinéaires sur un espace $F$ produit de $E$ et de $E^*$ de degré $n$ quelconque** (section 1).

**Une méthode évidente pour produire de telles formes consiste à considérer les formes dont la valeur est donnée par le produit des valeurs prises par $n$ formes linéaires sur $E$ ou sur $E^*$. Une forme $n$-linéaire sur $F$ ainsi obtenue est appelée *tenseur décomposé* d'ordre $n$, et on la note par le symbole $\otimes$ entre chacune des formes sur $E$ ou sur $E^*$, qui sont elles-mêmes des éléments de $E^*$ ou de $E$ respectivement, qui la constituent** (section 2).

**Ce mode de construction ne suffit pas pour engendrer tout l'espace des formes $n$-linéaires sur $F$. Par contre il permet, par exemple à partir d'une base de $E$ et de la base duale dans $E^*$, de produire une base de l'espace vectoriel des formes $n$-linéaires sur $F$. Toutes les formes cherchées, appelées *tenseurs* (d'ordre $n$) sur $F$, sont engendrées à partir d'une telle base** (section 3). **L'espace vectoriel correspondant est identifié à un produit tensoriel d'ordre $n$ de $E$ et de $E^*$.**

**On définit sur les tenseurs deux opérations fondamentales.**

**D'une part le *produit tensoriel*, noté $\otimes$, qui permet, à partir de deux tenseurs d'ordres $p$ et $q$ définis sur des espaces $F_p$ et $F_q$, de constituer un tenseur d'ordre $(p+q)$ sur l'espace $F$ produit de $F_p$ par $F_q$ (ou inversement) en généralisant la procédure de construction des tenseurs décomposés à partir des éléments de $E^*$ et de $E$** (section 2).

**D'autre part la *contraction* qui permet, sous certaines conditions, à partir d'un tenseur d'ordre $n$ sur $F$, d'obtenir des tenseurs d'ordre $(n-2)$, $(n-4)$, ... sur des espaces $F_{n-2}, \ldots$** (section 3).

**Ces opérations peuvent être combinées : on obtient le *produit contracté* de deux tenseurs, dont la mécanique fait grand usage** (section 4).

**On sait que pour un espace $E$ muni d'une structure euclidienne, on met en évidence un isomorphisme dit « canonique » qui permet d'identifier $E$ et son dual $E^*$ en substituant au produit de dualité le produit scalaire dans $E$. Cet isomorphisme permet aussi de montrer que les espaces pro-**

**duits de** $E$ **et de** $E^*$ **de degré** $n$ **quelconque sont isomorphes entre eux. Il en résulte l'isomorphisme des espaces de tenseurs sur ces espaces. De la même façon que l'on identifie une forme linéaire sur** $E$**, élément de** $E^*$**, à son vecteur associé, élément de** $E$**, par l'isomorphisme canonique, introduisant ainsi la notion de vecteur euclidien, on identifiera les** $2^n$ **tenseurs d'ordre** $n$ **qui se correspondent par l'isomorphisme à celui d'entre eux qui est élément du produit tensoriel d'ordre** $n$ **de** $E$ **par lui-même : c'est le** ***tenseur euclidien*** **correspondant. Les deux opérations fondamentales introduites auparavant sont transportées de façon cohérente sur les tenseurs euclidiens. La contraction est alors toujours possible ; les règles opératoires en sont simplifiées et s'expriment toutes au moyen du produit scalaire dans** $E$ (section 5).

**Une application importante du calcul tensoriel apparaît dans la possibilité de généraliser à des ordres supérieurs les notions de gradient et de divergence. Pour un champ de tenseurs d'ordre** $n$**, défini sur un espace affine dont** $E$ **est l'espace vectoriel associé, le** ***gradient*** **en un point est le tenseur d'ordre** $(n+1)$ **dont le produit contracté par un vecteur élémentaire de** $E$ **(élément différentiel) donne la variation différentielle correspondante du champ de tenseurs en ce point. La** ***divergence*** **est obtenue par contraction du tenseur gradient : c'est un tenseur d'ordre** $(n-1)$**. La** ***formule de la divergence*** **transformant une intégrale de surface de type « flux » en intégrale de volume est étendue aux tenseurs d'ordre quelconque** (section 6).

## Principales notations

| Notation | Signification | 1ère formule |
|---|---|---|
| $<\,,\,>$ | produit de dualité | (1.2) |
| $\otimes$ | produit tensoriel | (2.1) |
| $\delta_i^j$ | symbole de Kronecker | (2.6) |
| $\mathcal{T} \equiv T^i{}_j{}^k \underline{e}_i \otimes e^{*j} \otimes \underline{e}_k$ | tenseur | (3.3) |
| det | déterminant | (3.16) |
| tr | trace | (3.17) |
| $^t$ | symbole de la transposition | (3.18) |
| $\odot$ | produit contracté sur le dernier indice du tenseur qui précède $\odot$ et le premier indice du tenseur qui le suit | (4.3) |
| $\odot\!\!\!\!:$ | produit doublement contracté sur les deux indices adjacents à $\odot\!\!\!\!:$, et sur les deux indices adjacents à ceux-ci | (4.14) |
| $G$ | tenseur métrique | (5.1) |
| $.$ | produit scalaire | (5.2) |
| $.$ | produit contracté pour les tenseurs euclidiens : même règle d'indices que pour $\odot$ | (5.32) |
| $:$ | produit doublement contracté pour les tenseurs euclidiens : même règle d'indices que pour $\odot\!\!\!\!:$ | (5.36) |
| $\underline{\underline{\underline{T}}}$ | tenseur euclidien | § 5.8 |
| $\underline{\underline{\tilde{T}}}$ | matrice de $\underline{\underline{T}}$ dans une base **orthonormée** | § 5.9 |
| $\mathrm{D}_{\underline{w}}$ | dérivée selon le vecteur $\underline{w}$ | (6.3) |
| $\nabla$ | gradient | (6.4) |
| div | divergence | (6.8) |

# Éléments de calcul tensoriel

L'objectif poursuivi dans ce texte est, sans souci de formalisme mathématique disponible dans d'autres ouvrages, de donner au lecteur les connaissances élémentaires suffisantes pour l'utilisation du calcul tensoriel dans la présentation proposée de la mécanique des milieux continus tridimensionnels. Cette introduction au calcul tensoriel est articulée en trois parties. La première est consacrée à la définition des tenseurs sur un espace vectoriel et à la présentation de leurs propriétés et des opérations essentielles du calcul tensoriel ; elle occupe les sections 1 à 4. La deuxième partie traite des tenseurs euclidiens : c'est la section 5. La troisième aborde la question des champs de tenseurs et de la dérivation de ces champs.

Du point de vue des applications immédiates dans l'ouvrage, ce sont les deuxième et troisième parties (en ce qui y concerne les tenseurs euclidiens) auxquelles il sera fait essentiellement appel : c'est d'ailleurs pour cette raison que le récapitulatif des formules essentielles disponible à la fin de cette annexe ne concerne que les résultats relatifs aux tenseurs euclidiens. Il a pourtant semblé préférable d'adopter une présentation initiale indépendante de la structure euclidienne de l'espace dans le but de mieux dégager l'intervention de la dualité.

## 1 Tenseurs sur un espace vectoriel

### 1.1 Définition

$E$ désignant un espace vectoriel de dimension finie $n$ (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $E^*$ le dual de $E$, on appelle ***tenseur*** $p$ ***fois contravariant et*** $q$ ***fois covariant*** toute ***forme multilinéaire*** $\mathcal{T}$ définie sur $(E^*)^p \times (E)^q$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| En notant | $u^{*(i)}$ | $p$ vecteurs quelconques de $E^*$ | $i = 1, \ldots, p$ |
| | $\underline{v}_{(j)}$ | $q$ vecteurs quelconques de $E$ | $j = 1, \ldots, q$ |

une telle forme associe aux vecteurs arguments $u^{*(i)}$ et $\underline{v}_{(j)}$ pris dans cet ordre, le scalaire :

$$\mathcal{T}(u^{*(1)}, \ldots, u^{*(p)}, \underline{v}_{(1)}, \ldots, \underline{v}_{(q)}) . \tag{1.1}$$

La somme $(p + q)$ est appelée ***ordre du tenseur***. Les nombres $p$ et $q$ sont les ***variances***. L'ordre dans lequel les vecteurs arguments apparaissent dans $\mathcal{T}$ doit être spécifié dans la définition de la forme : ici on a choisi, pour simplifier, d'ordonner les arguments en prenant d'abord les vecteurs de $E^*$ puis ceux de $E$.

Il est clair que l'ensemble des tenseurs de variances $p$ et $q$ déterminées, et correspondant au même ordre des vecteurs arguments, admet une structure d'espace vectoriel.

On peut examiner, à titre d'exemples, les cas des tenseurs du 1^er^ ordre et du 2^ème^ ordre dont l'usage est très fréquent en mécanique des milieux continus.

***Notation :***

On convient de noter par :

$$< u^* \, , \underline{v} > = < \underline{v} \, , u^* > \tag{1.2}$$

le produit de dualité entre un vecteur $u^*$ de $E^*$ et un vecteur $\underline{v}$ de $E$.

## 1.2 Tenseurs du 1er ordre

### Tenseur contravariant du 1er ordre

C'est, par définition, une forme linéaire $\mathcal{T}$ sur $E^*$ que l'on identifie classiquement par le produit de dualité à un vecteur $\underline{T}$ de $E$. On écrit :

$$\forall u^* \in E^* \; , \; \mathcal{T}(u^*) = < \underline{T} \, , u^* > \; . \tag{1.3}$$

***Les tenseurs du 1er ordre contravariants sont les vecteurs de $E$.***

### Tenseur covariant du 1er ordre

C'est, par définition, une forme linéaire sur $E$ qui est donc identifiée à un vecteur de $E^*$.

***Les tenseurs du 1er ordre covariants sont les vecteurs de $E^*$.***

## 1.3 Tenseurs du 2ème ordre

### Tenseur covariant du 2ème ordre

C'est une forme bilinéaire sur $E \times E$.

En mécanique des milieux continus, les tenseurs de déformation et de taux de déformation sont des tenseurs 2 fois covariants (cf. chapitres II et III).

### Tenseur contravariant du 2ème ordre

C'est une forme bilinéaire sur $E^* \times E^*$.

En mécanique des milieux continus, les tenseurs de contrainte sont des tenseurs 2 fois contravariants (cf. chapitre V).

### Tenseur mixte contravariant-covariant du 2ème ordre

C'est une forme bilinéaire $\mathcal{T}$ sur $E^* \times E$ associant à deux vecteurs quelconques $u^*$ de $E^*$ et $\underline{v}$ de $E$ le scalaire $\mathcal{T}(u^* \, , \underline{v})$.

Elle permet de définir, par dualité, une ***application linéaire de $E$ dans $E$***, soit

$\varphi$, en écrivant :

$$(1.4) \qquad \forall\, u^* \in E^*\ ,\ \forall\, \underline{v} \in E\ ,\ \mathcal{T}(u^*\,,\,\underline{v}) = < u^*\,,\,\varphi(\underline{v}) > \ .$$

***Réciproquement***, la donnée d'une application linéaire $\varphi$ de $E$ dans $E$ permet de définir un tenseur mixte $\mathcal{T}$ du deuxième ordre contravariant-covariant par la formule (1.4). Ce type de définition se rencontre fréquemment en mécanique des milieux continus.

En particulier on définira le tenseur inverse du tenseur $\mathcal{T}$, noté $\mathcal{T}^{-1}$ comme le tenseur associé à l'application linéaire réciproque de $\varphi$ si elle existe, soit $\varphi^{-1}$ ; c'est encore un tenseur mixte contravariant-covariant :

$$(1.5) \qquad \forall\, u^* \in E^*\ ,\ \forall\, \underline{v} \in E\ ,\ \mathcal{T}^{-1}(u^*\,,\,\underline{v}) = < u^*\,,\,\varphi^{-1}(\underline{v}) > \ .$$

Une démarche analogue peut être suivie en se plaçant du point de vue des applications linéaires de $E^*$ dans $E^*$.

# 2 Produit tensoriel de tenseurs

## 2.1 Définition

Soient, à titre d'exemple, les deux tenseurs :

$\mathcal{T}'$, forme trilinéaire sur $E \times E^* \times E$,
$\mathcal{T}''$, forme bilinéaire sur $E^* \times E$,

on définit le tenseur $\mathcal{T}$, produit tensoriel de $\mathcal{T}'$ par $\mathcal{T}''$, noté $\mathcal{T} = \mathcal{T}' \otimes \mathcal{T}''$ par :

$$(2.1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \forall\, \underline{v}_{(1)}\,,\,\underline{v}_{(2)}\,,\,\underline{v}_{(3)} \in E\ ,\ \forall\, u^{*(1)}\,,\,u^{*(2)} \in E^* \\ \mathcal{T}(\underline{v}_{(1)}\,,\,u^{*(1)}\,,\,\underline{v}_{(2)}\,,\,u^{*(2)}\,,\,\underline{v}_{(3)}) = \mathcal{T}'(\underline{v}_{(1)}\,,\,u^{*(1)}\,,\,\underline{v}_{(2)})\mathcal{T}''(u^{*(2)}\,,\,\underline{v}_{(3)})\ . \end{array} \right.$$

L'opération « produit tensoriel » est distributive (à gauche et à droite) par rapport à l'addition, et associative. ***Elle n'est pas commutative.***

## 2.2 Exemples

### Produit tensoriel de 2 vecteurs de $E$

Soient $\underline{a}\,,\,\underline{b} \in E \quad \mathcal{T} = \underline{a} \otimes \underline{b}$ est défini par (2.1) ; il vient :

$$(2.2) \qquad \forall\, u^{*(1)}\ ,\ u^{*(2)} \in E^*\ ,\ (\underline{a} \otimes \underline{b})(u^{*(1)}\ ,\ u^{*(2)}) = < \underline{a}\ ,\ u^{*(1)} >< \underline{b}\ ,\ u^{*(2)} > \ .$$

Ainsi $\mathcal{T} = \underline{a} \otimes \underline{b}$ est une forme bilinéaire sur $(E^*)^2$.

### Produit tensoriel d'un vecteur de $E$ par un vecteur de $E^*$

Soient $\underline{a} \in E$ et $b^* \in E^*$ , $\mathcal{T} = \underline{a} \otimes b^*$ est défini par (2.1) ; il vient :

$$(2.3) \qquad \forall\, u^* \in E^*\ ,\ \forall\, \underline{v} \in E\ ,\ (\underline{a} \otimes \underline{b}^*)(u^*\,,\,\underline{v}) = < \underline{a}\,,\,u^* >< \underline{v}\,,\,b^* >$$

et l'on voit que $\mathcal{T} = \underline{a} \otimes b^*$ est un tenseur mixte contravariant-covariant.

L'application linéaire $\varphi$ de $E$ dans $E$ correspondante, définie par (1.4), peut ici être explicitée ; d'après (2.3), $\mathcal{T}(u^*\,,\,\underline{v})$ s'écrit aussi :

$$\mathcal{T}(u^*\,,\,\underline{v}) =< u^*\,,\,\underline{a} < \underline{v}\,,\,b^* >>$$

d'où :

$$\forall \underline{v} \in E\ ,\ \varphi\,(\underline{v}) =< \underline{v}\,,\,b^* > \underline{a} \tag{2.4}$$

## 2.3 Tenseurs décomposés

Soit $\mathcal{T}$ un tenseur d'ordre $n = p + q$, $p$-contravariant et $q$-covariant. On dit que $\mathcal{T}$ est ***décomposé*** s'il peut être mis sous la forme du produit tensoriel, ***dans l'ordre voulu***, de $p$ vecteurs de $E$ par $q$ vecteurs de $E^*$.

Désignant par $\{\underline{e}_k\}$ une base de $E$, on définit $\{e^{*k}\}$ la base duale de celle-ci dans $E^*$ c'est-à-dire telle que

$$< \underline{e}_i\,,\,e^{*j} >= \delta_i^j \tag{2.5}$$

où $\delta_i^j$, symbole de Kronecker, prend les valeurs :

$$\delta_i^j = 1 \quad \text{si} \quad i = j\ ,\ \delta_i^j = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j\ . \tag{2.6}$$

On peut alors décomposer les vecteurs de $E$ et $E^*$ sur ces bases suivant les formules :

$$\underline{v} = v^\ell\,\underline{e}_\ell \tag{2.7}$$

$$u^* = u_\ell\,e^{*\ell} \tag{2.8}$$

dans lesquelles on adopte la ***convention dite des indices « muets » (ou répétés) c'est-à-dire qu'il y a sommation par rapport aux couples d'indices répétés placés l'un en haut et l'autre en bas***(1).

Considérant alors, à titre d'exemple, le tenseur décomposé :

$$\mathcal{T} = \underline{e}_i \otimes e^{*j} \otimes \underline{e}_k \tag{2.9}$$

on a :

$$\forall\, u^{*(1)}\ ,\ u^{*(2)} \in E^*\ ,\ \forall \underline{v} \in E\ ,\ (\underline{e}_i \otimes e^{*j} \otimes \underline{e}_k)(u^{*(1)}\,,\,\underline{v}\,,\,u^{*(2)}) = u_i^{(1)} v^j u_k^{(2)}\ . \tag{2.10}$$

(1) La convention sur la position des indices est d'usage général. Elle présente l'intérêt, comme on le verra dans la suite, par son caractère systématique de faciliter la lecture et l'écriture des formules (cf. par exemple § 3.2).

# 3 Décomposition d'un tenseur

## 3.1 Définition

Soit, à titre d'exemple, $\mathcal{T}$ un tenseur d'ordre 3, 1-contravariant, 1-covariant et 1-contravariant.

Avec les bases $\{\underline{e}_k\}$ et $\{e^{*k}\}$ introduites ci-dessus, on pose

$$\mathcal{T}(e^{*i}\,,\,\underline{e}_j\,,\,e^{*k}) = T^i{}_j{}^k\ ,\ i,j,k=1,\ldots,n\ . \tag{3.1}$$

On en déduit, $\mathcal{T}$ étant linéaire, que :

$$\left\{\begin{array}{l} \forall\, u^{*(1)}\,,\,u^{*(2)}\ \in\ E^*\,,\ \forall\,\underline{v}\in\ E \\ \mathcal{T}(u^{*(1)}\,,\,\underline{v}\,,\,u^{*(2)}) = u_i^{(1)}\,v^j\,u_k^{(2)}\mathcal{T}(e^{*i}\,,\,\underline{e}_j\,,\,e^{*k}) \\ \text{ou encore} \\ \mathcal{T}(u^{*(1)}\,,\,\underline{v}\,,\,u^{*(2)}) = u_i^{(1)}\,v^j\,u_k^{(2)}T^i{}_j{}^k \end{array}\right. \tag{3.2}$$

avec la convention de sommation sur les indices répétés qui sera sous-entendue dans toute la suite sauf mention explicite du contraire.

Par comparaison de (3.2) avec (2.10) on obtient les formules essentielles :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \mathcal{T} \equiv T^i{}_j{}^k\,\underline{e}_i\otimes e^{*j}\otimes\underline{e}_k & (3.3) \\ T^i{}_j{}^k = \mathcal{T}(e^{*i}\,,\,\underline{e}_j\,,\,e^{*k}) & (3.4) \end{array}}$$

La formule (3.3) donne la décomposition du tenseur $\mathcal{T}$ 1-contravariant, 1-covariant, 1-contravariant quelconque sur les $n^3$ tenseurs décomposés $\underline{e}_i\otimes e^{*j}\otimes\underline{e}_k\,(i\,,\,j\,,\,k = 1,\ldots,n)$.

