

# Chapitre VII

## Le comportement thermoélastique

---

### MOTS CLÉS

Loi de comportement. Principe d'action locale.  
Énergie interne. Équation de l'énergie.  
Entropie. Énergie libre. Dissipation.  
Inégalité de CLAUSIUS-DUHEM.  
Potentiel thermodynamique.  
Symétries de la matière. Isotropie.  
Linéarisation.  
Coefficients de LAMÉ. Module de cisaillement.  
Module de YOUNG. Coefficient de POISSON  
État initial naturel. État initial précontraint.

---



## *En bref...*

L'expérience met en évidence le comportement thermoélastique des matériaux, caractérisé par la *réversibilité* (section 2).

La construction du modèle correspondant s'appuie sur les principes généraux qui s'imposent à toute loi de comportement, parmi lesquels les principes de la thermodynamique des milieux continus exprimés par : l'*équation de l'énergie* pour le premier principe, l'*inégalité fondamentale* pour le deuxième principe (section 3).

Le modèle de comportement thermoélastique est obtenu à partir de l'hypothèse que les valeurs actuelles de la température et du tenseur des déformations de l'élément de matière suffisent à définir l'état de celui-ci. L'inégalité fondamentale fournit alors la loi de comportement thermoélastique en représentation lagrangienne. L'énergie libre apparaît comme le *potentiel thermodynamique*, fonction des valeurs actuelles de la température et du tenseur des déformations. Le tenseur des contraintes s'en déduit par dérivation par rapport au tenseur des déformations (section 4).

Lorsque la *déformation* est *infinitésimale* et la variation de température *petite*, cette loi de comportement peut être linéarisée : c'est la linéarisation physique de la relation entre contraintes, déformations et variation de température. Si, de plus, la *transformation* est *infinitésimale*, la linéarisation peut être poursuivie : c'est la linéarisation géométrique. Elle aboutit à une relation linéaire entre le tenseur des contraintes de Cauchy, le tenseur des déformations linéarisé et la variation de température (section 5).

La loi de comportement linéarisée fait intervenir des *modules* élastiques et des *coefficients de dilatation thermique*, caractéristiques physiques intrinsèques du matériau, dont le nombre est réduit par les *symétries matérielles* et qui vérifient la condition de *stabilité* du matériau. La thermoélasticité linéaire du matériau isotrope est ainsi caractérisée par *deux* modules élastiques et *un* coefficient de dilatation thermique (section 5).

## Principales notations

Notation	Signification	1 <sup>ère</sup> formule
$E$	énergie interne du système	(3.1)
$\overset{\circ}{Q}$	taux de chaleur reçue	(3.1)
$r(\underline{x}, t)$	densité volumique de chaleur reçue	(3.5)
$e(\underline{x}, t)$	énergie interne massique	(3.9)
$\underline{q}(\underline{x}, t)$	courant de chaleur sortant dans $\kappa_t$	(3.14)
$T(\underline{x}, t)$	température absolue	(3.21)
$S$	entropie du système	(3.21)
$s(\underline{x}, t)$	entropie massique	(3.23)
$\psi$	énergie libre massique	(3.25)
$\Phi$	dissipation volumique	(3.27)
$\underline{q}_0(\underline{X}, t)$	courant de chaleur sortant dans $\kappa_0$	(3.35)
$\psi^*$	transformée de Legendre-Fenchel de $\psi$	(4.20)
$\varphi_p(\underline{e})$	=0 , liaison interne	(4.28)
$\eta_p$	multiplicateur de Lagrange associé à une liaison interne	(4.36)
$I'_1, I'_2, I'_3$	invariants de $\underline{e}$	(4.42)
$\underline{\underline{A}}$	tenseur d'élasticité	(5.3)
$\underline{\underline{k}}$	tenseur des coefficients thermiques	(5.3)
$\tau$	variation de température	(5.3)
$\lambda$	constante de Lamé	(5.12)
$\mu, G$	module de cisaillement	(5.12)
$E$	module de Young	(5.15)
$\nu$	coefficient de Poisson	(5.15)
$\alpha$	coefficient de dilatation thermique linéique	(5.15)
$K$	module élastique de compression	(5.39)

<b>1</b>	<b>De l'expérience à la loi de comportement . . . . .</b>	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>Constatations expérimentales . . . . .</b>	<b>13</b>
2.1	Généralités . . . . .	13
2.2	Expérience de traction simple . . . . .	15
2.3	Autres résultats expérimentaux . . . . .	16
2.4	Commentaires . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Éléments de thermodynamique des milieux continus . .</b>	<b>18</b>
3.1	Premier principe : équation de l'énergie . . . . .	18
3.2	Deuxième principe : inégalité fondamentale . . . . .	23
3.3	Expressions lagrangiennes . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Loi de comportement thermoélastique . . . . .</b>	<b>26</b>
4.1	Hypothèses de l'élasticité . . . . .	26
4.2	Loi de comportement thermoélastique . . . . .	28
4.3	Loi de comportement thermoélastique avec liaisons internes	32
4.4	Respect des symétries de la matière . . . . .	36
4.5	Matériau thermoélastique isotrope dans la configuration de référence . . . . .	37
4.6	Les liaisons internes du point de vue eulérien . . . . .	38
<b>5</b>	<b>Thermoélasticité linéaire en l'absence de liaisons internes</b>	<b>39</b>
5.1	Présentation . . . . .	39
5.2	Linéarisation physique . . . . .	39
5.3	Matériau thermoélastique linéaire isotrope . . . . .	43
5.4	Transformation infinitésimale : linéarisation géométrique	46
5.5	Stabilité du matériau thermoélastique . . . . .	51
5.6	Quelques valeurs typiques pour des matériaux usuels . .	54
5.7	Exemples de matériaux thermoélastiques anisotropes . .	54
<b>6</b>	<b>Aperçu historique . . . . .</b>	<b>57</b>
	<b>Récapitulatif des formules essentielles . . . . .</b>	<b>60</b>
	<b>Exercices . . . . .</b>	<b>62</b>



# Le comportement thermoélastique

## 1 De l'expérience à la loi de comportement

Le comportement thermoélastique des matériaux nous est révélé par des expériences quotidiennes : dilatations ou contractions linéiques et volumiques sous l'effet de variations de température, utilisation des propriétés élastiques des métaux, mais aussi de polymères, pour la fabrication de ressorts, clavettes et « clips » en tous genres . . . Ainsi, du point de vue phénoménologique, le concept de thermoélasticité est-il associé à une notion de réversibilité : la réponse du matériau à la sollicitation thermique et mécanique qui lui est imposée est instantanée et l'annulation de la sollicitation entraîne le retour du matériau à son état initial sans aucun effet rémanent.

L'objet du présent chapitre est, dans le cadre de la modélisation du milieu continu classique construite dans les chapitres précédents, de formuler pour un milieu tridimensionnel les relations existant *localement* entre le champ de déformation, le champ des efforts intérieurs et le champ de température, lorsque le matériau considéré est thermoélastique. En d'autres termes on se propose d'écrire la *loi de comportement du matériau thermoélastique*.

On a déjà évoqué, au chapitre VI (§ 4.2), certains principes qui régissent l'écriture des lois de comportement : isotropie de l'espace, respect des symétries de la matière ; mais l'énoncé précédent fait maintenant apparaître un principe essentiel, le *principe d'action locale* : les efforts intérieurs représentés dans la modélisation par les contraintes, qui correspondent à des actions purement locales (cf. chapitre V, § 3.4), ne sont reliés par la loi de comportement thermoélastique qu'à des grandeurs qui ne font intervenir que la particule considérée et les particules voisines.

En outre il va de soi que la formulation de la loi de comportement thermoélastique, comme celle de toute loi de comportement, devra être en accord avec les principes de la thermodynamique, c'est-à-dire avec l'inégalité introduite par le second principe. Pour mettre à profit cette information on introduira quelques notions sur la thermodynamique des milieux continus, renvoyant le lecteur à des ouvrages plus spécialisés pour l'approfondissement de ce domaine.

## 2 Constatations expérimentales

### 2.1 Généralités

Même si, comme on vient de le rappeler, elle doit obéir à des principes généraux qui en codifient, en quelque sorte, l'écriture, une loi de comportement est avant tout issue de constatations expérimentales.

On a vu au chapitre V (§ 3.3) que les équations de la dynamique s'écrivent comme :

- trois équations aux dérivées partielles du 1<sup>er</sup> ordre pour les équations de champs,
- trois équations au contour qui fournissent les conditions aux limites sur la frontière du système,

alors que la détermination de  $\underline{\underline{\sigma}}$  correspond à celle de six champs scalaires indépendants (composantes indépendantes de  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, \underline{t})$  symétrique). On voit que ces équations, en supposant les champs  $\underline{F}$ ,  $\underline{a}$ ,  $\underline{T}_\Omega$  connus, par exemple dans le cas de la statique (ou quasi-statique) où  $\underline{a}(\underline{x}, \underline{t}) = 0, \forall \underline{x} \in \Omega_t$ , ne permettent pas de déterminer le champ de contrainte  $\underline{\underline{\sigma}}$  dans le système étudié (éprouvette ou corps d'épreuve). De la même façon d'ailleurs, les conditions aux limites imposées en déplacements ne permettent pas d'y déterminer le champ de déformation.

Ainsi le problème posé n'est pas, à proprement parler, celui de la détermination de la loi de comportement à partir de l'expérience, mais se présente plus précisément comme l'*identification* d'une loi locale, dans le cadre d'une modélisation géométrique et mécanique, fondée sur des résultats expérimentaux à caractère global. Il apparaît dans toute sa généralité, d'une très grande complexité, sinon inextricable. Aussi l'on cherche, dans la pratique, à réaliser des expériences où l'on puisse retenir l'hypothèse d'homogénéité des champs concernés. L'homogénéité, *à l'échelle macroscopique considérée*, du matériau constitutif du corps d'épreuve doit évidemment être assurée et, par des conditions au contour suffisamment contraignantes, notamment par la géométrie choisie pour l'éprouvette, et par la forme des sollicitations, on espère imposer l'homogénéité du champ de contrainte et du champ de déformation ou, du moins, ne leur permettre que de faibles variations autour de l'état homogène. Par exemple, dans cet esprit, de nombreuses expériences classiques essaient de réaliser des champs de contraintes homogènes dans lesquels l'état de contrainte en chaque point est un des états simples étudiés au chapitre VI, § 3.5 : expériences de traction simple, de compression simple, de cisssion simple . . .

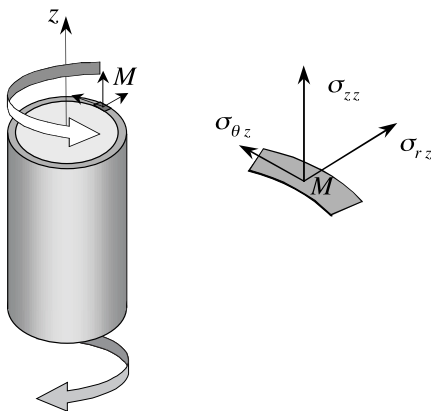


Figure 1 – Torsion d'un tube mince



L'expérience de torsion d'un *tube mince* de section circulaire (figure 1) vise ainsi à réaliser en chaque point de l'éprouvette un état de cisson simple dont les composantes dans la base orthonormée des coordonnées cylindriques soient constantes <sup>(1)</sup> :  $\sigma_{\theta z} = \sigma_{z\theta} = \text{constante}$ , autres  $\sigma_{ij} = 0$ . Des champs de contrainte plus complexes peuvent aussi être obtenus : expérience de traction-torsion d'un tube mince par exemple (figure 4).

À noter que l'on doit, dans toutes ces expériences, porter attention aux conditions thermiques. En règle générale on considère que les expériences sont faites à température constante dans le temps et homogène dans l'éprouvette.

## 2.2 Expérience de traction simple

La figure 2 représente une éprouvette typique constituée d'un métal homogène pour une expérience de traction simple. Elle est caractérisée par :

- des extrémités surdimensionnées (pour éviter les « effets d'extrémités »),
- des congés de raccordement entre la partie médiane et les extrémités (pour éviter les effets de concentration de contrainte que provoquent les angles vifs),
- une partie médiane cylindrique dans laquelle le champ de contrainte est supposé homogène, de traction simple parallèlement à l'axe de l'éprouvette <sup>(2)</sup>.