De plus la formule (2.10) assure l'indépendance de ces $n^3$ tenseurs décomposés. En effet on remarque que l'on peut écrire compte tenu de (2.5) :

$$\forall\,i\,,\,j\,,\,k\,,\,p\,,\,q\,,\,r=1,\ldots,n\ ,\ (\underline{e}_i\otimes e^{*j}\otimes\underline{e}_k)(e^{*p}\,,\,\underline{e}_q\,,\,e^{*r}) = \delta_i^p\,\delta_q^j\,\delta_k^r\ . \tag{3.5}$$

Ainsi les tenseurs décomposés $\underline{e}_i\otimes e^{*j}\otimes\underline{e}_k\,(i\,,\,j\,,\,k=1,\ldots,n)$ constituent une ***base de l'espace vectoriel*** des tenseurs $\mathcal{T}$ dont la variance a été indiquée plus haut. Les $T^i{}_j{}^k$ sont les ***composantes*** de $\mathcal{T}$ dans cette base.

Désignant alors par $u^{*(1)}\,,\,u^{*(2)}\,,\,\underline{v}$, des vecteurs arguments quelconques de $\mathcal{T}$, décomposés selon (2.7) et (2.8), on obtient immédiatement, par application de (2.10) et (3.3) la valeur de $\mathcal{T}(u^{*(1)}\,,\,\underline{v}\,,\,u^{*(2)})$ :

$$\mathcal{T}(u^{*(1)}\,,\,\underline{v}\,,\,u^{*(2)}) = T^i{}_j{}^k\,u_i^{(1)}\,v^j\,u_k^{(2)}\ . \tag{3.6}$$

Les résultats énoncés dans ce cas particulier de tenseurs $\mathcal{T}$ sont évidemment de portée générale.

**Remarque**

La notion de produit tensoriel de tenseurs a été introduite au paragraphe 2.1.

Une présentation mathématique plus générale définit la notion de produit tensoriel d'espaces. On peut alors montrer que l'espace vectoriel des tenseurs $\mathcal{T}$ choisis comme exemples pour la démonstration qui précède de la décomposition d'un tenseur est isomorphe au produit tensoriel d'espaces vectoriels $E$ et $E^*$ noté $E \otimes E^* \otimes E$. Il est commode d'identifier ces deux espaces, écrivant ainsi pour les tenseurs $\mathcal{T}$ ci-dessus :

$$\mathcal{T} \in \; E \otimes E^* \otimes E \;,$$

notation cohérente avec la formule de décomposition (3.3). Cette écriture sera adoptée de manière générale dans toute la suite.

## 3.2 Changement de base

On considère encore, à titre d'exemples, les mêmes tenseurs $\mathcal{T}$ de l'espace $E \otimes E^* \otimes E$.

On suppose connus, outre les bases duales $\{\underline{e}_k\}$ et $\{e^{*k}\}$ de $E$ et de $E^*$ utilisées au paragraphe précédent, un autre couple de bases duales de ces mêmes espaces, soit $\{\underline{e}'_k\}$ et $\{e^{*\prime k}\}$, et l'on définit la nouvelle base $\{\underline{e}'_k\}$ de vecteurs de $E$ dans l'ancienne base $\{\underline{e}_k\}$ par la formule :

$$\underline{e}'_i = \alpha_i^k \, \underline{e}_k \tag{3.7}$$

($\alpha_i^k$ : composantes de la nouvelle base de $E$ dans l'ancienne base). L'inversion de cette formule exprime l'ancienne base dans la nouvelle :

$$\underline{e}_k = \beta_k^j \, \underline{e}'_j \tag{3.8}$$

avec la relation

$$\alpha_i^k \beta_k^j = \delta_i^j \tag{3.9}$$

(qui rappelle que les matrices de coefficients $\alpha_i^k$ et $\beta_k^j$ sont évidemment inverses).

Les relations entre la nouvelle et l'ancienne base duale dans $E^*$ s'obtiennent par identification à partir des formules précédentes dans l'expression même du produit de dualité :

$$< e^{*\prime j} \, , \, \underline{e}'_\ell >= \delta_\ell^j \;,$$

d'où l'expression de la nouvelle base duale dans l'ancienne :

$$e^{*\prime j} = \beta_k^j \, e^{*k} \tag{3.10}$$

et la formule inverse :

$$e^{*k} = \alpha_i^k \, e^{*\prime i} \,. \tag{3.11}$$

Toutes ces formules de passage étant établies, on s'intéresse maintenant à la décomposition de $\mathcal{T}$ dans la base $\{\underline{e}'_i \otimes e^{*\prime j} \otimes \underline{e}'_k\}$ :

$$\mathcal{T} = T'^{i}{}_{j}{}^{k}\, \underline{e}'_i \otimes e^{*\prime j} \otimes \underline{e}'_k\,.$$

Les nouvelles composantes s'obtiennent sans difficulté en exploitant, dans (3.3), les formules (3.8) et (3.11) compte tenu de la distributivité du produit tensoriel de tenseurs. Il vient :

(3.12) $$\boxed{T'^{i}{}_{j}{}^{k} = \beta^i_\ell\, \alpha^m_j\, \beta^k_n\, T^{\ell}{}_{m}{}^{n}}$$

et les formules inverses :

(3.13) $$T^{i}{}_{j}{}^{k} = \alpha^i_\ell\, \beta^m_j\, \alpha^k_n\, T'^{\ell}{}_{m}{}^{n}\,.$$

L'application de ces formules au cas d'un tenseur du 1^er^ ordre $\mathcal{T} = T_i\, e^{*i}$ élément de $E^*$ forme linéaire sur $E$, c'est-à-dire 1-covariant (§ 1.2), fournit la relation :

$$T'_i = \alpha^\ell_i\, T_\ell$$

qui explique la terminologie : le tenseur est dit ***covariant*** parce que ses composantes, dont les indices sont ***inférieurs***, se transforment, dans le changement de base, comme la base primale elle-même, dont les vecteurs ont eux aussi des indices inférieurs.

Pour un tenseur du 1^er^ ordre de $E$, soit $\mathcal{T} = T^j\, \underline{e}_j$, on obtient :

$$T'^j = \beta^j_k\, T^k$$

qui explique, de la même manière, la terminologie de ***contravariance***.

On peut alors retenir la formule générale pour un tenseur $\mathcal{T}$ quelconque sous la forme : chaque covariance, indice inférieur, introduit un facteur « $\alpha$ » et chaque contravariance, indice supérieur, introduit un facteur « $\beta$ »[(2)].

## 3.3 Tenseurs mixtes du 2ème ordre

Soit $\mathcal{T}$ un élément de $E \otimes E^*$ et $\varphi$ l'application linéaire de $E$ dans $E$ qui lui est associée par (1.4). On désigne par $\varphi^i{}_j$ les ***coefficients de la matrice***[(3)] de $\varphi$ dans la base $\{\underline{e}_k\}$ de $E$, c'est-à-dire que :

(3.14) $$\forall\, \underline{v} = v^j\, \underline{e}_j\ ,\ \varphi(\underline{v}) = \varphi^i{}_j\, v^j\, \underline{e}_i\,.$$

Soient d'autre part $T^i{}_j$ les composantes de $\mathcal{T}$ dans la base $\{\underline{e}_m \otimes e^{*n}\}$ de $E \otimes E^*$. On a alors en appliquant (3.4) et (1.4) :

$$T^i{}_j = \mathcal{T}(e^{*i}\,,\, \underline{e}_j) = < e^{*i}\,,\, \varphi\,(\underline{e}_j) >$$

[(2)] Dans la pratique, lorsque l'on procède à de tels changements de bases, il est souvent plus commode, plutôt que d'appliquer la formule générale (3.12), de reproduire sur le cas particulier considéré le raisonnement qui permet de l'obtenir par identification.

[(3)] 1^er^ indice : ligne ; 2^ème^ indice : colonne.

d'où, avec (3.14) :

$$T^i{}_j = \varphi^i{}_j \qquad \forall\, i\,,\, j = 1, \dots, n\,. \tag{3.15}$$

Ainsi, les ***composantes de*** $\mathcal{T}$ dans la base $\{\underline{e}_m \otimes e^{*n}\}$ sont identiques aux coefficients de la matrice de l'application linéaire de $E$ dans $E$ associée à $\mathcal{T}$ dans la base $\{\underline{e}_k\}$.

Il s'ensuit que les composantes $T^i{}_j$ de $\mathcal{T}$ possèdent vis-à-vis des ***changements quelconques de bases*** $\{\underline{e}_k\}$ dans $E$, les bases $\{e^{*k}\}$ dans $E^*$ étant toujours les bases duales, les propriétés connues pour les coefficients de la matrice d'une application linéaire.

En particulier on sait que dans ces changements de base certaines expressions polynomiales sont ***invariantes***. On rappelle que $\det[\,\varphi^i{}_j\,]$ est un invariant, donc :

$$\det[\,T^i{}_j\,] = \det \mathcal{T} \text{ est un invariant}\,. \tag{3.16}$$

Il en va de même de tous les coefficients du polynôme caractéristique en $\lambda$ obtenu en écrivant l'invariance du déterminant de la matrice de l'application linéaire de $E$ dans $E$ définie par :

$$\forall\, \underline{v} \in E \quad \to \quad \varphi(\underline{v}) - \lambda \underline{v} \in E \quad (\lambda \text{ scalaire quelconque})\,.$$

Ces coefficients constituent une base de $n$ invariants polynomiaux indépendants de degrés 1 à $n$ en $\varphi^i{}_j$. Parmi ceux-ci, outre $\det[\,\varphi^i{}_j\,]$ de degré $n$, on trouve $\operatorname{tr}\,[\,\varphi^i{}_j\,]$ de degré 1 :

$$T'^i{}_i = \operatorname{tr}\, \mathcal{T} \text{ est un invariant} \tag{3.17}$$

(on le vérifie d'ailleurs directement sans difficulté puisque par (3.12) on a : $T'^i{}_i = \beta^i_j\, \alpha^k_i\, T^j{}_k = \delta^k_j\, T^j{}_k = T^k{}_k$). Cette opération « trace » est un cas particulier de la contraction étudiée dans la suite. De même on utilisera souvent en mécanique une base de $n$ invariants polynomiaux indépendants de degrés 1 à $n$, autre que celle évoquée ci-dessus, obtenue par contraction (cf. § 4.6).

On introduit aussi le tenseur ${}^t\mathcal{T}$ ***transposé*** de $\mathcal{T}$ ; c'est l'***élément de*** $E^* \otimes E$ défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall\, u^* \in E^*\,,\, \forall \underline{v} \in E \\ {}^t\mathcal{T}(\underline{v}\,,\, u^*) = \mathcal{T}(u^*\,,\, \underline{v}) \end{array} \right. \tag{3.18}$$

${}^t\mathcal{T}$ se met sous la forme :

$${}^t\mathcal{T} = ({}^tT)_i{}^j\, e^{*i} \otimes \underline{e}_j$$

et l'on a, par (3.4) et (3.18), la relation :

$$({}^tT)_i{}^j = T^j{}_i\,. \tag{3.19}$$

Si $\mathcal{T}$ est un tenseur décomposé $\mathcal{T} = a^* \otimes \underline{b}$, on a évidemment : ${}^t\mathcal{T} = \underline{b} \otimes a^*$.

## 3.4 Tenseurs du 2$^{\text{ème}}$ ordre 2 fois contravariants ou 2 fois covariants

On considère à titre d'exemple les tenseurs du 2$^{\text{ème}}$ ordre 2 fois covariants.

• Tenseurs symétriques.

Par définition, $\mathcal{T} \in E^* \otimes E^*$ est symétrique si l'on a :

$$\forall \underline{v}', \underline{v}'' \in E\ ,\ \mathcal{T}(\underline{v}', \underline{v}'') = \mathcal{T}(\underline{v}'', \underline{v}')\ ;$$

d'où, pour toute base $\{\underline{e}_i\}$ de $E$ et base duale $\{e^{*j}\}$ de $E^*$, d'après (3.3) et (3.4) :

$$\mathcal{T} = T_{ij}\, e^{*i} \otimes e^{*j}\ ,\ T_{ij} = T_{ji}\ . \tag{3.20}$$

• Tenseurs antisymétriques.

De même, $\mathcal{T} \in E^* \otimes E^*$ est antisymétrique si l'on a

$$\forall \underline{v}', \underline{v}'' \in E\ ,\ \mathcal{T}(\underline{v}', \underline{v}'') = -\mathcal{T}(\underline{v}'', \underline{v}')$$

d'où, comme ci-dessus :

$$\mathcal{T} = T_{ij}\, e^{*i} \otimes e^{*j}\ ,\ T_{ij} = -T_{ji}\,. \tag{3.21}$$

• Tout tenseur $\mathcal{T} \in E^* \otimes E^*$ peut être mis, de façon unique, sous la forme de la somme d'un tenseur symétrique $\mathcal{T}_{\text{s}}$ et d'un tenseur antisymétrique $\mathcal{T}_{\text{a}}$ de $E^* \otimes E^*$ :

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\text{a}} + \mathcal{T}_{\text{s}}\,. \tag{3.22}$$

Ces tenseurs $\mathcal{T}_{\text{s}}$ et $\mathcal{T}_{\text{a}}$ sont en effet définis de manière unique par :

$$\left\{\begin{array}{l} \forall \underline{v}', \underline{v}'' \in E\ ,\ \mathcal{T}_{\text{s}}(\underline{v}', \underline{v}'') = \dfrac{1}{2}\big(\mathcal{T}(\underline{v}', \underline{v}'') + \mathcal{T}(\underline{v}'', \underline{v}')\big) \\ \forall \underline{v}', \underline{v}'' \in E\ ,\ \mathcal{T}_{\text{a}}(\underline{v}', \underline{v}'') = \dfrac{1}{2}\big(\mathcal{T}(\underline{v}', \underline{v}'') - \mathcal{T}(\underline{v}'', \underline{v}')\big)\ , \end{array}\right. \tag{3.23}$$

qui implique, pour toute base $\{\underline{e}_j\}$ de $E$ et base duale $\{e^{*k}\}$ de $E^*$ :

$$(T_{\text{s}})_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) \quad (T_{\text{a}})_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji})\,. \tag{3.24}$$

• Les mêmes résultats, aux positions supérieures des indices près, sont valables pour les tenseurs 2 fois contravariants.

## 3.5 Composantes d'un produit tensoriel

Soient, à titre d'exemple, $\mathcal{T}' \in E^* \otimes E \otimes E^*$ et $\mathcal{T}'' \in E \otimes E^*$ :

$$\mathcal{T}' = T'_i{}^j{}_k\, e^{*i} \otimes \underline{e}_j \otimes e^{*k}$$
$$\mathcal{T}'' = T''^{\ell}{}_m\, \underline{e}_\ell \otimes e^{*m}$$

alors on a évidemment, pour $\mathcal{T} = \mathcal{T}' \otimes \mathcal{T}''$ :

$$\mathcal{T} = T_i{}^j{}_k{}^\ell{}_m \, e^{*i} \otimes \underline{e}_j \otimes e^{*k} \otimes \underline{e}_\ell \otimes e^{*m}$$

avec :

$$T_i{}^j{}_k{}^\ell{}_m = T'{}_i{}^j{}_k T''{}^\ell{}_m \,. \tag{3.25}$$

Ainsi, dans le cas particulier d'un tenseur $\mathcal{T}$ ***décomposé*** tel que :

$$\mathcal{T} = \underline{a} \otimes b^* \otimes \underline{c} \otimes \underline{d}$$

on aura :

$$T^i{}_j{}^{k\ell} = a^i \, b_j \, c^k \, d^\ell \,. \tag{3.26}$$

# 4 Contraction

## 4.1 Définition de la contraction d'un tenseur

Soit, à titre d'exemple, un tenseur $\mathcal{T}$ élément de $E \otimes E^* \otimes E^* \otimes E$.

Soit $\{\underline{e}_k\}$ une base de $E$ et $\{e^{*j}\}$ la base duale de $E^*$.

Alors l'élément $\mathcal{T}_c$ défini par :

$$\forall \, \underline{v} \in E \,, \forall \, u^* \in E^* \,, \; \mathcal{T}_c(u^* , \underline{v}) = \mathcal{T}(u^* , \underline{e}_i , \underline{v} , e^{*i})^{(4)} \tag{4.1}$$

est ***indépendant du choix de la base*** $\{\underline{e}_k\}$ et ***est un tenseur*** élément de $E \otimes E^*$.

En effet $\{\underline{e}'_k\}$ désignant une autre base de $E$, on a avec les notations du paragraphe 3.2 :

$$\mathcal{T}(u^* , \underline{e}'{}_i , \underline{v} , e^{*\prime i}) = \alpha_i^j \, \beta_k^i \, \mathcal{T}(u^* , \underline{e}_j , \underline{v} , e^{*k})$$

d'où, d'après (3.9) :

$$\mathcal{T}(u^* , \underline{e}'{}_i , \underline{v} , e^{*\prime i}) = \mathcal{T}(u^* , \underline{e}_j , \underline{v} , e^{*j}) \,.$$

L'élément $\mathcal{T}_c$, défini par (4.1) est donc bien ***intrinsèque*** : c'est une forme bilinéaire sur $E^* \times E$, c'est-à-dire un tenseur 1-contravariant 1-covariant.

Ce tenseur $\mathcal{T}_c$ est dit ***contracté*** de $\mathcal{T}$ sur les vecteurs arguments 2 et 4, ou sur les indices 2 et 4. On remarquera que la ***contraction ne peut se faire que sur des indices correspondant à des vecteurs arguments pris l'un dans*** $E$ ***l'autre dans*** $E^*$***.***

Du point de vue des composantes, on vérifiera sans peine que l'on a :

$$(T_c)^i{}_j = T^i{}_{kj}{}^k \tag{4.2}$$

(sommation sur les indices en position 2 et 4 situés l'un en bas et l'autre en haut).

La définition donnée sur cet exemple est générale. ***La contraction d'un tenseur d'ordre*** $n$ ***et de variances*** $p$ et $q$ ***conduit à un tenseur d'ordre*** $(n-2)$ ***et de variances*** $(p-1)$ et $(q-1)$.

---

(4) Bien remarquer la sommation sur les indices répétés.

## 4.2 Multiplication contractée

La multiplication contractée de deux tenseurs $\mathcal{T}''$ et $\mathcal{T}'$ consiste à effectuer le produit tensoriel $\mathcal{T} = \mathcal{T}'' \otimes \mathcal{T}'$ que l'on contracte ensuite suivant un indice de $\mathcal{T}''$ et un indice de $\mathcal{T}'$ de variance contraire.

Le cas le plus courant est celui où le produit tensoriel $\mathcal{T} = \mathcal{T}'' \otimes \mathcal{T}'$ est contracté ***sur le dernier indice de $\mathcal{T}''$ et le premier indice de $\mathcal{T}'$***, sous réserve bien entendu que cette opération soit possible c'est-à-dire que les variances correspondantes soient contraires. Le résultat de cette multiplication contractée sera noté :

(4.3) $$\mathcal{T}_c = \mathcal{T}'' \odot \mathcal{T}' \, .$$

L'opération (4.3) se rencontre fréquemment en mécanique et on en examinera dans la suite quelques cas particuliers.

On remarque que la multiplication contractée est distributive à gauche et à droite par rapport à l'addition.

**Produit contracté de $\underline{a} \in E$ et $b^* \in E^*$**

On a :
$$\mathcal{T} = \underline{a} \otimes b^* = a^i \, b_j \, \underline{e}_i \otimes e^{*j}$$
d'où :
$$\mathcal{T}_c = \underline{a} \odot b^* = a^i \, b_i$$
qui n'est autre que le produit de dualité $< \underline{a} \, , \, b^* >$ :

(4.4) $$\underline{a} \odot b^* = < \underline{a} \, , \, b^* > \; .$$

**Produit contracté de $\mathcal{T} \in E \otimes E^*$ et $\underline{v} \in E$**

Ici :
$$\mathcal{T} \otimes \underline{v} = T^i{}_j \, v^k \, \underline{e}_i \otimes e^{*j} \otimes \underline{e}_k$$
d'où :
$$\mathcal{T} \odot \underline{v} = T^i{}_j \, v^j \, \underline{e}_i$$
qui n'est autre que le vecteur de $E$ image de $\underline{v}$ par l'application linéaire $\varphi$ associée au tenseur mixte du deuxième ordre donné :

(4.5) $$\mathcal{T} \odot \underline{v} = \varphi(\underline{v}) \, .$$

On remarquera aussi que si l'on considère le produit tensoriel de $\underline{v}$ et ${}^t\mathcal{T}$ soit $\underline{v} \otimes {}^t\mathcal{T}$, sa contraction conduit au résultat :

(4.6) $$\underline{v} \odot {}^t\mathcal{T} = \mathcal{T} \odot \underline{v} = \varphi(\underline{v}) \, .$$

### Produit contracté de deux tenseurs mixtes du 2ème ordre

Soient $\mathcal{T}'$ et $\mathcal{T}'' \in E \otimes E^*$, $\varphi'$ et $\varphi''$ les applications linéaires de $E$ dans $E$ correspondantes. On vérifie sans difficulté que le produit contracté

$$\mathcal{T}_c = \mathcal{T}'' \odot \mathcal{T}'$$

est, lui aussi, un tenseur mixte du deuxième ordre, élément de $E \otimes E^*$ et que, si l'on désigne $\varphi_c$ l'application linéaire de $E$ dans $E$ associée à $\mathcal{T}_c$, on a :

$$(\varphi_c)^i{}_j = (T_c)^i{}_j = T''^i{}_k \, T'^k{}_j = \varphi''^i{}_k \, \varphi'^k{}_j \, .$$

qui montre que $\varphi_c$ est le produit des applications linéaires $\varphi'$ et $\varphi''$ :

$$\varphi_c = \varphi'' \circ \varphi' \, . \tag{4.7}$$

On en déduit aussi le résultat :

$$\forall \underline{v} \in E \, , \quad (\mathcal{T}'' \odot \mathcal{T}') \odot \underline{v} = \mathcal{T}'' \odot (\mathcal{T}' \odot \underline{v}) \tag{4.8}$$

qui exprime l'associativité de la multiplication contractée dans ce cas et permet d'écrire, sans autre précision, des formules du type :

$$\mathcal{T}''' \odot \mathcal{T}'' \odot \mathcal{T}' \odot \underline{v} \, , \text{ etc} \, .$$

En particulier, soit $\mathcal{T} \in E \otimes E^*$ et $\mathcal{T}^{-1}$ le tenseur inverse défini au paragraphe 1.3. On a, par application immédiate de (4.8) :

$$\mathcal{T}^{-1} \odot \mathcal{T} = \mathcal{T} \odot \mathcal{T}^{-1} = \mathcal{I} \, , \tag{4.9}$$

où l'on désigne par $\mathcal{I}$ le tenseur de $E \otimes E^*$ associé à l'application identique de $E$ dans $E$.

Pour les composantes, on a évidemment :

$$T^i{}_j (T^{-1})^j{}_k = \delta^i_k \, . \tag{4.10}$$

Enfin, il est immédiat de vérifier à partir de (4.6) et (4.8) que, si $\mathcal{T}'$ et $\mathcal{T}''$ sont deux éléments de $E \otimes E^*$ on a :

$${}^t(\mathcal{T}' \odot \mathcal{T}'') = {}^t\mathcal{T}'' \odot {}^t\mathcal{T}' \, . \tag{4.11}$$

### Produit doublement contracté de $\mathcal{T} \in E^* \otimes E^*$, $\underline{v}' \in E$ et $\underline{v}'' \in E$

En se référant à la définition du symbole $\odot$ donnée plus haut (formule 4.3), on voit que la notation :

$$\mathcal{T}_c = \underline{v}' \odot \mathcal{T} \odot \underline{v}''$$

s'interprète sans ambiguité et correspond à la double contraction du tenseur $\mathbb{T} = \underline{v}' \otimes \mathcal{T} \otimes \underline{v}''$ sur ses indices 1 et 2 et sur ses indices 3 et 4.

On vérifie que $\mathcal{T}_c$ n'est autre que le scalaire :

$$\mathcal{T}_c = T_{ij} \, v'^i \, v''^j \, , \tag{4.12}$$

c'est-à-dire que, d'après (3.6) :

$$\underline{v}' \odot \mathcal{T} \odot \underline{v}'' = \mathcal{T}(\underline{v}' \, , \underline{v}'') \, . \tag{4.13}$$

## 4.3 Produit doublement contracté de deux tenseurs

$\mathcal{T}'$ et $\mathcal{T}''$ désignant deux tenseurs d'ordres supérieurs ou égaux à 2, on considère le produit tensoriel $\mathcal{T} = \mathcal{T}'' \otimes \mathcal{T}'$. Le produit doublement contracté, noté $\odot$, correspond à la double contraction de $\mathcal{T}$ ***sur le dernier indice de*** $\mathcal{T}''$ ***et le premier indice de*** $\mathcal{T}'$, puis ***sur l'avant dernier indice de*** $\mathcal{T}''$ ***et le second indice de*** $\mathcal{T}'$, si ces deux contractions sont possibles c'est-à-dire si les variances correspondantes sont effectivement contraires[(5)].

On écrit ainsi :

$$\mathcal{T}_c = \mathcal{T}'' \odot \mathcal{T}' . \tag{4.14}$$

Le produit doublement contracté est évidemment distributif, à gauche et à droite, par rapport à l'addition.

**Produit doublement contracté d'un tenseur 2 fois covariant et d'un tenseur 2 fois contravariant du 2$^{\text{ème}}$ ordre**

Soient deux tenseurs du deuxième ordre :

$$\mathcal{A} = a_{ij}\, e^{*i} \otimes e^{*j} \in E^* \otimes E^* \quad \text{et} \quad \mathcal{B} = b^{ij}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \in E \otimes E .$$

Pour ces deux tenseurs, le produit doublement contracté défini par (4.14) s'écrit :

$$\mathcal{T}_c = \mathcal{A} \odot \mathcal{B} = a_{ij}\, b^{ji} , \tag{4.15}$$

scalaire qui s'identifie aussi à :

$$\mathcal{A} \odot \mathcal{B} = \mathrm{tr}\, (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) . \tag{4.16}$$

On remarquera que, dans ce cas, le produit doublement contracté est commutatif :

$$\mathcal{A} \odot \mathcal{B} = \mathcal{B} \odot \mathcal{A} .$$

En application des résultats du paragraphe 3.4, on peut mettre chacun des tenseurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sous la forme de la somme de sa partie symétrique et de sa partie antisymétrique obtenues par la formule (3.23) :

$$\begin{cases} \mathcal{A} & = \mathcal{A}_{\mathrm{s}} + \mathcal{A}_{\mathrm{a}} \\ \mathcal{B} & = \mathcal{B}_{\mathrm{s}} + \mathcal{B}_{\mathrm{a}} . \end{cases} \tag{4.17}$$

On vérifie alors, en explicitant par exemple $\mathcal{A}_{\mathrm{s}} \odot \mathcal{B}_{\mathrm{a}}$ par la formule (4.15) compte tenu des propriétés caractéristiques de $\mathcal{A}_{\mathrm{s}}$ et $\mathcal{B}_{\mathrm{a}}$, que :

$$\mathcal{A}_{\mathrm{s}} \odot \mathcal{B}_{\mathrm{a}} = (a_{\mathrm{s}})_{ij}(b_{\mathrm{a}})^{ji} = (a_{\mathrm{s}})_{ij}(-b_{\mathrm{a}})^{ij} = -(a_{\mathrm{s}})_{ji}(b_{\mathrm{a}})^{ij} = -\mathcal{A}_{\mathrm{s}} \odot \mathcal{B}_{\mathrm{a}}$$

[(5)] La convention adoptée ici relativement aux indices concernés par la double contraction symbolisée par $\odot$ sera conservée aux paragraphes 5.6 et 5.7 pour les tenseurs euclidiens et leur double contraction symbolisée par « : ». Elle n'est pas générale dans la littérature (on peut rencontrer des cas, notamment pour les tenseurs euclidiens, où la double contraction, symbolisée de la même façon, porte d'abord sur l'avant-dernier indice de $\mathcal{T}''$ et le premier indice de $\mathcal{T}'$, puis sur le dernier indice de $\mathcal{T}''$ et le deuxième indice $\mathcal{T}'$) et il sera donc prudent de contrôler la signification des notations employées.

d'où

$$\mathcal{A}_{\mathrm{s}} \odot \mathcal{B}_{\mathrm{a}} = 0 \quad \text{et de même} \quad \mathcal{A}_{\mathrm{a}} \odot \mathcal{B}_{\mathrm{s}} = 0\,. \tag{4.18}$$

Il s'ensuit que :

$$\mathcal{A} \odot \mathcal{B} = \mathcal{A}_{\mathrm{s}} \odot \mathcal{B}_{\mathrm{s}} + \mathcal{A}_{\mathrm{a}} \odot \mathcal{B}_{\mathrm{a}}\,. \tag{4.19}$$

Le produit doublement contracté $\odot$ apparaît ainsi comme un produit de dualité entre les espaces $E^* \otimes E^*$ et $E \otimes E$. La formule (4.19) en donne l'expression lorsque $E^* \otimes E^*$ sont décomposés sur les tenseurs symétriques et antisymétriques selon (4.17).

## 4.4 Contraction totale d'un produit tensoriel

D'une façon générale, étant donnés deux tenseurs d'ordre $n$, dont le premier $\mathcal{A}$ est $p$ fois contravariant et $q$ fois covariant et le second $\mathcal{B}$ est $q$ fois contravariant et $p$ fois covariant, on peut effectuer la ***contraction totale*** du produit tensoriel $\mathcal{T} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ ; tous les couples d'indices de variances contraires sur lesquels on effectue la contraction doivent être énoncés ; on obtient ainsi un ***scalaire*** $\mathcal{T}_c$.

Le produit doublement contracté d'un tenseur 2 fois covariant et d'un tenseur 2 fois contravariant examiné au paragraphe précédent est évidemment un cas particulier de cette contraction totale, de même que le produit contracté d'un vecteur de $E$ et d'un vecteur de $E^*$.

## 4.5 Définition d'un tenseur par dualité

Soit, à titre d'exemple, $\mathcal{A}$ un tenseur donné de $E \otimes E^* \otimes E$.

Soit $\mathcal{X}$ un tenseur quelconque de $E^* \otimes E \otimes E^*$.

On effectue le produit tensoriel :

$$\mathcal{T} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{X}\,. \tag{4.20}$$

La contraction totale de ce produit tensoriel, sur les couples d'indices 1 et 4, 2 et 5, 3 et 6 donne un scalaire $\mathcal{T}_c$ fonction linéaire de $\mathcal{X}$.

Ainsi, à partir du tenseur $\mathcal{A}$ donné de $E \otimes E^* \otimes E$, on peut définir une ***forme linéaire*** $a$ sur $E^* \otimes E \otimes E^*$, c'est-à-dire un élément de $(E^* \otimes E \otimes E^*)^*$.

$E \otimes E^* \otimes E$ et $(E^* \otimes E \otimes E^*)^*$ sont isomorphes.

En mécanique des milieux continus (cf. par exemple le chapitre V, section 3 pour la représentation des efforts intérieurs) on utilisera la réciproque de cette propriété : la donnée d'une forme linéaire $a$ sur un espace vectoriel de tenseurs $\mathcal{X}$, $p$ fois contravariants et $q$ fois covariants, définit un tenseur $\mathcal{A}$ de variances contraires (on précisera les couples d'indices sur lesquels on effectue la contraction totale du produit tensoriel (4.20)).

En particulier, une forme linéaire $a$ donnée sur $E \otimes E$ définit un tenseur $\mathcal{A}$ de $E^* \otimes E^*$ à travers le produit de dualité $\odot$ par la formule :

$$\text{(4.21)} \qquad \forall\, \mathcal{X} \in E \otimes E \qquad \mathcal{A} \odot \mathcal{X} = a(\mathcal{X}) \quad ;$$

si la forme linéaire $a$ n'est définie que sur le sous-espace des tenseurs symétriques de $E \otimes E$, soit pour $\mathcal{X} \in (E \otimes E)_{\mathrm{s}}$ , alors le tenseur $\mathcal{A}$ associé à $a$ par la formule :

$$\text{(4.22)} \qquad \forall\, \mathcal{X} \in (E \otimes E)_{\mathrm{s}} \qquad \mathcal{A} \odot \mathcal{X} = a(\mathcal{X})$$

n'est connu qu'à un tenseur antisymétrique arbitraire près car, en conséquence de (4.19), la formule (4.22) ne détermine que la partie symétrique de $\mathcal{A}$.

### 4.6 Invariants d'un tenseur mixte du 2ème ordre

$\mathcal{T}$ désignant un tenseur mixte contravariant-covariant, on a vu au paragraphe 3.3 que les $n$ coefficients du polynôme caractéristique en $\lambda$, qui s'écrit $\det[\,T^i{}_j - \lambda\, \delta^i_j\,]$, sont des invariants dans ***tout*** changement de base $\{\underline{e}_k\}$ de $E$ , la base $\{e^{*k}\}$ de $E^*$ étant la base duale.

Il est courant en mécanique de substituer à ces $n$ invariants polynomiaux classiques ($\mathrm{tr}\, \mathcal{T}\,, \ldots, \det \mathcal{T}$) de degrés 1 à $n$ par rapport aux composantes $T^i{}_j$, le jeu de $n$ invariants polynomiaux indépendants de degrés 1 à $n$, obtenus par les contractions totales suivantes :

$$\text{(4.23)} \qquad \begin{cases} I_1 = \mathrm{tr}\ \mathcal{T} = T^i{}_i \\ I_2 = \dfrac{1}{2}\mathrm{tr}\ (\mathcal{T} \odot \mathcal{T}) = \dfrac{1}{2}\, T^i{}_j\, T^j{}_i \\ I_3 = \dfrac{1}{3}\mathrm{tr}\ (\mathcal{T} \odot \mathcal{T} \odot \mathcal{T}) = \dfrac{1}{3}\, T^i{}_j\, T^j{}_k\, T^k{}_i \\ \text{etc.} \\ I_n = \dfrac{1}{n}\mathrm{tr}\ (\mathcal{T} \odot \mathcal{T} \odot \mathcal{T} \odot \ldots \odot \mathcal{T}) = \dfrac{1}{n}\, T^i{}_j\, T^j{}_k\, \ldots\, T^p{}_i\,. \end{cases}$$

## 5 Tenseurs sur un espace vectoriel euclidien

### 5.1 Définition d'un espace euclidien

L'espace vectoriel $E$ est muni d'une structure euclidienne par la donnée d'une ***forme bilinéaire symétrique*** fondamentale ***définie positive*** sur $E \times E$, soit $G$ appelée « ***produit scalaire*** ».

Avec la notation (4.13) on écrit :

$$\text{(5.1)} \qquad \forall\, \underline{v}'\,,\, \underline{v}'' \in E\ ,\ G(\underline{v}'\,,\, \underline{v}'') = \underline{v}' \odot G \odot \underline{v}''\ ,$$

et en adoptant la notation usuelle pour le produit scalaire :

$$\text{(5.2)} \qquad \forall\, \underline{v}'\,,\, \underline{v}'' \in E\ ,\ G(\underline{v}'\,,\, \underline{v}'') = \underline{v}' \,.\, \underline{v}''\ ,$$

expression sur laquelle on reviendra au paragraphe 5.5.

G est appelé ***tenseur métrique***. On désigne par $g_{ij}$ ses composantes pour une base $\{\underline{e}_k\}$ de $E$ et la base duale $\{e^{*k}\}$ de $E^*$ ; on a, en conséquence de (3.3) et (3.4) :

$$G = g_{ij}\, e^{*i} \otimes e^{*j} \ , \ g_{ij} = G(\underline{e}_i \, , \, \underline{e}_j) = \underline{e}_i \, . \, \underline{e}_j \ . \tag{5.3}$$

## 5.2 Tenseur des dilatations dans une application linéaire

Soit $\varphi$ une application linéaire de $E$ dans $E$, et $\mathcal{F}$ le tenseur mixte de $E \otimes E^*$ associé à celle-ci.

On cherche à évaluer, pour deux vecteurs quelconques $\underline{v}'$, $\underline{v}''$, le produit scalaire de leurs images dans $E$ par $\varphi$ soit : $\varphi(\underline{v}') \, . \, \varphi(\underline{v}'')$. C'est évidemment une forme bilinéaire symétrique de $\underline{v}'$ et $\underline{v}''$, qui est définie positive si $\varphi$ est inversible. En utilisant les expressions de $\varphi(\underline{v}')$ et $\varphi(\underline{v}'')$ données par (4.6) il vient :

$$\varphi(\underline{v}') \, . \, \varphi(\underline{v}'') = (\underline{v}' \odot {}^t\mathcal{F}) \odot G \odot (\mathcal{F} \odot \underline{v}'') \, . \tag{5.4}$$

En introduisant le tenseur $\mathcal{C} = {}^t\mathcal{F} \odot G \odot \mathcal{F}$, élément de $E^* \otimes E^*$, on vérifie que la formule (5.4) possède une propriété d'associativité et que l'on peut écrire :

$$\varphi(\underline{v}') \, . \, \varphi(\underline{v}'') = \underline{v}' \odot ({}^t\mathcal{F} \odot G \odot \mathcal{F}) \odot \underline{v}'' = \underline{v}' \odot \mathcal{C} \odot \underline{v}'' \, . \tag{5.5}$$

Le tenseur $\mathcal{C} = {}^t\mathcal{F} \odot G \odot \mathcal{F}$ est le tenseur 2 fois covariant sur $E \otimes E$ donnant le produit scalaire des images par $\varphi$ de deux vecteurs quelconques de $E$. La comparaison de ce tenseur $\mathcal{C}$ avec le tenseur métrique $G$ permet de caractériser la « déformation» du milieu par l'application linéaire $\varphi$ (cf. chapitre II, section 3).

## 5.3 Isomorphisme entre $E$ et $E^*$

On sait que la structure euclidienne de $E$ permet de mettre en évidence un isomorphisme dit ***canonique*** entre $E$ et son dual $E^*$. Cet isomorphisme, noté $\gamma$, est défini par :

$$\forall \, \underline{v}' \in E \ , \ \forall \, \underline{v} \in E \ , \ \underline{v}' \, . \, \underline{v} = < \underline{v}' \, , \, \gamma(\underline{v}) > \tag{5.6}$$

où $\gamma(\underline{v})$ est l'image dans $E^*$ de $\underline{v}$ par $\gamma$[(6)].