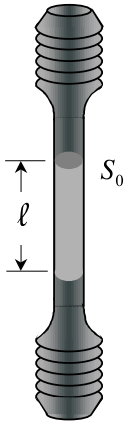


Figure 2 – Éprouvette pour une expérience de traction

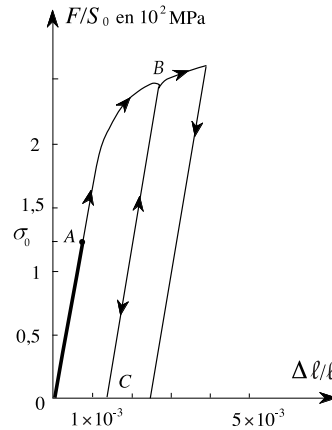


Figure 3 – Diagramme de traction pour un acier inox

L'expérience dans sa forme la plus simple consiste à enregistrer, en fonction de l'allongement relatif de la longueur initiale  $\ell_0$  marquée sur la partie utile de l'éprouvette

$$(\ell - \ell_0)/\ell_0 = \Delta\ell/\ell_0 ,$$

<sup>(1)</sup>Une telle expérience devra toutefois être analysée très précisément en fonction des propriétés de symétrie (isotropie, anisotropie, cf. § 5.7) du matériau constitutif.

<sup>(2)</sup>Le matériau constitutif (métal) est supposé isotrope. Pour les matériaux anisotropes l'expérience de traction simple « hors axes » nécessite des précautions particulières concernant notamment le montage de l'éprouvette.

l'évolution de la force de traction  $F$  ou du rapport  $F/S_0$ , où  $S_0$  désigne l'aire initiale de la section médiane.

La figure 3 donne un exemple d'un tel enregistrement réalisé pour un acier inox, à propos duquel on observe, en première analyse, les propriétés suivantes :

- a) indépendance du diagramme vis-à-vis de la vitesse de chargement, c'est-à-dire de  $(\overline{\Delta\ell/\ell_0})$ ;
- b) « réversibilité » de la partie  $OA$  du diagramme de charge : dans une décharge totale ou partielle effectuée après une charge jusqu'à un niveau inférieur au seuil  $\sigma_0$  correspondant au point  $A$  sur la courbe, on parcourt, dans le sens inverse, le même segment de la partie  $OA$  du diagramme de charge ;
- c) linéarité de cette partie réversible du diagramme ;
- d) au-delà du seuil  $\sigma_0$ , c'est-à-dire lorsque la charge initiale dépasse le point  $A$ , la décharge ultérieure est représentée sur le diagramme par une courbe différente de la courbe de charge : courbe  $OAB$  à la première charge, courbe  $BC$  à la décharge ; notamment après décharge totale, c'est-à-dire lorsque  $F$  est ramenée à zéro, l'éprouvette présente un allongement rémanent.

La partie réversible du diagramme de traction est, par définition, représentative du **comportement élastique** du matériau. Le point  $A$  et la valeur  $\sigma_0$  correspondent à la limite initiale d'élasticité dans cette expérience (cf. chapitre VI, § 4.1).

La linéarité observée pour le segment  $OA$  caractérise le comportement **élastique linéaire**.

Une autre constatation expérimentale doit également être rapportée qui n'apparaît pas sur le diagramme de la figure 3 : au cours de la traction on observe une réduction de la section de l'éprouvette, qui évolue linéairement quand on parcourt le segment  $OA$  du diagramme de charge ; cette variation de la section est elle aussi réversible sur  $OA$ .

## 2.3 Autres résultats expérimentaux

D'autres expériences mettent en évidence les mêmes caractéristiques de comportement : la compression simple d'une éprouvette ou la torsion simple d'un tube mince, pour citer des exemples où le chargement ne dépend que d'un paramètre (force ou couple). Dans la traction-torsion d'un tube mince le chargement dépend de deux paramètres (force et couple simultanément) et induit dans l'éprouvette un champ de contrainte dont les composantes dans la base orthonormée des coordonnées cylindriques sont supposées de la forme :  $\sigma_{zz} = \text{constante}$ ,  $\sigma_{\theta z} = \sigma_{z\theta} = \text{constante}$ , autres  $\sigma_{ij}$  nulles. On y met en évidence le domaine initial d'élasticité du matériau (cf. chapitre VI, § 4.1) à l'intérieur duquel il y a réversibilité des déformations subies par l'éprouvette ; la figure 4 donne l'exemple d'un domaine ainsi déterminé (expérience de traction-compression et torsion).

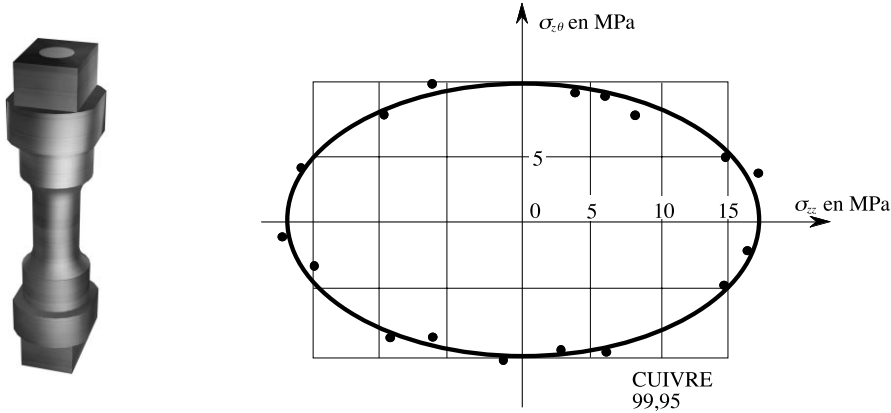


Figure 4 – Éprouvette pour l'expérience de traction-compression et torsion d'un tube mince; exemple de domaine initial d'élasticité déterminé expérimentalement (H.D. Bui, 1970)

## 2.4 Commentaires

Historiquement la découverte du comportement élastique linéaire est attribuée à Robert Hooke (mécanicien, physicien, astronome et naturaliste anglais, 1635-1703) dans les années 1660, à partir d'expériences sur des ressorts à boudin et spirales et sur la traction d'un fil métallique.

« Ut tensio sic vis »

est la phrase par laquelle Hooke énonça cette propriété dans un ouvrage paru en 1678<sup>(3)</sup><sup>(4)</sup>.

Il convient aussi à ce propos de citer Edme Mariotte (abbé, physicien français, 1620-1684), qui fit la même découverte que Hooke, indépendamment de celui-ci, vers 1680.

<sup>(3)</sup>Extrait du livre *The New Science of Strong Materials* par J.E. Gordon : « Hooke, like Horace, did not suffer unduly from modesty and he staked his claim to priority in a number of fields by publishing in 1676 *A decimate of the centesme of the inventions I intend to publish* among which was « The true theory of elasticity or springiness ». This heading was followed simply by the anagram « ceiiinossttuu ». The scientific public were left to make what they could of this until, in 1679, Hooke published *De potentia restitutiva, or of a spring* where the anagram was revealed as « Ut tensio \*sic uis » - « As the extension, so the force ». \* Tensio means, generally, not tension but extension in Latin. The truth seems to be that the Romans muddled up the two ideas. Literary writers probably never thought about the matter at all ».