En introduisant le produit contracté $G \odot \underline{v}$ on peut expliciter (5.6) dont on déduit alors de façon évidente que :

$$\gamma(\underline{v}) = G \odot \underline{v} \, . \tag{5.7}$$

Avec les bases $\{\underline{e}_i\}$ dans $E$ et $\{\underline{e}^{*k}\}$ duale dans $E^*$, on désigne par $\gamma_{ij}$ les coefficients de la matrice de $\gamma$ définis par :

$$\gamma(\underline{e}_j) = \gamma_{ij} \, e^{*i} \, . \tag{5.8}$$

Par comparaison avec (5.7) il vient :

$$g_{ij} = \gamma_{ij} \, . \tag{5.9}$$

[(6)] En d'autres termes l'isomorphisme $\gamma$ associe à $\underline{v}$ la forme linéaire $\gamma(\underline{v})$ telle que son produit de dualité avec tout vecteur $\underline{v}'$, de $E$ soit égal au produit scalaire de $\underline{v}$ avec ce même vecteur $\underline{v}'$.

Ainsi les ***coefficients de la matrice*** de l'isomorphisme $\gamma$ dans les bases duales $\{\underline{e}_i\}$ et $\{e^{*k}\}$ de $E$ et $E^*$ sont identiques aux ***composantes*** du tenseur métrique dans la base $\{e^{*i} \otimes e^{*j}\}$.

L'isomorphisme $\gamma$ induit naturellement dans $E^*$ une structure euclidienne. La forme bilinéaire fondamentale $G^*$ sur $E^* \times E^*$ est définie comme l'image de la forme bilinéaire $G$ sur $E \times E$ : pour deux éléments $u^{*(1)}$, $u^{*(2)}$ de $E^*$, elle a pour valeur le produit scalaire de leurs originaux dans $E$ :

$$(5.10) \qquad \begin{cases} \forall\, u^{*(1)}\,,\, u^{*(2)} \in E^*\,, \\ u^{*(1)} \odot G^* \odot u^{*(2)} = \gamma^{-1}(u^{*(1)}) \odot G \odot \gamma^{-1}(u^{*(2)})\,. \end{cases}$$

On désigne par $g^{ij}$ les composantes de $G^*$ pour les bases $\{\underline{e}_k\}$ et $\{e^{*k}\}$ d'où, d'après (3.3) et (3.4) :

$$(5.11) \qquad \begin{cases} G^* & = g^{ij}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \\ g^{ij} & = G^*(e^{*i}\,,\, e^{*j})\,. \end{cases}$$

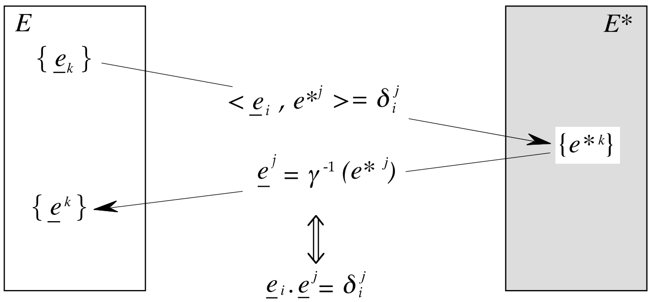



*Figure 1 – Bases primale et duales dans $E^*$ et $E$*

Il est commode d'introduire les vecteurs de $E$, notés $\underline{e}^k$, images par $\gamma^{-1}$, isomorphisme réciproque de $\gamma$, des vecteurs $e^{*k}$ de la base duale de $\{\underline{e}_k\}$ dans $E^*$ :

$$(5.12) \qquad \underline{e}^k = \gamma^{-1}(e^{*k})\,.$$

On a alors, de façon évidente, en conséquence de (5.11) et (5.10) :

$$(5.13) \qquad g^{ij} = \underline{e}^i \cdot \underline{e}^j$$

tandis que $\underline{e}_i \cdot \underline{e}^j =< \underline{e}_i\,,\, e^{*j} >$ d'après (5.6) et (5.12), d'où :

$$(5.14) \qquad \underline{e}_i \cdot \underline{e}^j = \delta_i^j\,.$$

Les vecteurs $\underline{e}^i$ constituent une base $\{\underline{e}^k\}$ de $E$ qui est appelée ***duale dans*** $E$ de la base $\{\underline{e}_k\}$ : chaque vecteur $\underline{e}^i$ de la base $\{\underline{e}^k\}$ est ainsi « orthogonal » à $(n-1)$ vecteurs de la base primale $\{\underline{e}_k\}$ et tel que son produit scalaire avec le n-ième vecteur de cette base soit égal à 1 (cf. figures 1 et 2).

Les composantes $\gamma^{ij}$ de l'isomorphisme réciproque $\gamma^{-1}$ sont données par :

$$\gamma^{-1}(e^{*j}) = \gamma^{ij}\,\underline{e}_i = \underline{e}^j$$

et l'on déduit de (5.13) et (5.14) que :

$$g^{ij} = \gamma^{kj}\,\underline{e}^i \cdot \underline{e}_k = \gamma^{ij} \tag{5.15}$$

d'où :

$$\underline{e}^j = g^{ij}\,\underline{e}_i \tag{5.16}$$

et aussi, en rapprochant (5.9) et (5.15) :

$$g_{ik}\,g^{kj} = \delta_i^j \tag{5.17}$$

et

$$\underline{e}_i = g_{ij}\,\underline{e}^j \tag{5.18}$$

(on rappelle que $G$ et $G^*$ sont symétriques).

On retiendra les formules

$$\boxed{\begin{array}{c} \underline{e}_i \cdot \underline{e}^j = \delta_i^j \\ g_{ij} = \underline{e}_i \cdot \underline{e}_j \;,\; g^{ij} = \underline{e}^i \cdot \underline{e}^j \\ g_{ik}\,g^{kj} = \delta_i^j \\ \underline{e}^i = g^{ij}\,\underline{e}_j \;,\; \underline{e}_i = g_{ij}\,\underline{e}^j \end{array}} \tag{5.19}$$

On remarque que ***si la base primale*** $\{\underline{e}_k\}$ ***est orthonormée, sa base duale*** $\{\underline{e}^k\}$ ***dans*** $E$ ***lui est identique***.

## 5.4 Repérage covariant d'un vecteur de $E$

La construction de la base duale dans $E$ à laquelle on a procédé ci-dessus permet maintenant de définir, pour tout vecteur de $E$, ce que l'on appelle son repérage covariant sous la forme :

$$\forall\,\underline{u} \in E\;,\;\underline{u} = u_\ell\,\underline{e}^\ell\;, \tag{5.20}$$

dans laquelle les $u_\ell$ sont désignées comme les ***composantes covariantes*** du vecteur $\underline{u}$.

La justification de cette terminologie tient au fait que les composantes $u_\ell$ définies par (5.20) sont aussi les composantes de la forme linéaire $\gamma(\underline{u})$ dans la base duale $\{e^{*k}\}$ de $E^*$ :

$$\gamma(\underline{u}) = u_\ell\,\gamma(\underline{e}^\ell) = u_\ell\,e^{*\ell} \quad ;$$

ces composantes se transforment selon la règle de covariance exposée au paragraphe 3.2.

La figure 2 illustre les résultats (5.19) et (5.20) sur le cas « concret » où $E = \mathbb{R}^2$.

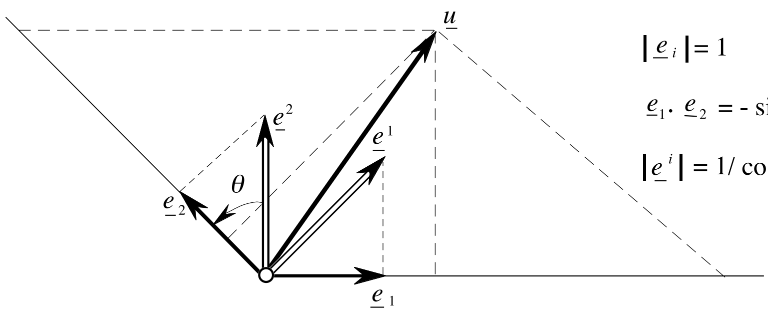



*Figure 2* – $E = \mathbb{R}^2$ *, base* $\{\underline{e}_i\}$ *normée ; les composantes contravariantes sont les coordonnées obliques suivant* $\underline{e}_1$ *et* $\underline{e}_2$ *; les composantes covariantes sont les mesures des projections orthogonales de* $\underline{u}$ *sur les directions de* $\underline{e}_1$ *et* $\underline{e}_2$ *; par exemple :* $u_1 = \underline{u}\,.\,\underline{e}_1$

## 5.5 Tenseurs euclidiens du 1$^{\text{er}}$ ordre ; produit contracté

L'isomorphisme entre $E$ et $E^*$ signifie que tout élément $\underline{u}$ de $E$ peut recevoir indifféremment deux interprétations :

- interprétation primale, vecteur de $E$
- interprétation duale, forme sur $E$, à travers le produit scalaire.

L'introduction de la représentation covariante des éléments de $E$ illustre cette dualité d'interprétation comme on l'a vu précédemment :

(5.21) $$\underline{u} = u^\ell\,\underline{e}_\ell \quad \text{traduit l'aspect primal}$$

(5.22) $$\underline{u} = u_\ell\,\underline{e}^\ell \quad \text{traduit l'aspect dual}\,.$$

### Définition

Pour rendre compte de cela on introduit la notion de ***tenseur euclidien du 1$^{er}$ ordre***.

Tout vecteur $\underline{u}$ de $E$ (tenseur contravariant du 1$^{\text{er}}$ ordre) et son tenseur covariant associé par l'isomorphisme canonique, $u^* = \gamma(\underline{u})$ , seront désormais considérés comme un unique tenseur appelé ***tenseur euclidien du 1$^{er}$ ordre***, identifié au vecteur $\underline{u}$ de $E$, sur lequel on verra qu'il est possible d'effectuer ***toutes*** les opérations précédemment définies pour les tenseurs du 1$^{\text{er}}$ ordre. Le tenseur euclidien $\underline{u}$ pourra être décomposé selon (5.21) et (5.22) qui sont respectivement appelées ses ***représentations contravariante et covariante***.

### Produit contracté

Considérant deux tenseurs euclidiens du 1$^{\text{er}}$ ordre, soient $\underline{u}$ et $\underline{v}$ on définit le produit contracté en remarquant que :

(5.23) $$\underline{u} \odot v^* = u^i\,v_i = u^i\,g_{ij}\,v^j = u_j\,v^j = u^* \odot \underline{v}\,.$$

C'est cette valeur, obtenue en contractant un des vecteurs avec la forme linéaire associée à l'autre, qui est naturellement adoptée pour le ***produit contracté des tenseurs euclidiens*** $\underline{u}$ et $\underline{v}$. L'examen de la formule (5.23) rappelle de plus que $\underline{u} \odot v^* = u^* \odot \underline{v}$ n'est autre que le produit scalaire $\underline{u} \,.\, \underline{v}$ de $\underline{u}$ et $\underline{v}$ vecteurs de $E$.

Il est ainsi possible d'utiliser désormais le symbole « . » pour noter la contraction de deux tenseurs euclidiens du 1$^{\text{er}}$ ordre :

$$\underline{u} \,.\, \underline{v} = u^i\, g_{ij}\, v^j = u^i\, v_i = u_i\, v^i \,. \tag{5.24}$$

***L'utilisation du symbole « . » manifeste que le produit contracté de deux tenseurs euclidiens du 1$^{er}$ ordre s'obtient simplement en calculant le produit scalaire des vecteurs*** $\underline{u}$ ***et*** $\underline{v}$ de $E$ compte tenu des relations (5.19) et (5.20) ; ainsi par exemple :

$$\left\{\begin{array}{l} \underline{u} \,.\, \underline{v} = (u^i\, \underline{e}_i) \,.\, (v^j\, \underline{e}_j) = u^i\, v^j (\underline{e}_i \,.\, \underline{e}_j) = g_{ij}\, u^i\, v^j \\ \text{ou encore} \\ \underline{u} \,.\, \underline{v} = (u^i\, \underline{e}_i) \,.\, (v_j\, \underline{e}^j) = u^i\, v_j (\underline{e}_i \,.\, \underline{e}^j) = u^i\, v_i = u_i\, v^i \,, \end{array}\right. \tag{5.25}$$

où l'on voit l'intérêt de l'introduction de la représentation covariante.

## 5.6 Tenseurs euclidiens du 2$^{\text{ème}}$ ordre décomposés ; produits contractés

L'isomorphisme $\gamma$ établi entre $E$ et $E^*$, entraîne naturellement que les espaces produits $E \times E$, $E \times E^*$, $E^* \times E$ et $E^* \times E^*$ sont isomorphes. Il en résulte alors que les espaces de tenseurs du 2$^{\text{ème}}$ ordre, $E^* \otimes E^*$, $E^* \otimes E$, $E \otimes E^*$ et $E \otimes E$ sont, eux aussi, isomorphes. On se propose, pour examiner les conséquences de ces isomorphismes, de considérer d'abord le cas des tenseurs décomposés.

$\underline{a}$ et $\underline{b}$ désignant deux vecteurs de $E$ les isomorphismes entre les espaces de tenseurs ci-dessus mettent en correspondance les tenseurs décomposés

$$\left\{\begin{array}{l} \underline{a} \otimes \underline{b} \,,\, \underline{a} \otimes b^* \,,\, a^* \otimes \underline{b} \ \text{ et } a^* \otimes b^* \,, \\ \text{où } a^* = \gamma(\underline{a}) \quad \text{et } b^* = \gamma(\underline{b}) \end{array}\right. \tag{5.26}$$

en sorte que, considérant par exemple $\mathcal{T} = \underline{a} \otimes \underline{b}$ et $\mathcal{T}' = a^* \otimes b^*$ on a :

$$\forall\, \underline{u} \,,\, \underline{v} \in E \quad \mathcal{T}'(\underline{u} \,,\, \underline{v}) = \mathcal{T}(u^* \,,\, v^*) \tag{5.27}$$

$$\text{où } u^* = \gamma(\underline{u}) \quad \text{et} \quad v^* = \gamma(\underline{v}) \,.$$

En explicitant $\mathcal{T}(u^* \,,\, v^*)$ et $\mathcal{T}'(\underline{u} \,,\, \underline{v})$ selon (2.2), (4.4) et (4.13) il vient :

$$\mathcal{T}(u^* \,,\, v^*) = u^* \odot \mathcal{T} \odot v^* = (\underline{a} \odot u^*)(\underline{b} \odot v^*) \tag{5.28}$$

et

$$\mathcal{T}'(\underline{u} \,,\, \underline{v}) = \underline{u} \odot \mathcal{T}' \odot \underline{v} = (a^* \odot \underline{u})(b^* \odot \underline{v}) \,. \tag{5.29}$$

**Définition**

La comparaison de ces formules avec (5.23) et (5.24) qui définissent le produit contracté de deux tenseurs euclidiens du $1^{\text{er}}$ ordre, montre que, de façon cohérente,

- on définira le ***tenseur euclidien*** du $2^{\text{ème}}$ ordre décomposé, noté $\underline{\underline{T}}$, identifié au tenseur $\underline{a} \otimes \underline{b}$ de $E \otimes E$, dont (5.26) fournit les quatre formes associées :

$$\underline{\underline{T}} = \underline{a} \otimes \underline{b} \quad ;$$

- on notera par le symbole « . » la contraction de ce tenseur avec un tenseur euclidien du $1^{\text{er}}$ ordre (en conservant les conventions antérieures – cf. (4.3) et (4.13) au paragraphe 4.2 – sur les indices concernés) :

$$\underline{\underline{T}}(\underline{u}\,,\,\underline{v}) = \underline{u} \,.\, \underline{\underline{T}} \,.\, \underline{v} = \underline{u} \,.\, (\underline{a} \otimes \underline{b}) \,.\, \underline{v} \quad ; \tag{5.30}$$

- cette expression s'explicite en :

$$\underline{u} \,.\, (\underline{a} \otimes \underline{b}) \,.\, \underline{v} = (\underline{a} \,.\, \underline{u})(\underline{b} \,.\, \underline{v}) \tag{5.31}$$

- qui fait intervenir les produits contractés des tenseurs euclidiens du $1^{\text{er}}$ ordre $\underline{a}$ et $\underline{u}$, $\underline{b}$ et $\underline{v}$, calculables comme indiqué plus haut par (5.25).

**Produit contracté d'un tenseur euclidien du $2^{\text{ème}}$ ordre décomposé et d'un tenseur euclidien du $1^{\text{er}}$ ordre**

De même on vérifie la cohérence de la notation

$$\underline{\underline{T}} \,.\, \underline{v} = (\underline{a} \otimes \underline{b}) \,.\, \underline{v} \tag{5.32}$$

pour le produit contracté d'un tenseur euclidien du $2^{\text{ème}}$ ordre décomposé et d'un tenseur euclidien du $1^{\text{er}}$ ordre défini comme le produit contracté selon (4.5) de la forme mixte associée à $\underline{\underline{T}}$ dans $E \otimes E^*$ et du vecteur $\underline{v}$ de $E$. Cette formule s'explicite en :

$$(\underline{a} \otimes \underline{b}) \,.\, \underline{v} = \underline{a}(\underline{b} \,.\, \underline{v}) \tag{5.33}$$

qui en permet le calcul selon (5.24) et (5.25) .

**Produit contracté de deux tenseurs euclidiens du $2^{\text{ème}}$ ordre décomposés**

On définit aussi le produit contracté de deux tenseurs euclidiens du $2^{\text{ème}}$ ordre décomposés, $\underline{\underline{T}}'' = \underline{a}'' \otimes \underline{b}''$ et $\underline{\underline{T}}' = \underline{a}' \otimes \underline{b}'$, par la contraction du produit des formes mixtes associées à $\underline{\underline{T}}''$ et $\underline{\underline{T}}'$ dans $E \otimes E^*$. On vérifie à partir de (5.32) et (5.33), que la notation

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}'' \,.\, \underline{\underline{T}}' = (\underline{a}'' \otimes \underline{b}'') \,.\, (\underline{a}' \otimes \underline{b}') \tag{5.34}$$

est bien cohérente pour ce produit qui s'explicite en :

(5.35) $$\underline{\underline{T}} = (\underline{b}'' \,.\, \underline{a}')\underline{a}'' \otimes \underline{b}'$$

dont le calcul est aisé en termes de tenseurs euclidiens.

**Produit doublement contracté de deux tenseurs euclidiens du 2ème ordre décomposés**

Le produit doublement contracté des tenseurs euclidiens décomposé $\underline{\underline{T}}''$ et $\underline{\underline{T}}'$ ci-dessus est défini comme le produit doublement contracté selon (4.4) de deux formes associées respectivement à $\underline{\underline{T}}''$ et à $\underline{\underline{T}}'$ dont les variances concernées sont contraires. On adopte pour ce produit la notation

(5.36) $$\underline{\underline{T}}'' : \underline{\underline{T}}' = (\underline{a}'' \otimes \underline{b}'') : (\underline{a}' \otimes \underline{b}') \quad ;$$

sa définition est bien univoque (c'est-à-dire indépendante du choix particulier des formes associées à $\underline{\underline{T}}''$ et à $\underline{\underline{T}}'$) et l'on a :

(5.37) $$(\underline{a}'' \otimes \underline{b}'') : (\underline{a}' \otimes \underline{b}') = (\underline{a}'' \,.\, \underline{b}')(\underline{b}'' \,.\, \underline{a}')$$

qui en permet le calcul aisé.