<sup>(4)</sup>On peut rappeler que Galileo Galilei lui-même avait eu recours à une anagramme pour informer secrètement Johannes Kepler de sa découverte des phases de Vénus : « Haec immatura a me iam frustra leguntur o y » pour « Cynthiae figuras aemulatur mater amorum » (« En vain ces choses sont lues par moi prématurément » pour « La mère des amours imite les phases de Diane »).

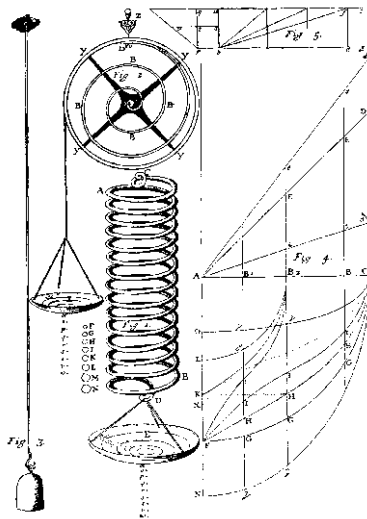


Figure 5 – Planche extraite de Lectures de Potentia Restitutiva, or of Spring, Explaining the Power of Springing Bodies, R. Hooke, (1678)

### 3 Éléments de thermodynamique des milieux continus

#### 3.1 Premier principe : équation de l'énergie

On considère un système  $\mathcal{S}$  occupant, dans la configuration actuelle  $\kappa_t$ , le domaine  $\mathcal{D}$  de volume  $\Omega_t$  et de frontière  $\partial\Omega_t$ , transportés convectivement de  $\mathcal{D}_0, \Omega_0, \partial\Omega_0$  dans la configuration de référence  $\kappa_0$ .

On suppose l'état thermodynamique de ce système déterminé par la connaissance de certains champs définis sur  $\kappa_t$  (ou sur  $\kappa_0$ ).

Pour simplifier l'exposé on se restreint au cas où le système  $\mathcal{S}$  n'échange avec l'extérieur que du travail et de la chaleur.

Le premier principe de la thermodynamique postule l'existence d'une fonction de l'état thermodynamique du système, appelée *énergie interne*, notée  $\mathbf{E}$ , ayant la dimension d'un travail telle que :

à chaque instant, la somme de la dérivée particulaire de l'énergie interne  $\mathbf{E}$  de  $\mathcal{S}$ , et de la dérivée particulaire de *l'énergie cinétique*  $K$  de  $\mathcal{S}$ , est égale à la somme de la puissance des efforts extérieurs exercés sur le système dans le mouvement réel,  $\mathcal{P}_{(e)}(\underline{U})$ , et du *taux de chaleur reçue* par le système,  $\dot{Q}$  :

$$(3.1) \quad \boxed{\dot{\mathbf{E}} + \dot{K} = \mathcal{P}_{(e)}(\underline{U}) + \overset{\circ}{Q}}$$

Cet énoncé est également valable pour tout sous-système  $S'$  de  $S$  :

$$(3.2) \quad \dot{\mathbf{E}}' + \dot{K}' = \mathcal{P}'_{(e)}(\underline{U}) + \overset{\circ}{Q}' .$$

Dans les formules (3.1) et (3.2) le signe «  $\overset{\circ}$  » pour le taux de chaleur reçue indique que cette grandeur n'est pas la dérivée particulière au sens du chapitre III (section 4) d'une fonction quantité de chaleur reçue qui serait définie explicitement en fonction de variables caractérisant l'état du système et son évolution à l'instant  $t$  ; cela signifie aussi que dans l'écriture différentielle, peut-être plus familière au lecteur, l'équation (3.1) se traduit par :

$$d\mathbf{E} + dK = d'W + d'Q$$

( $W$  désignant le travail), où les deux termes du second membre ne sont pas des différentielles exactes.

Pour le milieu continu tridimensionnel, la description des efforts extérieurs a été donnée au chapitre V (§ 2.2 et 3.1), en supposant que les particules du système n'exercent entre elles aucune action à distance :

- forces de volume définies par une densité massique  $\underline{F}(\underline{x}, t)$ ,
- forces de surface s'exerçant sur le contour de  $S$ , ou de  $S'$ , et définies par une densité surfacique  $\underline{T}_{\Omega}(\underline{x}, t)$  pour  $S$ ,  $\underline{T}_{\Omega'}$  pour  $S'$ .

On en a déduit l'expression de la puissance virtuelle des efforts extérieurs, en sorte que pour le mouvement réel on a, pour un sous-système quelconque :

$$(3.3) \quad \mathcal{P}'_{(e)}(\underline{U}) = \int_{\Omega'_t} \rho \underline{F}(\underline{x}, t) \cdot \underline{U} \, d\Omega_t + \int_{\partial\Omega'_t} \underline{T}_{\Omega'}(\underline{x}, t) \cdot \underline{U} \, da .$$

L'énergie cinétique a l'expression donnée au chapitre IV (§ 7.5) :

$$(3.4) \quad K' = \int_{\Omega'_t} \frac{1}{2} \rho(\underline{x}, t) \underline{U}^2(\underline{x}, t) d\Omega_t .$$

Pour  $\overset{\circ}{Q}$ , taux de chaleur reçue par le système  $S$ , on fait l'hypothèse qu'il résulte de l'addition de deux contributions :

- l'une **volumique**, qui exprime le taux de chaleur fournie à distance aux particules de  $S$  par l'extérieur de  $S$  et la production locale de chaleur par d'éventuelles transformations physiques, chimiques, ... ; elle se met sous la forme de l'intégrale sur  $\Omega_t$  d'une densité volumique  $r(\underline{x}, t)$  ;
- l'autre **surfactive**, intégrale sur la frontière de  $S$  d'une densité surfacique  $h_{\Omega}(\underline{x}, t)$ .

Ainsi :

$$(3.5) \quad \overset{\circ}{Q} = \int_{\partial\Omega_t} h_{\Omega}(\underline{x}, t) da + \int_{\Omega_t} r(\underline{x}, t) d\Omega_t .$$

Pour  $\overset{\circ}{Q}'$ , relatif à un sous-système  $S'$  quelconque, on fait l'hypothèse qu'il n'y a **pas d'échange de chaleur à distance** entre les particules de  $S$ , et l'on postule une décomposition semblable.