## 5.7 Tenseurs euclidiens du 2ème ordre

Les résultats précédents pour les tenseurs du 2ème ordre décomposés ont montré :

- l'introduction de la notion de tenseur euclidien ; celui-ci est identifié à l'élément de $E \otimes E$ et les quatre formes (5.26) lui sont associées par l'isomorphisme canonique $\gamma$ ;
- que toutes les opérations de contraction définies dans la section 4 sous conditions de variances contraires, sont maintenant ***toujours définies*** sur les tenseurs euclidiens ;
- que ***ces opérations s'expriment toutes au moyen du produit scalaire sur*** $E$, ce qui conduit à des règles opératoires très simples.

Ces résultats essentiels s'étendent aux tenseurs d'ordre 2 en général en s'appuyant sur la décomposition (section 3) et sur la distributivité du produit tensoriel de tenseurs.

**Définition**

L'isomorphisme entre $E \otimes E, \ldots, E^* \otimes E^*$ induit par l'isomorphisme $\gamma$ est établi par des formules telles que (5.27).

Considérant le tenseur

(5.38) $$\mathcal{T} = T^{ij}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \quad \text{de} \quad E \otimes E$$

il lui est associé dans $E \otimes E^*$, dans $E^* \otimes E$, et dans $E^* \otimes E^*$ :

$$(5.39) \qquad \begin{cases} \mathcal{T}' &= T^i{}_k\, \underline{e}_i \otimes e^{*k} \quad \text{avec} \quad T^i{}_k = T^{ij}\, g_{jk}\,, \\ \mathcal{T}'' &= T_k{}^j\, e^{*k} \otimes \underline{e}_j \quad \text{avec} \quad T_k j = g_{ki}\, T^{ij}\,, \\ \mathcal{T}''' &= T_{k\ell}\, e^{*k} \otimes e^{*\ell} \quad \text{avec} \quad T_{k\ell} = g_{ki}\, T^{ij}\, g_{j\ell}\,. \end{cases}$$

Le ***tenseur euclidien*** correspondant à ces quatre tenseurs associés est $\underline{\underline{T}}$, identifié à l'élément de $E \otimes E$ :

$$(5.40) \qquad \underline{\underline{T}} = T^{ij}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

La distributivité du produit tensoriel par rapport à l'addition (§ 2.1) étant évidemment conservée au niveau des tenseurs euclidiens à travers cette définition, on peut dans (5.40) décomposer les vecteurs $\underline{e}_i$ et $\underline{e}_j$ sur la base duale $\{\underline{e}^k\}$ selon (5.19). On obtient alors pour $\underline{\underline{T}}$ de nouvelles expressions ; par exemple :

$$\underline{\underline{T}} = T^{ij} \underline{e}_i \otimes (g_{jk}\, \underline{e}^k) = T^{ij}\, g_{jk}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}^k$$

c'est-à-dire, selon (5.39) :

$$(5.41) \qquad \begin{cases} \underline{\underline{T}} &= T^i{}_k\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}^k \quad \text{avec} \quad T^i{}_k = T^{ij}\, g_{jk}\,, \\ \underline{\underline{T}} &= T_k{}^j\, \underline{e}^k \otimes \underline{e}_j \quad \text{avec} \quad T_k{}^j = g_{ki}\, T^{ij}\,, \\ \underline{\underline{T}} &= T_{k\ell}\, \underline{e}^k \otimes \underline{e}^\ell \quad \text{avec} \quad T_{k\ell} = g_{ki}\, T^{ij}\, g_{j\ell}\,. \end{cases}$$

On dit que (5.40) et (5.41) constituent les ***quatre représentations du tenseur euclidien*** $\underline{\underline{T}}$ : respectivement représentations 2 fois contravariante, 1-contravariante 1-covariante, 1-covariante l-contravariante, 2 fois covariante. Cette terminologie se justifie, comme au paragraphe 5.4, par la comparaison de ces expressions avec celles des différents tenseurs associés à $\mathcal{T}$. On insistera toutefois sur le fait que (5.40) et (5.41) représentent quatre expressions du même tenseur $\underline{\underline{T}}$ élément de $E \otimes E$.

## Produits contractés

La notion de tenseur euclidien du 2$^{\text{ème}}$ ordre étant ainsi introduite dans le cas général, toutes les définitions et tous les résultats relatifs aux tenseurs décomposés sont généralisables, en remarquant notamment la distributivité du produit contracté de tenseurs euclidiens par rapport à l'addition qui permet le calcul aisé des produits contractés.

À titre d'exemple :

$\underline{\underline{T}} \cdot \underline{v} = (T^{ij}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j) \cdot (v^k\, \underline{e}_k) = T^{ij}\, v^k (\underline{e}_j \cdot \underline{e}_k)\, \underline{e}_i = T^{ij}\, g_{jk}\, v^k\, \underline{e}_i = T^{ij}\, v_j\, \underline{e}_i = T^i{}_k\, v^k\, \underline{e}_i\,;$

et aussi

$$\underline{\underline{T}}'' \cdot \underline{\underline{T}}' = (T''^{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j) \cdot (T'^{k\ell}\, \underline{e}_k \otimes \underline{e}_\ell)$$
$$= T''^{ij}\, T'^{k\ell} (\underline{e}_j \cdot \underline{e}_k)\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_\ell = T''^{ij}\, g_{jk}\, T'^{k\ell} (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_\ell) = T''^{ij} T'_j{}^\ell\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_\ell = \text{etc.}$$

ou bien

$\underline{\underline{T}}'' \cdot \underline{\underline{T}}' = (T''^i{}_j\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}^j) \cdot (T'^k{}_\ell\, \underline{e}_k \otimes \underline{e}^\ell) = T''^i{}_j\, T'^j{}_\ell\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}^\ell\,;$

et encore, pour le produit doublement contracté

$\underline{\underline{T}}'' : \underline{\underline{T}}' = (T^{ij}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j) : (T'^{k\ell}\, \underline{e}_k \otimes \underline{e}_\ell) = T''^{ij}\, T'^{k\ell} (\underline{e}_j \cdot \underline{e}_k)(\underline{e}_i \cdot \underline{e}_\ell) = g_{i\ell}\, T''^{ij}\, g_{jk}\, T'^{k\ell}$

$\underline{\underline{T}}'' : \underline{\underline{T}}' = T''_\ell{}^j\, T'_j{}^\ell\,.$

On remarquera aussi l'identité (utilisée notamment au chapitre V) :
$(\underline{\underline{A}} \,.\, \underline{\underline{B}}) : \underline{\underline{C}} = (\underline{\underline{C}} \,.\, \underline{\underline{A}}) : \underline{\underline{B}} = (\underline{\underline{B}} \,.\, \underline{\underline{C}}) : \underline{\underline{A}}$
(valable aussi pour un nombre plus élevé de tenseurs), qui est évidente dans le cas des tenseurs décomposés $\underline{\underline{A}} = \underline{a} \otimes \underline{a}'$ , $\underline{\underline{B}} = \underline{b} \otimes \underline{b}'$ , $\underline{\underline{C}} = \underline{c} \otimes \underline{c}'$ car alors $(\underline{\underline{A}} \,.\, \underline{\underline{B}}) : \underline{\underline{C}} = (\underline{c}' \,.\, \underline{a})(\underline{a}' \,.\, \underline{b})(\underline{b}' \,.\, \underline{c})$ , et qui s'étend sans difficulté au cas général.

Les exemples ci-dessus mettent en évidence que les contractions sont ***toujours possibles*** pour les tenseurs euclidiens et qu'elles se calculent en adoptant pour les tenseurs en cause des représentations telles que les indices concernés soient toujours l'un supérieur et l'autre inférieur. On voit aussi qu'une méthode sûre et systématique pour calculer les produits contractés, tant que l'on n'est pas familier avec ce genre d'exercice, consiste simplement à ***expliciter les produits scalaires*** dans $E$ qui correspondent aux diverses contractions.

### Transposition

À partir de la définition donnée au paragraphe 3.3 et de la propriété caractéristique (4.6) on définit le transposé du tenseur euclidien $\underline{\underline{T}}$, noté ${}^t\underline{\underline{T}}$, par la formule :

$$\forall \underline{v} \,,\ \underline{\underline{T}} \,.\, \underline{v} = \underline{v} \,.\, {}^t\underline{\underline{T}} \tag{5.42}$$

équivalente à dire que le tenseur mixte associé à ${}^t\underline{\underline{T}}$ dans $E^* \otimes E$ est le transposé du tenseur mixte associé à $\underline{\underline{T}}$ dans $E \otimes E^*$.

Les représentations de $\underline{\underline{T}}$ étant $\underline{\underline{T}} = T^{ij}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j = T_{ij}\, \underline{e}^i \otimes \underline{e}^j = T^i{}_j \underline{e}_i \otimes \underline{e}^j = T_i{}^j\, \underline{e}^i \otimes \underline{e}_j$ on trouve pour les ${}^t\underline{\underline{T}}$ les représentations :

$$\begin{cases} {}^t\underline{\underline{T}} = ({}^tT)^{ij}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j = T^{ji}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \,, \\ {}^t\underline{\underline{T}} = ({}^tT)_{ij}\, \underline{e}^i \otimes \underline{e}^j = T_{ji}\, \underline{e}^i \otimes \underline{e}^j \,, \\ {}^t\underline{\underline{T}} = ({}^tT)^i{}_j\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}^j = T_j{}^i\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}^j \,, \\ {}^t\underline{\underline{T}} = ({}^tT)_i{}^j\, \underline{e}^i \otimes \underline{e}_j = T^j{}_i\, \underline{e}^i \otimes \underline{e}_j \,, \end{cases} \tag{5.43}$$

qui montrent que pour les représentations 2 fois contravariante et 2 fois covariante les coefficients de $\underline{\underline{T}}$ et de ${}^t\underline{\underline{T}}$ se correspondent par permutation des deux indices, et que pour les représentations mixtes il y a permutation de l'ordre des deux indices qui conservent leur position (supérieure ou inférieure).

À ce stade il est intéressant de reprendre l'exemple du calcul du tenseur des dilatations dans une application linéaire de $E$ dans $E$ traité au paragraphe 5.2. Il vient :
$\varphi(\underline{v}') \,.\, \varphi(\underline{v}'') = (\underline{\underline{F}} \,.\, \underline{v}') \,.\, (\underline{\underline{F}} \,.\, \underline{v}'') = \underline{v}' \,.\, \underline{\underline{C}} \,.\, \underline{v}''$ avec $\underline{\underline{C}} = {}^t\underline{\underline{F}} \,.\, \underline{\underline{F}}$.
On peut expliciter $\underline{\underline{C}}$, par exemple sous la forme $\underline{\underline{C}} = \big(({}^tF)_i{}^k\, \underline{e}^i \otimes \underline{e}_k\big) \,.\, \big(F^\ell{}_j\, \underline{e}_\ell \otimes \underline{e}^j\big)$ d'où $\underline{\underline{C}} = ({}^tF)_i{}^k\, g_{k\ell}\, F^\ell{}_j\, \underline{e}^i \otimes \underline{e}^j$ où l'on retrouve l'écriture de la formule (5.5), et qui devient compte tenu de (5.43) : $\underline{\underline{C}} = F^k{}_i\, g_{k\ell}\, F^\ell{}_j\, \underline{e}^i \otimes \underline{e}^j$.

### Tenseurs euclidiens du 2ème ordre symétriques et antisymétriques

On définit ***la symétrie d'un tenseur euclidien*** $\underline{\underline{T}}$ par la symétrie (cf. § 3.4) de ses tenseurs associés dans $E \otimes E$ ou dans $E^* \otimes E^*$ (l'une implique l'autre).

Pour un tel tenseur on a donc les relations de symétrie suivantes pour les représentations 2 fois contravariante, 2 fois covariante et mixtes :

$$(5.44)\qquad \begin{cases} \underline{\underline{T}} = T^{ij}\,\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \quad \text{avec} \quad T^{ij} = T^{ji}\,, \\ \underline{\underline{T}} = T_{ij}\,\underline{e}^i \otimes \underline{e}^j \quad \text{avec} \quad T_{ij} = T_{ji}\,, \\ \underline{\underline{T}} = T^j{}_i\,\underline{e}_j \otimes \underline{e}^i = T_i{}^j\,\underline{e}^i \otimes \underline{e}_j \quad \text{avec}\; T^j{}_i = T_i{}^j\,. \end{cases}$$

La symétrie de $\underline{\underline{T}}$ s'exprime aussi par la ***propriété caractéristique*** :

$$(5.45)\qquad \forall\,\underline{u}\,,\ \underline{v}\,,\ \ \underline{u}\,.\,\underline{\underline{T}}\,.\,\underline{v} = \underline{v}\,.\,\underline{\underline{T}}\,.\,\underline{u}\,.$$

De la même manière on définit les ***tenseurs euclidiens antisymétriques*** pour lesquels les formules ci-dessus (5.44 et 5.45 ) sont modifiées par adjonction d'un signe « moins » :

$$(5.46)\qquad \begin{cases} \forall\,\underline{u}\,,\ \underline{v}\,, \qquad \underline{u}\,.\,\underline{\underline{T}}\,.\,\underline{v} = -\underline{v}\,.\,\underline{\underline{T}}\,.\,\underline{u} \\ T^{ij} = -T^{ji}\,,\quad T_{ij} = -T_{ji}\,,\ T^j{}_i = -T_i{}^j\,. \end{cases}$$

La comparaison de ces formules avec les résultats donnés plus haut pour la transposition met en évidence les propriétés caractéristiques :

$$(5.47)\qquad \begin{cases} \underline{\underline{T}} \ \text{symétrique} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{T}} = {}^t\underline{\underline{T}} \\ \underline{\underline{T}} \ \text{antisymétrique} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{T}} = -{}^t\underline{\underline{T}}\,. \end{cases}$$

Suivant la démarche du paragraphe 3.4, on peut décomposer un tenseur euclidien du 2$^{\text{ème}}$ ordre quelconque en ses parties symétrique et antisymétrique ; les formules deviennent :

$$(5.48)\qquad \begin{cases} \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}_{\mathrm{s}} + \underline{\underline{T}}_{\mathrm{a}} \\ \underline{\underline{T}}_{\mathrm{s}} = \dfrac{1}{2}(\underline{\underline{T}} + {}^t\underline{\underline{T}}) \\ \underline{\underline{T}}_{\mathrm{a}} = \dfrac{1}{2}(\underline{\underline{T}} - {}^t\underline{\underline{T}})\,. \end{cases}$$

Considérant alors deux tenseurs $\underline{\underline{T}}''$ et $\underline{\underline{T}}'$ décomposés selon (5.48) leur produit doublement contracté s'exprime sous la forme :

$$(5.49)\qquad \underline{\underline{T}}'' : \underline{\underline{T}}' = \underline{\underline{T}}''_{\mathrm{s}} : \underline{\underline{T}}'_{\mathrm{s}} + \underline{\underline{T}}''_{\mathrm{a}} : \underline{\underline{T}}'_{\mathrm{a}}$$

car

$$\underline{\underline{T}}''_{\mathrm{s}} : \underline{\underline{T}}'_{\mathrm{a}} = 0 \quad \text{et} \quad \underline{\underline{T}}''_{\mathrm{a}} : \underline{\underline{T}}'_{\mathrm{s}} = 0\,.$$

### Convention de notation

La forme bilinéaire $G$ sur $E \times E$, élément de $E^* \otimes E^*$, correspond au tenseur euclidien identifié à l'élément $g^{ij}\,\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$ de $E \otimes E$. On conviendra d'adopter pour ce tenseur euclidien la notation $\underline{\underline{1}}$

$$(5.50)\qquad \underline{\underline{1}} = g^{ij}\,\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j = \delta^i_j\,\underline{e}_i \otimes \underline{e}^j = \delta^j_i\,\underline{e}^i \otimes \underline{e}_j = g_{ij}\,\underline{e}^i \otimes \underline{e}^j\,.$$

On remarquera, à titre de justification de cette notation, que :

$$\forall\,\underline{\underline{T}}\,,\ \underline{\underline{T}}\,.\,\underline{\underline{1}} = \underline{\underline{T}}\,.$$

### Invariants d'un tenseur euclidien du 2ème ordre

Les invariants définis par (4.23) des tenseurs mixtes associés à un tenseur euclidien $\underline{\underline{T}}$ dans $E \otimes E^*$ et dans $E^* \otimes E$ sont égaux et s'expriment en termes de tenseurs euclidiens de la façon suivante :

$$(5.51) \qquad \begin{cases} I_1 = \underline{\underline{T}} : \underline{\underline{1}} = \text{ tr } \underline{\underline{T}} \quad ^{(7)} \\ I_2 = \dfrac{1}{2} \underline{\underline{T}} : \underline{\underline{T}} = \dfrac{1}{2} \text{ tr } (\underline{\underline{T}}^2) \\ I_3 = \dfrac{1}{3} (\underline{\underline{T}} \,.\, \underline{\underline{T}}) : \underline{\underline{T}} = \dfrac{1}{3} \text{ tr } (\underline{\underline{T}}^3) \\ \text{etc.} \\ I_n = \dfrac{1}{n} (\underline{\underline{T}} \,.\, \underline{\underline{T}} \ldots) : \underline{\underline{T}} = \dfrac{1}{n} \text{ tr } (\underline{\underline{T}}^n) \,. \end{cases}$$

On a là un jeu d'invariants principaux de $\underline{\underline{T}}$.

On peut également définir $\det \underline{\underline{T}}$ de façon analogue : par (3.16) sur les tenseurs mixtes associés à $\underline{\underline{T}}$ dans $E \otimes E^*$ ou $E^* \otimes E$. Il est invariant par changement de base, et l'on a aussi

$$\det(\underline{\underline{T}}'' \,.\, \underline{\underline{T}}') = \det \underline{\underline{T}}'' \times \det \underline{\underline{T}}' \,.$$

L'importance des invariants principaux en mécanique (cf. chapitres VI et VII par exemple) tient au résultat qui suit.

### Fonction isotrope d'un tenseur euclidien du 2ème ordre symétrique

Considérons une fonction du ***tenseur*** $\underline{\underline{T}}$ à valeur scalaire. Une telle fonction est invariante par changement de base : cela signifie que la valeur de cette fonction pour un tenseur $\underline{\underline{T}}$ donné, qui résulte évidemment de calculs algébriques effectués sur les composantes de $\underline{\underline{T}}$ après choix d'une base $\{\underline{e}_k\}$ dans $E$, est indépendante du choix de cette base. Pour insister sur cette caractéristique on dira qu'il s'agit d'une fonction du ***seul*** tenseur $\underline{\underline{T}}$ ou encore d'une fonction ***isotrope*** de $\underline{\underline{T}}$ [8].

On a alors l'énoncé suivant appelé « théorème de représentation », pour les tenseurs $\underline{\underline{T}}$ ***symétriques*** :

***Toute fonction (isotrope) du (seul) tenseur*** $\underline{\underline{T}}$ ***symétrique s'exprime en fonction des seuls invariants principaux de*** $\underline{\underline{T}}$ ***(ou d'un jeu équivalent).***

Il en va évidemment ainsi pour $\det \underline{\underline{T}}$.

---

(7) On remarque qu'avec la convention adoptée ici pour les indices concernés par la double contraction notée « . », explicitée au paragraphe 4.3, on a : $\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{B}} = \text{ tr } (\underline{\underline{A}} \,.\, \underline{\underline{B}})$, $(\underline{\underline{A}} \,.\, \underline{\underline{B}}) : \underline{\underline{C}} = \text{tr } (\underline{\underline{A}} \,.\, \underline{\underline{B}} \,.\, \underline{\underline{C}})$, etc.

(8) Cf. chapitre VI (§ 2.7 et 4.2) pour une explication de cette terminologie.

## 5.8 Tenseurs euclidiens d'ordre $n$

La construction faite au paragraphe précédent pour les tenseurs euclidiens d'ordre 2 peut être reprise pour les tenseurs euclidiens d'ordre $n$ quelconque.

On adoptera pour désigner un tenseur euclidien d'ordre $n$ le symbole d'une lettre (le plus souvent capitale) soulignée d'un nombre de traits égal à l'ordre du tenseur.

Cette notation deviendrait évidemment rapidement impraticable si $n$ était grand. Pour les applications qui en seront faites à la mécanique elle se révèle commode malgré une apparente lourdeur car elle permet de distinguer « à vue » la nature scalaire, vectorielle ou tensorielle des « êtres mathématiques » qui interviennent dans les formules et d'en contrôler l'homogénéité de ce point de vue.

## 5.9 Choix d'une base orthonormée dans $E$

Comme on l'a remarqué au paragraphe 5.3 le choix d'une base primale $\{\underline{e}_k\}$ orthonormée dans $E$ implique que la base duale correspondante dans $E$, $\{\underline{e}^k\}$, lui est identique. On a alors, cf. (5.19) :

$$\underline{e}_i \equiv \underline{e}^i$$
$$g_{ij} = \delta_i^j = g^{ij}$$

dont il résulte que pour tout tenseur euclidien les diverses représentations coïncident :

$$T_i{}^j{}_{k\ell} = T_{ijk\ell} = T^{ijk\ell} = \dots$$

***Autrement dit, si la base est orthonormée, la position des indices n'a plus d'importance.***

On notera aussi que dans le cas de bases orthonormées les formules de changement de base et de transformation des composantes données au paragraphe 3.2 se simplifient considérablement.

On posera désormais (tous indices inférieurs) :

$$\underline{e}'_i = \alpha_{ik}\,\underline{e}_k$$

où, par suite de l'orthonormalité de la base $\{\underline{e}_k\}$,

$$\alpha_{ik} = \underline{e}'_i \cdot \underline{e}_k\ ;$$

la formule inverse s'écrit alors, la base $\{\underline{e}'_k\}$ étant elle aussi orthonormée :

$$\underline{e}_k = \alpha_{ik}\,\underline{e}'_i\ .$$

La formule de transformation des composantes devient alors, pour un tenseur euclidien quelconque (ici, par exemple, $\underline{\underline{\underline{T}}}$) :

$$(5.52)\qquad \begin{cases} \alpha_{ik} = \underline{e}'_i \cdot \underline{e}_k \\ T'_{ijk} = \alpha_{i\ell}\,\alpha_{jm}\,\alpha_{kn}\,T_{\ell mn} \end{cases}$$

Pour les tenseurs euclidiens du 1$^{\text{er}}$ ordre et du 2$^{\text{ème}}$ ordre les opérations de contraction peuvent être écrites sous forme matricielle : en base orthonormée on introduira le symbole « ˜ » pour désigner par $\tilde{\underline{\underline{T}}}$ la matrice du tenseur $\underline{\underline{T}}$ (1$^{\text{er}}$ indice : ligne ; 2$^{\text{ème}}$ indice : colonne) et par $\tilde{\underline{v}}$ la matrice colonne du vecteur $\underline{v}$ ; (il s'agit des tableaux correspondants dans la base orthonormée donnée). On obtient alors, le point notant ici le produit matriciel :

$\widetilde{(\underline{\underline{T}} \cdot \underline{v})} = \tilde{\underline{\underline{T}}} \cdot \tilde{\underline{v}}$ ,

$\widetilde{(\underline{\underline{T}}'' \cdot \underline{\underline{T}}' \cdot \underline{v})} = \tilde{\underline{\underline{T}}}'' \cdot \tilde{\underline{\underline{T}}}' \cdot \tilde{\underline{v}}$ ,

$\underline{v}' \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \underline{v}'' = {}^t\tilde{\underline{v}}' \cdot \tilde{\underline{\underline{T}}} \cdot \tilde{\underline{v}}''$ ,

$(\underline{\underline{T}} \cdot \underline{v}') \cdot (\underline{\underline{T}} \cdot \underline{v}'') = {}^t\tilde{\underline{v}}' \cdot {}^t\tilde{\underline{\underline{T}}} \cdot \tilde{\underline{\underline{T}}} \cdot \tilde{\underline{v}}''$ .

## 5.10 Directions principales et valeurs principales d'un tenseur euclidien du 2$^{\text{ème}}$ ordre symétrique, réel

Soit $\underline{\underline{T}}$ un tenseur euclidien du 2$^{\text{ème}}$ ordre, ***symétrique***, réel. On se propose de rechercher les vecteurs propres et valeurs propres de l'application linéaire associée à $\underline{\underline{T}}$, c'est-à-dire les vecteurs $\underline{v}_i$ non nuls et les scalaires $\lambda_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ tels que :

(5.53) $$\underline{\underline{T}} \cdot \underline{v}_i = \lambda_i \, \underline{v}_i \qquad \text{sans sommation .}$$

La détermination des $\lambda_i$ conduit à la résolution de l'équation polynomiale en $\lambda$ (§ 4.6) :

$$\det(\underline{\underline{T}} - \lambda \underline{\underline{1}}) = 0$$

dont les racines sont réelles ou imaginaires conjuguées.

La symétrie de $\underline{\underline{T}}$ permet de démontrer les résultats classiques suivants.

• Les vecteurs propres correspondant à deux valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

On a en effet :

(5.54) $$\underline{v}_1 \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \underline{v}_2 = \underline{v}_1 \cdot \lambda_2 \, \underline{v}_2 = \lambda_2 \, \underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2$$

et aussi, par la symétrie de $\underline{\underline{T}}$ (cf. (5.45)) :

(5.55) $$\underline{v}_1 \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \underline{v}_2 = \underline{v}_2 \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \underline{v}_1 = \lambda_1 \, \underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2$$

d'où $\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2 = 0 \quad \text{si} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$ .

• Toutes les valeurs propres sont réelles.

Si $\lambda_i$ est une valeur propre et $\overline{\lambda}_i$ la valeur imaginaire conjuguée, les vecteurs propres correspondants sont aussi imaginaires conjugués :

$\underline{\underline{T}} \cdot \underline{v}_i = \lambda_i \underline{v}_i \Rightarrow \underline{\underline{T}} \cdot \overline{\underline{v}}_i = \overline{\lambda}_i \, \overline{\underline{v}}_i$ car $\underline{\underline{T}}$ est réel, et les formules (5.54) et (5.55) donnent alors :

$\lambda_i \, \underline{v}_i \cdot \overline{\underline{v}}_i = \overline{\lambda}_i \, \underline{v}_i \cdot \overline{\underline{v}}_i$

dont les seules solutions sont : $\lambda_i \neq \overline{\lambda}_i \Rightarrow \underline{v}_i = 0$ et $\underline{v}_i \neq 0 \Rightarrow \lambda_i = \overline{\lambda}_i$.

L'analyse du cas des valeurs propres multiples est classique et l'on démontre que l'on peut toujours ainsi construire une base de vecteurs propres orthogonaux $\underline{e}_1 , \underline{e}_2 , \ldots , \underline{e}_n$ correspondant aux $n$ valeurs propres $\lambda_1 , \lambda_2 , \ldots , \lambda_n$ (éventuellement multiples).

Dans cette base et sa base duale $\{\underline{e}^k\}$, $\underline{\underline{T}}$ s'explicite de façon simple à partir de (5.53) :

(5.56)
$$\begin{cases} \underline{\underline{T}} = \lambda_1\, \underline{e}_1 \otimes \underline{e}^1 + \lambda_2\, \underline{e}_2 \otimes \underline{e}^2 + \cdots + \lambda_n\, \underline{e}_n \otimes \underline{e}^n \\ \underline{\underline{T}} = \lambda_1\, \underline{e}^1 \otimes \underline{e}_1 + \lambda_2\, \underline{e}^2 \otimes \underline{e}_2 + \cdots + \lambda_n\, \underline{e}^n \otimes \underline{e}_n \,. \end{cases}$$

On en déduit, pour la forme bilinéaire $\underline{u} \,.\, \underline{\underline{T}} \,.\, \underline{v}$ :

(5.57)
$$\underline{u} \,.\, \underline{\underline{T}} \,.\, \underline{v} = \lambda_1\, u_1\, v^1 + \cdots + \lambda_n\, u_n\, v^n = \lambda_1\, u^1\, v_1 + \cdots + \lambda_n\, u^n\, v_n \,.$$

Il est commode de choisir la base $\underline{e}_1\,, \underline{e}_1\, \ldots\,, \underline{e}_n$ ***orthonormée*** (cf. § 5.9) ; alors :

$$\underline{\underline{T}} = \lambda_1\, \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \cdots + \lambda_n\, \underline{e}_n \otimes \underline{e}_n$$
$$\underline{u} \,.\, \underline{\underline{T}} \,.\, \underline{v} = \lambda_1\, u_1\, v_1 + \cdots + \lambda_n\, u_n\, v_n$$

et la forme quadratique $\underline{u} \,.\, \underline{\underline{T}} \,.\, \underline{u}$ s'écrit :

(5.58)
$$\underline{u} \,.\, \underline{\underline{T}} \,.\, \underline{u} = \lambda_1 (u_1)^2 + \cdots + \lambda_n (u_n)^2 \,.$$

Les directions définies par les vecteurs propres de l'application linéaire associée à $\underline{\underline{T}}$, et les valeurs propres correspondantes, sont appelées ***directions principales*** et ***valeurs principales*** du tenseur euclidien $\underline{\underline{T}}$.

Les invariants de $\underline{\underline{T}}$ s'expriment de façon simple en fonction des valeurs principales, ainsi :

(5.59)
$$\begin{cases} I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \\ I_2 = \dfrac{1}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_n^2) \\ \text{etc.} \\ I_n = \dfrac{1}{n}(\lambda_1^n + \lambda_2^n + \cdots + \lambda_n^n) \,, \end{cases}$$

et aussi :

(5.60)
$$\det \underline{\underline{T}} = \lambda_1\, \lambda_2 \ldots \lambda_n \,.$$

# 6 Champs de tenseurs

## 6.1 Définition

On suppose, comme c'est le cas en mécanique des milieux continus, que l'espace vectoriel $E$ à partir duquel on a défini les tenseurs au paragraphe 1.1, est ***l'espace vectoriel associé d'un espace affine*** : chaque point $M$ de l'espace affine est caractérisé par son vecteur-position $\underline{M}$ ou $\underline{x}$, à partir d'une origine fixée dans cet espace.

On définit un ***champ de tenseurs*** sur cet espace affine en associant à chaque point $M$ un tenseur d'un type déterminé (variances précisées) : la valeur du champ de tenseurs au point courant $M$, c'est-à-dire le ***tenseur*** correspondant, sera notée

$\mathcal{T}(\underline{x})$ ; on désignera typiquement par $H$ l'espace vectoriel des tenseurs $\mathcal{T}(\underline{x})$ et l'on dira que l'on a affaire à un champ de $H$-tenseurs.

On désigne par $\{\underline{e}_k\}$ une base de $E$, par $\{e^{*k}\}$ la base duale dans $E^*$. Le vecteur position $\underline{x}$ a pour coordonnées $x^k$ dans la base $\{\underline{e}_k\}$.

## 6.2 Dérivation d'un champ de tenseurs ; gradient d'un champ de tenseurs

On considère un champ de tenseurs $\mathcal{T}(\underline{x})$ et l'on fait l'hypothèse de la dérivabilité de ses composantes par rapport aux coordonnées $x^k$ du vecteur position $\underline{x}$.

Soit alors $\underline{w}$ un vecteur quelconque de $E$. On sait définir, au point courant $M$, la dérivée du champ $\mathcal{T}$ suivant le vecteur $\underline{w}$ : c'est, le $H$-tenseur noté $\mathrm{D}_{\underline{w}}\mathcal{T}(\underline{x})$ défini par le passage à la limite :

$$\mathrm{D}_{\underline{w}}\mathcal{T}(\underline{x}) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\mathcal{T}(\underline{x} + \lambda\, \underline{w}) - \mathcal{T}(\underline{x})}{\lambda} \in H \ . \tag{6.1}$$

Les hypothèses de dérivabilité sur les composantes de $\mathcal{T}(\underline{x})$ assurent l'existence de cette limite et permettent de démontrer que $\mathrm{D}_{\underline{w}}\mathcal{T}(\underline{x})$ ***dépend linéairement de*** $\underline{w}$ .

En particulier, en choisissant pour $\underline{w}$ chacun des vecteurs de la base $\{\underline{e}_k\}$ on obtient :

$$\mathrm{D}_{\underline{e}_k}\mathcal{T}(\underline{x}) = \frac{\partial \mathcal{T}(\underline{x})}{\partial x^k} \tag{6.2}$$

et par linéarité

$$\mathrm{D}_{\underline{w}}\mathcal{T}(\underline{x}) = \frac{\partial \mathcal{T}(\underline{x})}{\partial x^k}\, w^k = (\mathrm{D}_{\underline{e}_k}\mathcal{T}(\underline{x}) \otimes e^{*k}) \odot \underline{w} \ . \tag{6.3}$$

Cette formule met en évidence le tenseur $\mathrm{D}_{\underline{e}_k}\mathcal{T}(\underline{x}) \otimes e^{*k}$ qui est associé à l'application linéaire de $E$ dans $H$ :

$$\underline{w} \to \mathrm{D}_{\underline{w}}\mathcal{T}(\underline{x}) \ ;$$

ce tenseur, élément de $H \otimes E^*$ est appelé ***gradient du champ*** de tenseurs au point $M$ et noté $\nabla\mathcal{T}(\underline{x})$ :

$$\nabla\mathcal{T}(\underline{x}) = \mathrm{D}_{\underline{e}_k}\mathcal{T}(\underline{x}) \otimes e^{*k} = \frac{\partial \mathcal{T}(\underline{x})}{\partial x^k} \otimes e^{*k} \tag{6.4}$$

et

$$\mathrm{D}_{\underline{w}}\mathcal{T}(\underline{x}) = \nabla\mathcal{T}(\underline{x}) \odot \underline{w} \ . \tag{6.5}$$

### Gradient d'un champ de tenseurs euclidiens

L'espace $E$ étant maintenant supposé muni d'une structure euclidienne on considère le champ de tenseurs euclidiens dont $H$ constitue un espace de tenseurs associés, soit par exemple le champ $\underline{\underline{T}}$ pour fixer les idées.

La définition du gradient donnée ci-dessus est transposable sans ambiguïté, et les formules essentielles s'écrivent (en sous-entendant la dépendance en $\underline{x}$ pour alléger les expressions) :

(6.6)
$$\underline{\underline{\underline{\nabla T}}} = \mathrm{D}_{\underline{e}_k} \underline{\underline{T}} \otimes \underline{e}^k = \frac{\partial \underline{\underline{T}}}{\partial x^k} \otimes \underline{e}^k$$

(6.7)
$$\boxed{\begin{array}{c} \underline{\underline{\underline{\nabla T}}} \,.\, \underline{w} = \mathrm{D}_{\underline{w}} \underline{\underline{T}} \\ \text{ou encore, sous forme « différentielle » ,} \\ \underline{\underline{\underline{\nabla T}}} \,.\, \underline{\mathrm{d}M} = \underline{\underline{\mathrm{d}T}} \,. \end{array}}$$

## 6.3 Divergence d'un champ de tenseurs

On suppose que le champ de $H$-tenseurs concerne des tenseurs ***dont le dernier indice est contravariant***.

On définit alors, en chaque point $M$ la divergence du champ $\mathcal{T}$ par la contraction du tenseur $\nabla\mathcal{T}(\underline{x}) \in H \otimes E^*$ sur ***ses deux derniers indices***.

D'où, à partir de la formule (6.4) :

(6.8)
$$\operatorname{div} \mathcal{T}(\underline{x}) = \frac{\partial \mathcal{T}(\underline{x})}{\partial x^k} \odot e^{*k} = \mathrm{D}_{\underline{e}_k} \mathcal{T}(\underline{x}) \odot e^{*k} \,,$$

ce qui correspond à la double contraction de $\nabla\mathcal{T}(\underline{x})$ avec le tenseur $\mathcal{I}$ de $E \otimes E^*$ :

$$\mathcal{I} = \delta^i_j \, e_i \otimes e^{*j} = \underline{e}_k \otimes e^{*k} \;;$$

ainsi

(6.9)
$$\operatorname{div} \mathcal{T}(\underline{x}) = \nabla\mathcal{T}(\underline{x}) \odot \mathcal{I} = \nabla\mathcal{T} \odot (\underline{e}_k \otimes e^{*k}) \,.$$

On obtient donc un nouveau champ de tenseurs qui ne présente plus l'ultime indice contravariant des tenseurs du champ initial.

Dans le cas particulier où $\mathcal{T}(\underline{x}) \in H = E \otimes E$ par exemple, on a :

$$\operatorname{div} \mathcal{T}(\underline{x}) \in E \;;$$

c'est un vecteur et l'on vérifie que l'on a :

(6.10)
$$\operatorname{div} \mathcal{T}(\underline{x}) = \frac{\partial T^{ij}(\underline{x})}{\partial x^j} \, \underline{e}_i \,.$$

### Divergence d'un champ de tenseurs euclidiens

L'intérêt essentiel de la notion de divergence apparaît dans le cas où $E$ est muni d'une structure euclidienne. En se plaçant désormais dans cette hypothèse, on ne s'intéressera plus, pour simplifier l'exposé, qu'aux tenseurs euclidiens.

Pour un champ de tenseurs euclidiens $\underline{\underline{\underline{T}}}$ l'opération « divergence » est toujours possible. On la définit par la formule :

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\underline{T}}} = \underline{\underline{\underline{\underline{\nabla T}}}} : \underline{\underline{1}} \,, \tag{6.11}$$

homologue évidente de (6.9), et qui revient à appliquer la définition (6.9) à l'un quelconque des champs de tenseurs associés à $\underline{\underline{\underline{T}}}$ pour lesquels cela est possible.

Cette définition permet la généralisation de la « formule de la divergence », bien connue pour les champs de vecteurs (tenseurs euclidiens du 1er ordre) aux champs de tenseurs euclidiens d'ordre quelconque.

Considérant par exemple :

$$\underline{\underline{\underline{T}}} = T^{ijk}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k$$

on a :

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\underline{T}}} = \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \frac{\partial T^{ijk}}{\partial x^k} = \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \operatorname{div}(T^{ijk}\, \underline{e}_k) \,.$$

On voit alors que, pour un volume $\Omega$, dans les conditions classiques d'application du théorème de la divergence à chacun des vecteurs $T^{ijk}\, \underline{e}_k$ à $i$ et $j$ fixés, c'est-à-dire si les $T^{ijk}$ sont de classe $C^1$, il vient :

$$\int_\Omega \operatorname{div} \underline{\underline{\underline{T}}} \,\mathrm{d}\Omega = \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \int_{\partial\Omega} (T^{ijk}\, \underline{e}_k) \,.\, \underline{n} \,\mathrm{d}a \tag{6.12}$$

où d$a$ désigne l'élément d'aire de $\partial\Omega$ et $\underline{n}$ sa normale sortante.