- La contribution **volumique** pour  $S'$  est donc l'intégrale sur  $\Omega'_t$  de la même densité volumique  $r(\underline{x}, t)$  définie pour  $S$ , quel que soit le sous-système  $S'$ , puisqu'il n'y a pas d'échange de chaleur à distance entre les particules de  $S$ .
- La contribution **surfactive** pour  $S'$  est l'intégrale sur  $\partial\Omega'_t$  d'une densité surfacique  $h_{\Omega'}(\underline{x}, t)$ . Celle-ci, n'apparaissant pas dans (3.5), ne provient que des particules de  $(S - S')$  : les échanges de chaleur à distance entre particules du système étant exclus,  $h_{\Omega'}(\underline{x}, t)$  ne dépend que des éléments locaux du premier ordre de  $\partial\Omega'_t$ , c'est-à-dire que  $h_{\Omega'}(\underline{x}, t)$  ne dépend de  $\Omega'_t$  qu'à travers  $\underline{n}(\underline{x})$  :

$$(3.6) \quad h_{\Omega'}(\underline{x}, t) = h(\underline{x}, t, \underline{n}(\underline{x})) .$$

D'où :

$$(3.7) \quad \overset{\circ}{Q}' = \int_{\partial\Omega'_t} h(\underline{x}, t, \underline{n}(\underline{x})) da + \int_{\Omega'_t} r(\underline{x}, t) d\Omega_t .$$

On suppose **l'additivité** de l'énergie interne  $\mathbf{E}$ . Plus précisément on suppose que pour deux sous-systèmes  $S'_1$  et  $S'_2$  complémentaires dans  $S$ , on a :

$$(3.8) \quad \dot{\mathbf{E}}'_1 + \dot{\mathbf{E}}'_2 = \dot{\mathbf{E}}$$

que l'on écrit aussi :

$$\mathbf{E}'_1 + \mathbf{E}'_2 = \mathbf{E}$$

puisque seules les **variations** (ici dérivées particulières) interviennent dans les formules.

On introduit alors la densité massique d'énergie interne  $e(\underline{x}, t)$ , appelée aussi énergie interne spécifique, et l'on a :

$$(3.9) \quad \mathbf{E}' = \int_{\Omega'_t} \rho(\underline{x}, t) e(\underline{x}, t) d\Omega_t \quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{E}}' = \int_{\Omega'_t} \rho(\underline{x}, t) \dot{e}(\underline{x}, t) d\Omega_t .$$

La formule (3.2) s'explique en simplifiant les notations<sup>(5)</sup> :

$$(3.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall S' \subset S, \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega'_t} \rho \left( e + \frac{U^2}{2} \right) d\Omega_t = \int_{\Omega'_t} (\rho \underline{F} \cdot \underline{U} + r) d\Omega_t + \int_{\partial\Omega'_t} (\underline{T}_{\Omega'} \cdot \underline{U} + h(\underline{n})) da . \end{array} \right.$$

<sup>(5)</sup>On supprime, sous les signes « intégrales », les dépendances des diverses grandeurs en fonction de  $\underline{x}$  et de  $t$

Si le champ de vitesse réel  $\underline{U}$  est continu et continûment différentiable on peut, dans (3.1) et (3.2), appliquer le théorème de l'énergie cinétique (chapitre IV, § 7.5), qui s'écrit :

$$\begin{cases} \forall S' \subset \mathcal{S}, \\ \mathcal{P}'_{(e)}(\underline{U}) + \mathcal{P}'_{(i)}(\underline{U}) = \dot{K}' \end{cases}$$

d'où, par substitution dans (3.1) et (3.2) :

$$(3.11) \quad \dot{\underline{E}} = \overset{\circ}{\dot{Q}} - \mathcal{P}'_{(i)}(\underline{U})$$

$$(3.12) \quad \dot{\underline{E}}' = \overset{\circ}{\dot{Q}}' - \mathcal{P}'_{(i)}(\underline{U}) .$$

On peut alors remplacer  $\mathcal{P}'_{(i)}(\underline{U})$  par son expression au moyen de la représentation des efforts intérieurs par les contraintes de Cauchy et l'on obtient :

$$(3.13) \quad \begin{cases} \forall S' \subset \mathcal{S}, \\ \int_{\Omega'_t} \rho(\underline{x}, t) \dot{\underline{e}}(\underline{x}, t) \, d\Omega_t = \int_{\Omega'_t} (\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) : \underline{\underline{d}}(\underline{x}, t) + r(\underline{x}, t)) \, d\Omega_t + \int_{\partial\Omega'_t} h(\underline{x}, t, \underline{n}(\underline{x})) \, da . \end{cases}$$

L'équation (3.10) (ou (3.13) à travers le théorème de l'énergie cinétique), exprime le premier principe de la thermodynamique sous **forme globale (équation de bilan)**.

À partir de (3.13) on peut obtenir la forme locale du premier principe en s'appuyant sur le fait que cette équation est vraie pour tout sous-système  $S'$ .

On peut en effet démontrer que, puisque (3.13) est vraie  $\forall \Omega'_t$ , la densité surfacique  $h(\underline{x}, t, \underline{n}(\underline{x}))$ , supposée continue et de classe  $C^1$ , dépend linéairement de  $\underline{n}(\underline{x})$  et a la forme d'un flux que l'on écrit :

$$(3.14) \quad h(\underline{x}, t, \underline{n}(\underline{x})) = -\underline{q}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x}) ;$$

$\underline{q}(\underline{x}, t)$  est le vecteur courant de chaleur **sortant**<sup>(6)</sup> au point  $M$ . Les échanges de chaleur entre les particules du système se font par conduction.