En regroupant les termes de (6.12) on reconnaît au second membre le tenseur $\underline{\underline{\underline{T}}}$ et l'on aboutit à la formule :

$$\int_\Omega \operatorname{div} \underline{\underline{\underline{T}}} \,\mathrm{d}\Omega = \int_{\partial\Omega} \underline{\underline{\underline{T}}} \,.\, \underline{n} \,\mathrm{d}a \tag{6.13}$$

valable quel que soit l'ordre du champ de tenseurs euclidiens concerné.

## 6.4 Calculs en coordonnées curvilignes

Les formules précédentes relatives au gradient ou à la divergence d'un champ de tenseurs, dans lesquelles interviennent les dérivées par rapport aux variables $x^i$, concernent le cas où les points de l'espace euclidien sont repérés par les coordonnées $x^i$ de leur vecteur-position dans un repère d'origine fixée et de base $\{\underline{e}_i\}$ fixée (coordonnées cartésiennes).

Il peut se faire aussi que l'on ait à considérer des champs de tenseurs dans lesquels les points $M$ sont repérés par des paramètres $\eta^i$ définissant dans l'espace euclidien un système de ***coordonnées curvilignes***.

C'est le cas par exemple pour les ***coordonnées cylindriques*** et les ***coordonnées sphériques*** couramment employées.

Les tenseurs $\mathcal{T}(\underline{x})$ sont alors en général définis par leurs composantes dans une ***base locale*** constituée à partir d'une base de $E$ tangente aux lignes coordonnées en $M$ et de sa base duale. Ces composantes sont données en ***fonction des coordonnées curvilignes***.

Il est clair que dans la détermination des composantes de $\nabla\mathcal{T}(\underline{x})$ dans la base locale au point $M$ on rencontrera deux types de termes provenant de contributions différentes

- d'une part des termes dus à la dérivation des composantes de $\mathcal{T}(\underline{x})$ par rapport aux $\eta^i$,
- d'autre part des termes provenant de la variation de la base locale elle-même avec les $\eta^i$.

Il n'est pas utile de développer ici les formules classiques (coefficients de Christoffel) pour cette opération dite de ***dérivation covariante*** ; les applications dans le cadre de ce cours ne le justifient pas. Le lecteur trouvera dans la suite un formulaire relatif aux principaux types de coordonnées curvilignes utilisés et limité aux expressions des ***gradients et divergences des champs de tenseurs euclidiens*** strictement nécessaires à l'étude du cours. Ces expressions s'établissent par identification à partir de la formule (6.7).

On examinera deux exemples bidimensionnels simples de ce type de calculs.

**Calcul du gradient d'une fonction vectorielle en coordonnées polaires**

La position du point $M$ de $\mathbb{R}^2$ est repérée par les paramètres :

(6.14) $$\eta_1 = r\ ,\ \eta_2 = \theta\ .$$

Les lignes coordonnées sont les cercles de centre $O$ et les rayons vecteurs issus de $O$ (figure 3).

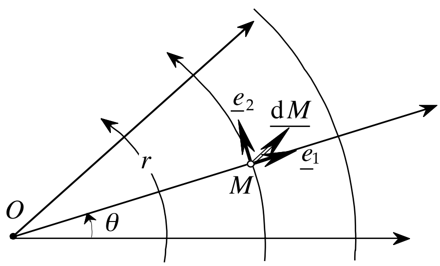



*Figure 3 – Coordonnées polaires*

On considère en chaque point $M$ la ***base locale orthonormée*** tangente en ce point aux lignes coordonnées :

$$\underline{e}_1 = \underline{e}_r\ ,\ \underline{e}_2 = \underline{e}_\theta\ ,\ (\underline{e}_1\ ,\ \underline{e}_2) = +\pi/2\,.$$

Une fonction vectorielle $\underline{U}$ est couramment définie, dans ce système de coordonnées polaires, par la formule :

$$\underline{U}(r\,,\,\theta) = U_r(r\,,\,\theta)\,\underline{e}_r + U_\theta(r\,,\,\theta)\,\underline{e}_\theta \tag{6.15}$$

dans laquelle les vecteurs $\underline{e}_r$ et $\underline{e}_\theta$ sont eux-aussi fonctions de $r$ et $\theta$.

Une méthode commode pour le calcul de $\underline{\underline{\nabla U}}$ consiste à exploiter la formule (6.7) sous la forme différentielle :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\nabla U}}\,.\,\mathrm{d}\underline{M} = \mathrm{d}\underline{U} = \dfrac{\partial \underline{U}}{\partial r}\,\mathrm{d}r + \dfrac{\partial \underline{U}}{\partial \theta}\,\mathrm{d}\theta \\ \forall\,\mathrm{d}\underline{M} = \underline{e}_r\,\mathrm{d}r + \underline{e}_\theta\, r\,\mathrm{d}\theta\ . \end{cases} \tag{6.16}$$

Compte tenu de la variation de la base locale caractérisée par :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \underline{e}_r}{\partial r} = 0\ ,\ \dfrac{\partial \underline{e}_\theta}{\partial r} = 0 \\ \dfrac{\partial \underline{e}_r}{\partial \theta} = \underline{e}_\theta\ ,\ \dfrac{\partial \underline{e}_\theta}{\partial \theta} = -\underline{e}_r \end{cases} \tag{6.17}$$

il vient :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\nabla U}}\,.\,\underline{e}_r &= \frac{\partial \underline{U}}{\partial r} = \frac{\partial U_r}{\partial r}\,\underline{e}_r + \frac{\partial U_\theta}{\partial r}\,\underline{e}_\theta \\ \underline{\underline{\nabla U}}\,.\,\underline{e}_\theta &= \frac{1}{r}\frac{\partial \underline{U}}{\partial \theta} = \frac{1}{r}\big(\frac{\partial U_r}{\partial \theta} - U_\theta\big)\,\underline{e}_r + \frac{1}{r}\big(\frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + U_r\big)\,\underline{e}_\theta\ . \end{aligned}$$

On en déduit, par identification, l'expression de $\underline{\underline{\nabla U}}$ :

(6.18)
$$\underline{\underline{\nabla U}} = \frac{\partial U_r}{\partial r}\,\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r}\big(\frac{\partial U_r}{\partial \theta} - U_\theta\big)\,\underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial U_\theta}{\partial r}\,\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r}\big(\frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + U_r\big)\,\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta\ .$$

**Calcul du gradient d'une fonction vectorielle en coordonnées curvilignes orthogonales quelconques**

Généralisant l'exemple précédent, la figure 4 représente les lignes coordonnées d'un système de coordonnées curvilignes orthogonales :

– le long de chaque « ligne $\eta_1$ » , $\eta_1$ varie tandis que $\eta_2$ reste constant – le long de chaque « ligne $\eta_2$ » , $\eta_2$ varie tandis que $\eta_1$ reste constant.

En chaque point $M$ repéré par les paramètres $\eta_1$ et $\eta_2$

$$\underline{OM} = \underline{M}(\eta_1\,,\,\eta_2)\ , \tag{6.19}$$

on définit la ***base locale « naturelle »*** tangente aux lignes coordonnées, constituée des vecteurs $\underline{E}_1$ , $\underline{E}_2$ à partir de la formule différentielle :

$$\mathrm{d}\underline{M} = \underline{E}_1\,\mathrm{d}\eta_1 + \underline{E}_2\,\mathrm{d}\eta_2\ ; \tag{6.20}$$

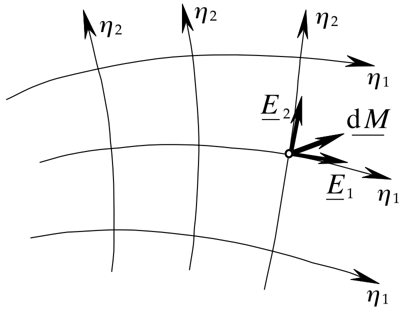



*Figure 4 – Coordonnées curvilignes orthogonales quelconques*

on écrit aussi, en se référant à (6.19) :

$$\text{(6.21)} \qquad \underline{E}_1 = \frac{\partial \underline{M}}{\partial \eta_1}\,,\ \underline{E}_2 = \frac{\partial \underline{M}}{\partial \eta_2}\ .$$

L'indication (1 ou 2) des lignes coordonnées est désormais supposée choisie de sorte que $(\underline{E}_1\,,\,\underline{E}_2) = +\pi/2$.

La ***base locale orthonormée*** colinéaire à la base naturelle est constituée des vecteurs unitaires $\underline{e}_2\,,\,\underline{e}_2$ :

$$\text{(6.22)} \qquad \underline{e}_1 = \underline{E}_1/|\,\underline{E}_1\,|\ ,\ \underline{e}_2 = \underline{E}_2/|\,\underline{E}_2\,|\ .$$

Les composantes de $\mathrm{d}\underline{M}$ dans cette base sont $\mathrm{d}s_1$ et $\mathrm{d}s_2$ où $s_1$ et $s_2$ désignent les abscisses curvilignes sur les lignes coordonnées passant par le point $M$ :

$$\text{(6.23)} \qquad \mathrm{d}\underline{M} = \underline{e}_1\,\mathrm{d}s_1 + \underline{e}_2\,\mathrm{d}s_2\ .$$

Une fonction vectorielle $\underline{U}$ est couramment définie, dans ce système de coordonneés curvilignes, par la formule :

$$\text{(6.24)} \qquad \underline{U}(\eta_1\,,\,\eta_2) = U_1(\eta_1\,,\,\eta_2)\,\underline{e}_1 + U_2(\eta_1\,,\,\eta_2)\,\underline{e}_2$$

dans laquelle les vecteurs $\underline{e}_1$ et $\underline{e}_2$ de la base locale orthonormée sont eux aussi fonctions de $\eta_1$ et $\eta_2$.

Pour le calcul de $\underline{\underline{\nabla U}}$ on écrit que :

$$\text{(6.25)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\nabla U}}\,.\,\mathrm{d}\underline{M} = \mathrm{d}\underline{U} = \dfrac{\partial \underline{U}}{\partial \eta_1}\,\mathrm{d}\eta_1 + \dfrac{\partial \underline{U}}{\partial \eta_2}\,\mathrm{d}\eta_2 \\ \forall\,\mathrm{d}\underline{M} = \underline{E}_1\,\mathrm{d}\eta_1 + \underline{E}_2\,\mathrm{d}\eta_2 = \underline{e}_1\,\mathrm{d}s_1 + \underline{e}_2\,\mathrm{d}s_2\ . \end{array} \right.$$

On désigne par $R_1$ (resp. $R_2$) le rayon de courbure en $M$ de la ligne coordonnée $\eta_1$ (resp. $\eta_2$), compté positivement[9] selon $\underline{E}_2$ (resp. $-\underline{E}_1$).

[9] Cela signifie que si $\varphi_1$ est l'angle fait par $\underline{e}_1$ avec une direction fixe, on a : $R_1 = \mathrm{d}s_1/\mathrm{d}\varphi_1$ . De même avec $\varphi_2$ pour $\underline{e}_2$ : $R_2 = \mathrm{d}s_2/\mathrm{d}\varphi_2$.

La variation de la base locale orthonormée est caractérisée par les formules classiques :

$$(6.26)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \underline{e}_1}{\partial s_1} = \dfrac{1}{R_1}\,\underline{e}_2 & \dfrac{\partial \underline{e}_2}{\partial s_1} = -\dfrac{1}{R_1}\,\underline{e}_1 \\[2ex] \dfrac{\partial \underline{e}_1}{\partial s_2} = \dfrac{1}{R_2}\,\underline{e}_2 & \dfrac{\partial \underline{e}_2}{\partial s_2} = -\dfrac{1}{R_2}\,\underline{e}_1 \end{cases}$$

en notant, de façon plus parlante[10]

$$(6.27)\qquad \mathrm{D}_{\underline{e}_1} = \frac{\partial}{\partial s_1} \quad \text{et} \quad \mathrm{D}_{\underline{e}_2} = \frac{\partial}{\partial s_2}\ .$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\nabla U}}\,.\,\underline{E}_1 &= \mathrm{D}_{\underline{E}_1}\underline{U} = \frac{\partial \underline{U}}{\partial \eta_1} = \underline{e}_1\Big(\frac{\partial U_1}{\partial \eta_1} - U_2\frac{1}{R_1}|\,\underline{E}_1\,|\Big) + \underline{e}_2\Big(\frac{\partial U_2}{\partial \eta_1} + U_1\frac{1}{R_1}|\,\underline{E}_1\,|\Big) \\ \underline{\underline{\nabla U}}\,.\,\underline{E}_2 &= \mathrm{D}_{\underline{E}_2}\underline{U} = \frac{\partial \underline{U}}{\partial \eta_2} = \underline{e}_1\Big(\frac{\partial U_1}{\partial \eta_2} - U_2\frac{1}{R_2}|\,\underline{E}_2\,|\Big) + \underline{e}_2\Big(\frac{\partial U_2}{\partial \eta_2} + U_1\frac{1}{R_2}|\,\underline{E}_2\,|\Big)\ . \end{aligned}$$

On en déduit l'expression de $\underline{\underline{\nabla U}}$ :

$$(6.28)\qquad \boxed{\begin{aligned} \underline{\underline{\nabla U}} = {} & \Big(\frac{\partial U_1}{\partial s_1} - \frac{U_2}{R_1}\Big)\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \Big(\frac{\partial U_1}{\partial s_2} - \frac{U_2}{R_2}\Big)\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 \\ & + \Big(\frac{\partial U_2}{\partial s_1} + \frac{U_1}{R_1}\Big)\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 + \Big(\frac{\partial U_2}{\partial s_2} + \frac{U_1}{R_2}\Big)\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 \end{aligned}}$$

De cette formule on déduit évidemment l'expression de $\operatorname{div}\underline{U}$ :

$$\operatorname{div}\underline{U} = \frac{\partial U_1}{\partial s_1} - \frac{U_2}{R_1} + \frac{\partial U_2}{\partial s_2} + \frac{U_1}{R_2}\ .$$

Le calcul du rotationnel du champ $\underline{U}$ s'effectue en écrivant que, dans $\mathbb{R}^3$ :

$$\forall\, \underline{v} \in \mathbb{R}^3\ ,\ (\underline{\operatorname{rot}}\,\underline{U}) \wedge \underline{v} = (\underline{\underline{\nabla U}} - {}^t\underline{\underline{\nabla U}})\,.\,\underline{v}$$

d'où ici :

$$\underline{\operatorname{rot}}\,\underline{U} = \Big(\frac{\partial U_2}{\partial s_1} + \frac{U_1}{R_1} - \frac{\partial U_1}{\partial s_2} + \frac{U_2}{R_2}\Big)\underline{e}_3\ .$$

(10) $\dfrac{\partial}{\partial s_1} = \dfrac{1}{|\,\underline{E}_1\,|}\dfrac{\partial}{\partial \eta_1}$ et $\dfrac{\partial}{\partial s_2} = \dfrac{1}{|\,\underline{E}_2\,|}\dfrac{\partial}{\partial \eta_2}$.
La fonction $\underline{U}$ ne peut être définie en fonction de $s_1$ et $s_2$ (si les coordonnées curvilignes sont authentiques) car $s_1$ et $s_2$ ne constituent pas un système de coordonnées ; les dérivées partielles par rapport à $s_1$ et $s_2$ ont la signification donnée par (6.27).

# Récapitulatif des formules essentielles

Base primale dans $E$ : $\{\underline{e}_k\}$
Base duale dans $E$ : $\{\underline{e}^k\}$

$$\underline{e}_i \cdot \underline{e}^j = \delta_i^j \ , \ \underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = g_{ij} \ , \ \underline{e}^i \cdot \underline{e}^j = g^{ij}$$

***Tenseur euclidien*** (représentations)

$$\underline{\underline{\underline{T}}} = T^{ijk}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k = T^i{}_j{}^k\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}^j \otimes \underline{e}_k = \cdots = T_{ijk}\, \underline{e}^i \otimes \underline{e}^j \otimes \underline{e}^k$$

$$\underline{\underline{1}} = g^{ij}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j = \delta_i^j\, \underline{e}^i \otimes \underline{e}_j = \delta_j^i\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}^j = g_{ij}\, \underline{e}^i \otimes \underline{e}^j$$

***Produit tensoriel*** (exemple)

$$\underline{\underline{\underline{A}}} \otimes \underline{\underline{B}} = (A^i{}_j{}^k\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}^j \otimes \underline{e}_k) \otimes (B^{mn}\, \underline{e}_m \otimes \underline{e}_n) = A^i{}_j{}^k\, B^{mn}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}^j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_m \otimes \underline{e}_n$$

***Contraction*** (exemples)

$$\underline{\underline{\underline{\underline{T}}}} = T^{ij}{}_k{}^\ell\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}^k \otimes \underline{e}_\ell$$

$$\underline{\underline{T}}_c = T^{ij}{}_k{}^\ell\, (\underline{e}_j \cdot \underline{e}^k)\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_\ell = T^{ik}{}_k{}^\ell\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_\ell$$

$$\underline{\underline{T}}'_c = T^{ij}{}_k{}^\ell\, (\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j)\, \underline{e}^k \otimes \underline{e}_\ell = g_{ij}\, T^{ij}{}_k{}^\ell\, \underline{e}_k \otimes \underline{e}_\ell$$

***Produit contracté*** (exemples)

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\underline{A}}} \cdot \underline{\underline{B}} &= (A^i{}_j{}^k\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}^j \otimes \underline{e}_k) \cdot (B^{mn}\, \underline{e}_m \otimes \underline{e}_n) \\ &= A^i{}_j{}^k\, B^{mn}\, (\underline{e}_k \cdot \underline{e}_m)\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}^j \otimes \underline{e}_n = A^i{}_j{}^k\, g_{km}\, B^{mn}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}^j \otimes \underline{e}_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\underline{A}}} \cdot \underline{\underline{C}} &= (A^i{}_j{}^k\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}^j \otimes \underline{e}_k) \cdot (C_m{}^n\, \underline{e}^m \otimes \underline{e}_n) \\ &= A^i{}_j{}^k\, C_m{}^n (\underline{e}_k \cdot \underline{e}^m)\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}^j \otimes \underline{e}_n = A^i{}_j{}^k\, C_k{}^n\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}^j \otimes \underline{e}_n \end{aligned}$$

***Produit doublement contracté*** (exemple)

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\underline{A}}} : \underline{\underline{B}} &= (A^i{}_j{}^k\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}^j \otimes \underline{e}_k) : (B^{mn}\, \underline{e}_m \otimes \underline{e}_n) \\ &= A^i{}_j{}^k\, B^{mn} (\underline{e}_k \cdot \underline{e}_m)(\underline{e}^j \cdot \underline{e}_n)\, \underline{e}_i = A^i{}_j{}^k\, g_{km}\, B^{mj}\, \underline{e}_i \end{aligned}$$

**Tenseurs du 2$^{\text{ème}}$ ordre** (propriétés et formules remarquables)

- $\underline{\underline{T}}\,.\,\underline{v} \quad = \varphi(\underline{v})$

  $\varphi$ : application linéaire de $E$ dans $E$ dont la matrice par rapport à la base $\{\underline{e}_k\}$ a pour coefficients $T^i{}_j$ .

- $\underline{\underline{T}}\cdot\underline{\underline{T}}^{-1} = \quad \underline{\underline{T}}^{-1}\cdot\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{1}}$

  $\underline{\underline{T}}^{-1}$ : tenseur inverse, correspond à $\varphi^{-1}$ (s'il existe) .

- $\underline{\underline{T}}\,.\,\underline{v} = \underline{v}\,.\,{}^t\underline{\underline{T}}$

  ${}^t\underline{\underline{T}}$ : tenseur transposé

  $({}^tT)_{ij} = T_{ji}\,,\ ({}^tT)^{ij} = T^{ji}\,,\ ({}^tT)_i{}^j = T^j{}_i\,, \ldots$

  ${}^t(\underline{\underline{A}}\,.\,\underline{\underline{B}}) = {}^t\underline{\underline{B}}\,.\,{}^t\underline{\underline{A}}$

- tenseur symétrique : $\quad \underline{\underline{T}} = {}^t\underline{\underline{T}}$

  tenseur antisymétrique : $\underline{\underline{T}} = -{}^t\underline{\underline{T}}$

  $\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}_{\mathrm{s}} + \underline{\underline{T}}_{\mathrm{a}}\ ,\ \underline{\underline{T}}_{\mathrm{s}} = \dfrac{1}{2}(\underline{\underline{T}} + {}^t\underline{\underline{T}})\ ,\ \underline{\underline{T}}_{\mathrm{a}} = \dfrac{1}{2}(\underline{\underline{T}} - {}^t\underline{\underline{T}})$

  $\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{A}}_{\mathrm{s}} : \underline{\underline{B}}_{\mathrm{s}} + \underline{\underline{A}}_{\mathrm{a}} : \underline{\underline{B}}_{\mathrm{a}}$

- Invariants

  $I_1 = \mathrm{tr}\ \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}} : \underline{\underline{1}}$

  $I_2 = \dfrac{1}{2}\ \mathrm{tr}\ (\underline{\underline{T}}^2) = \dfrac{1}{2}\underline{\underline{T}} : \underline{\underline{T}}$

  $I_3 = \dfrac{1}{3}\ \mathrm{tr}\ (\underline{\underline{T}}^3) = \dfrac{1}{3}\,(\underline{\underline{T}}\,.\,\underline{\underline{T}}) : \underline{\underline{T}}$

  $\ldots$

  $I_n = \dfrac{1}{n}\mathrm{tr}\ (\underline{\underline{T}}^n)$

  $\det(\underline{\underline{T}}''\,.\,\underline{\underline{T}}') = \det \underline{\underline{T}}'' \times \det \underline{\underline{T}}'$

**Gradient d'un champ de tenseurs** (exemple)

$$\underline{\underline{\underline{\nabla T}}} = \frac{\partial \underline{\underline{T}}}{\partial x^k} \otimes \underline{e}^k$$

$$\underline{\underline{\underline{\nabla T}}} \cdot \underline{\mathrm{d}M} = \underline{\underline{\mathrm{d}T}}$$

**Divergence d'un champ de tenseurs** (exemple)

$$\operatorname{div} \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{\underline{\nabla T}}} : \underline{\underline{\mathbb{1}}}$$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \underline{\underline{T}} \, \mathrm{d}\Omega = \int_{\partial\Omega} \underline{\underline{T}} \cdot \underline{n} \, \mathrm{d}a \quad \text{« formule de la divergence »}$$

# Annexe II

# Opérateurs différentiels : formules essentielles

# Opérateurs différentiels : formules essentielles

## 1 Coordonnées cartésiennes orthonormées

### 1.1 Coordonnées

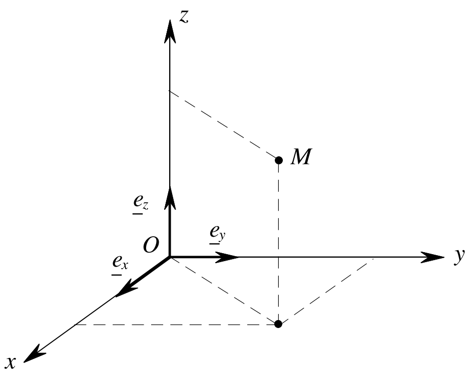



*Figure 1 – Coordonnées cartésiennes orthonormées*

Les coordonnées d'un point $M$ sont $x^i (i = 1, 2, 3)$ notées aussi $x\,, y\,, z$ ; ce sont les composantes de $\underline{OM}$ dans la base $\underline{e}_i (i = 1, 2, 3)$ notée aussi $(\underline{e}_x\,, \underline{e}_y\,, \underline{e}_z)$ :

$$\underline{OM} = x^i\, \underline{e}_i \ .$$

### 1.2 Champ de vecteurs

$$\underline{v}(\underline{M}) = \underline{v}(\underline{x}) = v^i(\underline{x})\, \underline{e}_i = v_i(\underline{x})\, \underline{e}^i \ .$$

Ici les composantes contravariantes et covariantes sont égales, et les bases $\{\underline{e}_i\}$ et $\{\underline{e}^i\}$ sont identiques :

$$\begin{aligned}
\underline{v}(\underline{x}) &= v_x(\underline{x})\, \underline{e}_x + v_y(\underline{x})\, \underline{e}_y + v_z(\underline{x})\, \underline{e}_z \\
\underline{\underline{\nabla v}}(\underline{x}) &= \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(\underline{x})\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j
\end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\tilde{\nabla} v}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_x}{\partial x} & \dfrac{\partial v_x}{\partial y} & \dfrac{\partial v_x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v_y}{\partial x} & \dfrac{\partial v_y}{\partial y} & \dfrac{\partial v_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v_z}{\partial x} & \dfrac{\partial v_z}{\partial y} & \dfrac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div}\, \underline{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\underline{\Delta v} = \operatorname{div}\,(\underline{\underline{\nabla v}}) = \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j}\, \underline{e}_i \ .$$

## 1.3 Fonction scalaire

$$f(\underline{M}) = f(\underline{x})$$

$$\underline{\nabla f} = \frac{\partial f}{\partial x_i}\, \underline{e}_i$$

$$\Delta f = \operatorname{div}\,(\underline{\nabla f}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} \ .$$

## 1.4 Champ de tenseurs du 2ème ordre

$$\underline{\underline{T}}(\underline{M}) = T_{ij}\,(\underline{x})\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

$$\underline{\underline{\underline{\nabla T}}}(\underline{M}) = \Big(\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k}\Big)\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k$$

$$\operatorname{div}\, \underline{\underline{T}} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}\, \underline{e}_i$$

$$\underline{\underline{\Delta T}} = \operatorname{div}\,(\underline{\underline{\underline{\nabla T}}}) = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_k \partial x_k}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

# 2 Coordonnées cartésiennes quelconques

## 2.1 Coordonnées

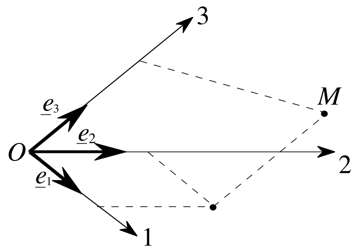



*Figure 2 – Coordonnées cartésiennes quelconques*

Les coordonnées d'un point $M$ sont $x^i$ $(i = 1, 2, 3)$ composantes de $\underline{OM}$ dans la base $\underline{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ :

$$\underline{OM} = x^i\, \underline{e}_i \ .$$

## 2.2 Champ de vecteurs

$$\underline{v}\,(\underline{M}) = \underline{v}\,(\underline{x}) = v^i(\underline{x})\,\underline{e}_i = v_i(\underline{x})\,\underline{e}^i$$

$$\underline{\underline{\nabla v}} = \frac{\partial v^i}{\partial x^j}\,\underline{e}_i \otimes \underline{e}^j$$

$$\mathrm{div}\ \underline{v} = \frac{\partial v^i}{\partial x^i}$$

$$\underline{\Delta v} = \mathrm{div}\,(\underline{\underline{\nabla v}}) = g^{kj}\,\frac{\partial^2 v^i}{\partial x^k \partial x^j}\,\underline{e}_i \ .$$

## 2.3 Fonction scalaire

$$f(\underline{M}) = f\,(\underline{x})$$

$$\underline{\nabla f} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\,\underline{e}^i$$

$$\Delta f = \mathrm{div}\,(\underline{\nabla f}) = g^{ij}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \ .$$

### 2.4 Champ de tenseurs du 2ème ordre

$$\underline{\underline{T}}\,(\underline{M}) = T_{ij}(\underline{x})\,\underline{e}^i \otimes \underline{e}^j = T^{ij}(\underline{x})\,\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j = \dots$$

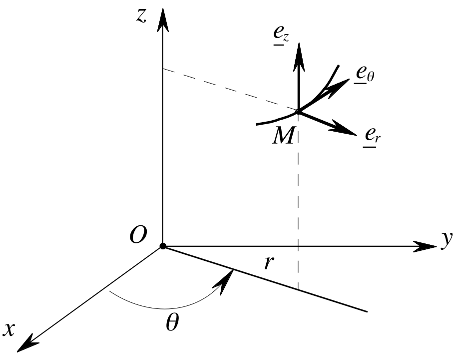
$$\underline{\underline{\underline{\nabla T}}}\,(\underline{M}) = \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^k}\,\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}^k$$

$$\operatorname{div}\,\underline{\underline{T}} = \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^j}\,\underline{e}_i$$

$$\underline{\underline{\Delta T}} = \operatorname{div}\,(\underline{\underline{\underline{\nabla T}}}) = g^{k\ell}\,\frac{\partial^2 T^{ij}}{\partial x^k \partial x^\ell}\,\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j\,.$$

# 3 Coordonnées cylindriques

### 3.1 Paramétrage




$$\underline{e}_r = \frac{\partial \underline{M}}{\partial r}$$
$$\underline{e}_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \underline{M}}{\partial \theta}$$
$$\underline{e}_z = \frac{\partial \underline{M}}{\partial z}$$

*Figure 3 – Coordonnées cylindriques*

La position d'un point $M$ est repérée par les paramètres $r$, $\theta$, $z$ (figure 3). La base locale orthonormée est $\underline{e}_r$ , $\underline{e}_\theta$ , $\underline{e}_z$ :

$$\underline{\mathrm{d}M} = \underline{e}_r\,\mathrm{d}r + \underline{e}_\theta\,r\,\mathrm{d}\theta + \underline{e}_z\,\mathrm{d}z\ ;$$

sa variation est donnée par

$$\begin{array}{lllll}
\dfrac{\partial \underline{e}_r}{\partial r} = 0 & , & \dfrac{\partial \underline{e}_\theta}{\partial r} = 0 & , & \dfrac{\partial \underline{e}_z}{\partial r} = 0 \\
\dfrac{\partial \underline{e}_r}{\partial \theta} = e_\theta & , & \dfrac{\partial \underline{e}_\theta}{\partial \theta} = -\underline{e}_r & , & \dfrac{\partial \underline{e}_z}{\partial \theta} = 0 \\
\dfrac{\partial \underline{e}_r}{\partial z} = 0 & , & \dfrac{\partial \underline{e}_\theta}{\partial z} = 0 & , & \dfrac{\partial \underline{e}_z}{\partial z} = 0\,.
\end{array}$$

## 3.2 Champ de vecteurs

Un vecteur $\underline{v}$ au point $M$ est décomposé dans la ***base locale orthonormée*** $\underline{e}_r$ , $\underline{e}_\theta$ , $\underline{e}_z$ . Ses composantes sont $v_r$ , $v_\theta$ , $v_z$ :

(3.1) $$\underline{v}\,(\underline{M}) = v_r(r\,,\,\theta\,,\,z)\,\underline{e}_r + v_\theta(r\,,\,\theta\,,\,z)\,\underline{e}_\theta + v_z(r\,,\,\theta\,,\,z)\,\underline{e}_z\ .$$

On a, dans cette base :

$$\underline{\underline{\tilde{\nabla} v}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_r}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\Big(\dfrac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta\Big) & \dfrac{\partial v_r}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v_\theta}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\Big(\dfrac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r\Big) & \dfrac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v_z}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div}\,\underline{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\underline{\Delta v} = \operatorname{div}\,(\underline{\underline{\nabla v}}) = \Big(\Delta v_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r}{r^2}\Big)\,\underline{e}_r + \Big(\Delta v_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2}\Big)\,\underline{e}_\theta + \Delta v_z\,\underline{e}_z\ .$$

## 3.3 Fonction scalaire

$$f\,(\underline{M}) = f\,(r\,,\,\theta\,,\,z)$$

$$\underline{\nabla f} = \frac{\partial f}{\partial r}\,\underline{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\underline{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\,\underline{e}_z$$

$$\Delta f = \operatorname{div}\,(\underline{\nabla f}) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\ .$$

## 3.4 Champ de tenseurs du 2ème ordre symétriques

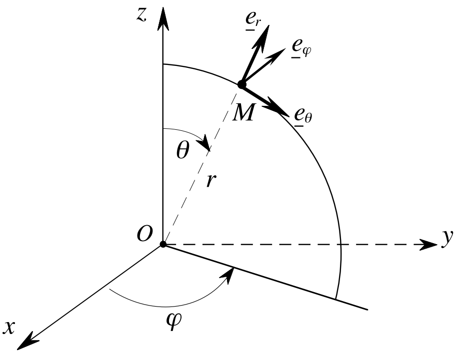
$$\underline{\underline{T}}\,(\underline{M}) = \underline{\underline{T}}\,(r\,,\,\theta\,,\,z) = T_{ij}\,(r\,,\,\theta\,,\,z)\,\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

on se limitera à l'expression de div $\underline{\underline{T}}\,(r\,,\,\theta\,,\,z)$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\,\underline{\underline{T}}\,(r\,,\,\theta\,,\,z) = \ & \Big(\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} + \frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r}\Big)\,\underline{e}_r \\ & + \Big(\frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2T_{r\theta}}{r}\Big)\,\underline{e}_\theta \\ & + \Big(\frac{\partial T_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \frac{T_{zr}}{r}\Big)\,\underline{e}_z\ . \end{aligned}$$

# 4 Coordonnées sphériques

## 4.1 Paramétrage




$$\underline{e}_r = \frac{\partial \underline{M}}{\partial r}$$
$$\underline{e}_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \underline{M}}{\partial \theta}$$
$$\underline{e}_\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \underline{M}}{\partial \varphi}$$

*Figure 4 – Coordonnées sphériques*

La position d'un point $M$ est repérée par les paramètres $r$ , $\theta$ , $\varphi$ (figure 4). La base locale orthonormée est $\underline{e}_r$ , $\underline{e}_\theta$ , $\underline{e}_\varphi$ :

$$\underline{\mathrm{d}M} = \underline{e}_r\,\mathrm{d}r + \underline{e}_\theta\, r\,\mathrm{d}\theta + \underline{e}_\varphi\, r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\ ;$$

sa variation est donnée par :

$$\begin{array}{lll}
\dfrac{\partial \underline{e}_r}{\partial r} = 0 & , \quad \dfrac{\partial \underline{e}_\theta}{\partial r} = 0 & , \quad \dfrac{\partial \underline{e}_\varphi}{\partial r} = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial \underline{e}_r}{\partial \theta} = \underline{e}_\theta & , \quad \dfrac{\partial \underline{e}_\theta}{\partial \theta} = -\underline{e}_r & , \quad \dfrac{\partial \underline{e}_\varphi}{\partial \theta} = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial \underline{e}_r}{\partial \varphi} = \underline{e}_\varphi \sin\theta & , \quad \dfrac{\partial \underline{e}_\theta}{\partial \varphi} = -\underline{e}_\varphi \cos\theta & , \quad \dfrac{\partial \underline{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\underline{e}_r \sin\theta - \underline{e}_\theta \cos\theta\ .
\end{array}$$

## 4.2 Champ de vecteurs

Un vecteur $\underline{v}$ au point $M$ est décomposé dans la ***base locale orthonormée*** $(\underline{e}_r\,,\,\underline{e}_\theta\,,\,\underline{e}_\varphi)$ :

$$\underline{v}\,(\underline{M}) = v_r\,(r\,,\,\theta\,,\,\varphi)\,\underline{e}_r + v_\theta\,(r\,,\,\theta\,,\,\varphi)\,\underline{e}_\theta + v_\varphi\,(r\,,\,\theta\,,\,\varphi)\,\underline{e}_\varphi\ .$$

On a dans cette base :

$$\underline{\underline{\tilde{\nabla v}}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_r}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\big(\dfrac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta\big) & \dfrac{1}{r}\big(\dfrac{1}{\sin\,\theta}\dfrac{\partial v_r}{\partial \varphi} - v_\varphi\big) \\ \dfrac{\partial v_\theta}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\big(\dfrac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r\big) & \dfrac{1}{r}\big(\dfrac{1}{\sin\,\theta}\dfrac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - v_\varphi\,\cot\,\theta\big) \\ \dfrac{\partial v_\varphi}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} & \dfrac{1}{r}\big(\dfrac{1}{\sin\,\theta}\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_\theta\,\cot\,\theta + v_r\big) \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{div}\ \underline{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\,\sin\,\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_\theta}{r}\,\cot\,\theta + 2\frac{v_r}{r}\ .$$

$$\underline{\Delta v} = \mathrm{div}\,(\underline{\underline{\nabla v}}) = \big(\Delta\,v_r - \frac{2}{r^2}\,(v_r + \frac{1}{\sin\,\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\,(v_\theta\,\sin\,\theta) + \frac{1}{\sin\,\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi})\big)\,\underline{e}_r +$$

$$+\big(\Delta\,v_\theta + \frac{2}{r^2}\,(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{2\,\sin^2\,\theta} - \frac{\cos\,\theta}{\sin^2\,\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi})\big)\,\underline{e}_\theta +$$

$$+\big(\Delta\,v_\varphi + \frac{2}{r^2\,\sin\,\theta}\,(\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \cot\,\theta\frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{2\,\sin\,\theta})\big)\,\underline{e}_\varphi\ .$$

## 4.3 Fonction scalaire

$$f\,(\underline{M}) = f\,(r\,,\,\theta\,,\,\varphi)$$

$$\underline{\nabla f} = \frac{\partial f}{\partial r}\,\underline{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\underline{e}_\theta + \frac{1}{r\,\sin\,\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\,\underline{e}_\varphi$$

$$\Delta f = \mathrm{div}\,(\underline{\nabla f}) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2}\cot\,\theta\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2\,\sin^2\,\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}\ .$$

## 4.4 Champ de tenseurs du 2$^{\text{ème}}$ ordre symétriques

$$\underline{\underline{T}}\,(M) = \underline{\underline{T}}\,(r\,,\,\theta\,,\,\varphi) = T_{ij}\,(r\,,\,\theta\,,\,\varphi)\,\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

$$\mathrm{div}\,\underline{\underline{T}}\,(r\,,\,\theta\,,\,\varphi) = \big(\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r\,\sin\,\theta}\frac{\partial T_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}(2\,T_{rr} - T_{\theta\theta} - T_{\varphi\varphi} + T_{r\theta}\,\cot\,\theta)\big)\,\underline{e}_r$$

$$+\big(\frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r\,\sin\,\theta}\frac{\partial T_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}\big((T_{\theta\theta} - T_{\varphi\varphi})\,\cot\,\theta + 3\,T_{r\theta}\big)\big)\,\underline{e}_\theta$$

$$+\big(\frac{\partial T_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{\varphi\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r\,\sin\,\theta}\frac{\partial T_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}(3\,T_{r\varphi} + 2\,T_{\theta\varphi}\,\cot\,\theta)\big)\,\underline{e}_\varphi\ .$$