Ainsi, en conséquence du premier principe,  $\overset{\circ}{\dot{Q}}'$  donné par (3.7) est nécessairement de la forme :

$$(3.15) \quad \overset{\circ}{\dot{Q}}' = - \int_{\partial\Omega'_t} \underline{q}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x}) \, da + \int_{\Omega'_t} r(\underline{x}, t) \, d\Omega_t .$$

Par application de la formule de la divergence, la dernière intégrale de (3.13) est, compte tenu de (3.14), transformée en une intégrale sur  $\Omega'_t$ . On en déduit l'expression locale du premier principe de la thermodynamique en représentation eulérienne qui est appelée : **équation de l'énergie**

$$\rho(\underline{x}, t) \dot{\underline{e}}(\underline{x}, t) = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) : \underline{\underline{d}}(\underline{x}, t) + r(\underline{x}, t) - \operatorname{div} \underline{q}(\underline{x}, t)$$

---

<sup>(6)</sup>L'adjectif « sortant » veut rappeler que  $h$  correspond à la chaleur reçue par le système de normale extérieure  $\underline{n}$  et que l'équation (3.14) comporte un signe moins. Cette convention est la plus couramment adaptée.

que l'on retiendra sous la forme

(3.16)

$$\rho \dot{e} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} + r - \operatorname{div} \underline{q}$$

### Remarques

- La formule (3.14) est parfois connue sous le nom de « lemme du tétraèdre » en raison de sa démonstration classique, apparentée à celle de la tensorialité des contraintes (chapitre V, § 3.6). L'équation (3.13), valable  $\forall \Omega'_t$ , est appliquée à un sous-système infinitésimal entourant un point  $M$  quelconque intérieur à  $\Omega_t$  : ce sous-système a la forme d'un tétraèdre construit sur les trois axes de coordonnées orthonormées, dont les arêtes ont respectivement pour longueur  $dx_1, dx_2$  et  $dx_3$  (figure 6).

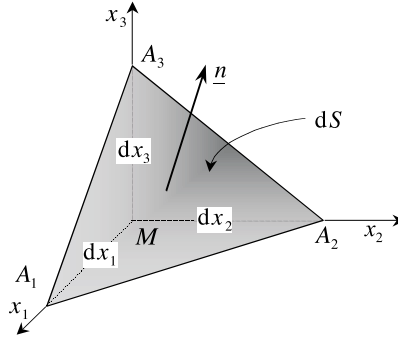


Figure 6 – « Lemme du tétraèdre »

Pour ce sous-système infinitésimal, l'intégrale de volume dans (3.13) est du 3<sup>ème</sup> ordre en  $dx_i$ . L'intégrale de surface est la somme de quatre termes qui correspondent aux quatre faces  $MA_1A_2, MA_2A_3, MA_3A_1$  et  $A_1A_2A_3$  du tétraèdre : l'équation (3.13) impose que la somme de ces quatre termes soit, elle aussi, du 3<sup>ème</sup> ordre, c'est-à-dire que la somme des termes du 2<sup>ème</sup> ordre soit nulle. Il vient ainsi, en simplifiant :

$$(3.17) \quad \begin{cases} \frac{1}{2} dx_2 dx_3 h(-\underline{e}_1) + \frac{1}{2} dx_3 dx_1 h(-\underline{e}_2) + \frac{1}{2} dx_1 dx_2 h(-\underline{e}_3) + dS h(\underline{n}) = 0 \\ \underline{n} dS = \frac{1}{2} (\underline{e}_1 dx_2 dx_3 + \underline{e}_2 dx_3 dx_1 + \underline{e}_3 dx_1 dx_2) . \end{cases}$$

En posant

$$(3.18) \quad \underline{q} = \underline{e}_1 h(-\underline{e}_1) + \underline{e}_2 h(-\underline{e}_2) + \underline{e}_3 h(-\underline{e}_3) ,$$

l'équation (3.17) s'écrit finalement :

$$(3.19) \quad h(\underline{n}) = -\underline{q} \cdot \underline{n}$$

ce qui établit la formule (3.14).

- L'équation (3.14) démontrée ci-dessus établit l'existence, sur le domaine  $\Omega_t$ , du champ vectoriel  $\underline{q}(\underline{x}, t)$  appelé vecteur courant de chaleur sortant. On peut alors reproduire le raisonnement proposé au chapitre V (§ 3.5, figure 8) pour l'interprétation physique de la condition au contour sur le champ de contrainte  $\underline{\underline{\sigma}}$ . Ici, il permet de montrer que, sur la frontière  $\partial\Omega_t$  de  $S$ , le champ  $\underline{q}$  satisfait, à titre de condition aux limites, l'équation :



$$(3.20) \quad \underline{q}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x}) = -h_{\Omega}(\underline{x}, t) .$$

- Ce résultat (3.14) repose sur l'hypothèse d'additivité de l'énergie interne. Physiquement, en se reportant à la formule (3.8), on voit que l'additivité de l'énergie interne n'introduit en fait qu'une hypothèse supplémentaire en plus de celles déjà faites qui excluent à la fois les actions et les échanges de chaleur à distance entre les particules de  $\mathcal{S}$  : à la frontière entre deux sous-systèmes complémentaires, le bilan global des échanges de travail et de chaleur entre les deux sous-systèmes est nul c'est-à-dire que la puissance développée par les actions intérieures de contact entre les deux sous-systèmes dans une éventuelle discontinuité du champ de vitesse réel est compensée localement par un taux de chaleur équivalent reçu par les deux sous-systèmes.

Une démarche différente aurait pu être adoptée : poser comme hypothèse que les échanges de chaleur entre les particules du système se font uniquement par conduction selon (3.14), en déduire l'additivité de l'énergie interne et finalement l'équation de l'énergie (3.16).

### 3.2 Deuxième principe : inégalité fondamentale

Le deuxième principe de la thermodynamique des milieux continus postule l'existence d'un repérage universel de température, appelé **température absolue** notée  $T$ , positive, et d'une fonction de l'état thermodynamique du système, additive, appelée **entropie**, notée  $\mathcal{S}$ , tels que :

à chaque instant, pour le système  $\mathcal{S}$ , et pour tout sous-système  $\mathcal{S}'$  de  $\mathcal{S}$  on a les inégalités fondamentales :

$$(3.21) \quad \frac{d\mathcal{S}}{dt} = \dot{\mathcal{S}} \geq \int_{\Omega_t} \frac{r(\underline{x}, t)}{T(\underline{x}, t)} d\Omega_t - \int_{\partial\Omega_t} \frac{\underline{q}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x})}{T(\underline{x}, t)} da$$

et

$$(3.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}, \\ \dot{\mathcal{S}}' \geq \int_{\Omega'_t} \frac{r(\underline{x}, t)}{T(\underline{x}, t)} d\Omega'_t - \int_{\partial\Omega'_t} \frac{\underline{q}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x})}{T(\underline{x}, t)} da . \end{array} \right.$$

On désigne par  $s$  l'entropie massique (ou spécifique), d'où :

$$\mathcal{S}' = \int_{\Omega'_t} \rho(\underline{x}, t) s(\underline{x}, t) d\Omega_t \quad \text{et} \quad \dot{\mathcal{S}}' = \int_{\Omega'_t} \rho(\underline{x}, t) \dot{s}(\underline{x}, t) d\Omega_t .$$

Par application du théorème de la divergence, (3.21) et (3.22) se transforment en allégeant les notations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}, \\ \int_{\Omega'_t} (\rho \dot{s} + \text{div}(\underline{q}/T) - r/T) d\Omega_t \geq 0 \end{array} \right.$$

dont on déduit la forme locale de l'inégalité fondamentale :

$$(3.23) \quad \rho \dot{s} + \text{div}(\underline{q}/T) - r/T \geq 0 .$$

En tenant compte, dans cette formule, de l'équation de l'énergie (3.16) on obtient (puisque  $T > 0$ ) :

$$(3.24) \quad \underline{\sigma} : \underline{d} + \rho(T\dot{s} - \dot{e}) - \frac{\underline{q}}{T} \cdot \underline{\text{grad}} T \geq 0 .$$

Cette inégalité essentielle peut être transformée en introduisant la fonction thermodynamique appelée *énergie libre* (de Helmholtz); l'énergie libre massique  $\psi$  est définie par :

$$(3.25) \quad \psi = e - T s .$$

On obtient l'inégalité dite de *Clausius-Duhem*<sup>(7)</sup> :

$$(3.26) \quad \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} - \rho(\dot{\psi} + s\dot{T}) - \frac{q}{T} \cdot \underline{\underline{\text{grad}}}T \geq 0$$

Le premier membre de (3.24) et (3.26) est souvent noté  $\Phi$ ; c'est la *dissipation* volumique dans la configuration actuelle. On la décompose sous la forme :

$$(3.27) \quad \Phi = \Phi_1 + \Phi_2$$

où

$$(3.28) \quad \Phi_1 = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} - \rho(\dot{\psi} + s\dot{T})$$

et

$$(3.29) \quad \Phi_2 = -\frac{q}{T} \cdot \underline{\underline{\text{grad}}}T$$

sont respectivement la *dissipation intrinsèque* volumique et la *dissipation thermique* volumique dans la configuration actuelle.

L'inégalité fondamentale s'énonce donc : *la dissipation est non-négative*.

On définit la *réversibilité thermodynamique* d'une évolution du système  $\mathcal{S}$  : à tout instant, en tout point du système, on a

$$(3.30) \quad \Phi_1 = 0 \quad \text{et} \quad \Phi_2 = 0 .$$

On peut remarquer que pour les évolutions adiabatiques, où  $\underline{q} = 0$  en tout point et à chaque instant, et pour les évolutions isothermes où  $T$  est constante dans le système et dans le temps, on a  $\Phi_2 = 0$ . (Ce ne sont évidemment pas les seuls cas où  $\Phi_2 = 0$ ).

### 3.3 Expressions lagrangiennes

Tous les raisonnements des paragraphes précédents ont été menés sur la configuration actuelle  $\kappa_t$ . Les formules (3.16) et (3.24), ou (3.26), sont les expressions locales, eulériennes du premier et du deuxième principe de la thermodynamique des milieux continus.

La formulation lagrangienne de ces principes s'obtient, du point de vue global du système ou d'un sous-système, en transportant dans la configuration de référence

<sup>(7)</sup>R. Clausius (1822-1888); P. Duhem (1861-1916).

les intégrales de l'égalité (3.10) et de l'inégalité (3.22). Les expressions locales s'en déduisent alors par des raisonnements semblables à ceux qui précèdent.

Plus simplement, on remarque que les premiers membres des expressions locales eulériennes (3.16), (3.24) et (3.26) ne sont autres que les densités volumiques des intégrales exprimant (3.10) et (3.22) sur la configuration actuelle. Les expressions locales lagrangiennes sont les mêmes égalité et inégalités que (3.16) (3.24) et (3.26) pour les densités volumiques des mêmes grandeurs sur la configuration de référence, qu'il convient d'exprimer en variables lagrangiennes.

On s'intéresse d'abord à l'inégalité fondamentale (3.24) et à l'inégalité de Clausius-Duhem (3.26). La densité volumique lagrangienne homologue de (3.24) résulte de l'expression de la conservation de la masse  $dm = \rho_0(\underline{X}) d\Omega_0 = \rho(\underline{x}, t) d\Omega_t$  ; il vient ainsi :

$$(3.31) \quad \frac{\rho_0}{\rho} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} + \rho_0(T\dot{\mathbf{s}} - \dot{\mathbf{e}}) - \frac{\rho_0}{\rho} \frac{q}{T} \cdot \underline{\underline{\text{grad}}} T \geq 0 ,$$

que l'on doit exprimer en variables lagrangiennes.

Le deuxième terme de (3.31) est, de ce point de vue, le plus simple. Les fonctions  $T$ ,  $\mathbf{e}$  et  $\mathbf{s}$  sont des grandeurs physiques liées à la matière ; les expressions lagrangiennes

$$(3.32) \quad \begin{cases} T(\underline{X}, t) = T(\underline{x}, t) & , \quad \underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t) \\ \mathbf{e}(\underline{X}, t) = \mathbf{e}(\underline{x}, t) & , \quad \underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t) \\ \mathbf{s}(\underline{X}, t) = \mathbf{s}(\underline{x}, t) & , \quad \underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t) \end{cases}$$

sont celles de la température et des densités **massiques** d'énergie interne et d'entropie dans la configuration de référence à l'instant  $t$ . La dérivation particulière est conservée dans le passage de la description eulérienne à la description lagrangienne.

L'expression lagrangienne du premier terme de (3.31) résulte de la définition du tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff (chapitre V, § 4.1). On rappelle en effet que l'on a, en des points homologues de  $\kappa_0$  et  $\kappa_t$  :

$$(3.33) \quad \begin{cases} \frac{\underline{\underline{\pi}}(\underline{X}, t) : \underline{\underline{\dot{e}}}(\underline{X}, t)}{\rho_0(\underline{X})} = \frac{\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) : \underline{\underline{d}}(\underline{x}, t)}{\rho(\underline{x}, t)} \\ \underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t) . \end{cases}$$

Enfin, pour le troisième terme de (3.31), la correspondance entre gradients lagrangien et eulérien en des points homologues<sup>(8)</sup> permet d'écrire avec (3.32) :

$$(3.34) \quad \frac{\rho_0(\underline{X})}{\rho(\underline{x}, t)} \frac{q(\underline{x}, t)}{T(\underline{x}, t)} \cdot \underline{\underline{\text{grad}}} T(\underline{x}, t) = \frac{1}{T(\underline{X}, t)} (J(\underline{X}, t) \underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{X}, t) \cdot \underline{\underline{q}}(\underline{x}, t)) \cdot \underline{\underline{\nabla}} T(\underline{X}, t)$$

<sup>(8)</sup>On rappelle les relations établies au chapitre II en des points homologues :  
 $\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t)$  ,  $\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \underline{\underline{\nabla}} \underline{\phi}(\underline{X}, t)$  ,  $\rho_0(\underline{X})/\rho(\underline{x}, t) = \det \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = J(\underline{X}, t)$  ,  
 $\underline{\underline{\nabla}} T(\underline{X}, t) = \underline{\underline{\text{grad}}} T(\underline{x}, t) \cdot \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t)$  ,  $d\underline{\underline{a}} = J(\underline{X}, t) {}^t \underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{X}, t) \cdot d\underline{\underline{A}}$  .

qui conduit à introduire, dans  $\kappa_0$ , le vecteur  $\underline{q}_0(\underline{X}, t)$  défini par

$$(3.35) \quad \underline{q}_0(\underline{X}, t) = J(\underline{X}, t) \underline{F}^{-1}(\underline{X}, t) \cdot \underline{q}(\underline{x}, t) .$$

Ce vecteur  $\underline{q}_0(\underline{X}, t)$  s'interprète comme le vecteur courant de chaleur sortant dans la configuration de référence à l'instant  $t$  car on vérifie que, pour des éléments d'aire  $dA$  et  $da$  homologues par transport convectif, on a :

$$(3.36) \quad \underline{q}_0(\underline{X}, t) \cdot d\underline{A} = \underline{q}(\underline{x}, t) \cdot d\underline{a} .$$

Finalement l'expression lagrangienne de l'inégalité fondamentale (3.24) est :

$$(3.37) \quad \underline{\pi} : \underline{\dot{\underline{e}}} + \rho_0(T \dot{\underline{s}} - \dot{\underline{e}}) - \frac{q_0}{T} \cdot \underline{\nabla T} \geq 0 .$$

De même l'expression lagrangienne de l'inégalité de Clausius-Duhem (3.26) s'écrit :

$$(3.38) \quad \underline{\pi} : \underline{\dot{\underline{e}}} - \rho_0(\dot{\underline{\psi}} + \underline{s} \dot{T}) - \frac{q_0}{T} \cdot \underline{\nabla T} \geq 0$$

L'expression lagrangienne de l'équation de l'énergie (3.16) nécessite de compléter la description lagrangienne du taux de chaleur reçue (3.15) en introduisant  $r_0(\underline{X}, t)$  défini par :

$$(3.39) \quad r_0(\underline{X}, t) = J(\underline{X}, t) r(\underline{x}, t) \quad , \quad \underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t)$$

d'où

$$(3.40) \quad \dot{Q}' = - \int_{\partial\Omega'_0} \underline{q}_0(\underline{X}, t) \cdot d\underline{A} + \int_{\Omega'_0} r_0(\underline{X}, t) d\Omega_0 .$$

On remarque que (3.36) implique que

$$(3.41) \quad \operatorname{div}_{\underline{x}} \underline{q}_0(\underline{X}, t) = J(\underline{X}, t) \operatorname{div} \underline{q}(\underline{x}, t) \quad , \quad \underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t)$$

et l'expression lagrangienne de l'équation de l'énergie s'écrit :

$$(3.42) \quad \rho_0 \dot{\underline{e}} = \underline{\pi} : \underline{\dot{\underline{e}}} + r_0 - \operatorname{div}_{\underline{x}} \underline{q}_0$$

## 4 Loi de comportement thermoélastique

### 4.1 Hypothèses de l'élasticité

La définition du comportement thermoélastique est donnée en description lagrangienne. On pose que, pour la particule  $\underline{X}$  du matériau considéré, à l'instant  $t$ , les valeurs de l'énergie interne massique  $e(\underline{X}, t)$ , de l'entropie massique  $s(\underline{X}, t)$  et du tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff  $\underline{\pi}(\underline{X}, t)$  sont entièrement déterminées par

la connaissance de la température  $T(\underline{X}, t)$  et du tenseur des déformations  $\underline{\underline{e}}(\underline{X}, t)$  pour cette particule, à cet instant. Il en va évidemment de même pour l'énergie libre massique  $\psi(\underline{X}, t)$ .

$$(4.1) \quad \begin{cases} \mathbf{e}(\underline{X}, t) = \mathbf{e}(T(\underline{X}, t), \underline{\underline{e}}(\underline{X}, t)) \\ \mathbf{s}(\underline{X}, t) = \mathbf{s}(T(\underline{X}, t), \underline{\underline{e}}(\underline{X}, t)) \\ \underline{\underline{\pi}}(\underline{X}, t) = \underline{\underline{\pi}}(T(\underline{X}, t), \underline{\underline{e}}(\underline{X}, t)) \\ \psi(\underline{X}, t) = \psi(T(\underline{X}, t), \underline{\underline{e}}(\underline{X}, t)) \end{cases}$$

On adoptera dans la suite, pour simplifier l'écriture, les notations :

$$(4.2) \quad \psi = \psi(T, \underline{\underline{e}}) \quad , \quad \underline{\underline{\pi}} = \underline{\underline{\pi}}(T, \underline{\underline{e}}) \quad , \quad \text{etc.}$$

Du point de vue mathématique, les écritures (4.1) ou (4.2) ne sont pas totalement correctes. En effet, considérant à titre d'exemple la fonction  $\psi$  dans (4.2), celle-ci n'est pas, sauf dans le cas particulier du matériau isotrope (§ 4.5), une fonction du *seul* tenseur  $\underline{\underline{e}}$  (au sens indiqué au chapitre VI, § 2.7 et 4.2) comme le laisserait penser la lecture stricte de (4.2) ; elle dépend aussi de l'orientation dans l'espace d'un repère significatif pour la particule de matériau considérée à l'instant de référence. Une écriture complète nécessiterait de faire figurer cette information dans les arguments de (4.2), ou d'utiliser une écriture matricielle telle que (4.3) tout en conservant aux formules leur caractère intrinsèque dans les changements de repères. On y reviendra au paragraphe 4.4.

Motivées par les résultats expérimentaux tels que ceux décrits au paragraphe 2.2 sur l'expérience de traction simple, les hypothèses (4.1) sont formulées de façon à satisfaire le *principe d'isotropie de l'espace*.

En effet, si l'on considère à titre d'exemple la fonction  $\mathbf{e}$ , l'expérience, qui ne fait pas apparaître de dépendance vis-à-vis du temps, suggère a priori d'écrire  $\mathbf{e}$  comme une fonction de la température  $T$  et du gradient  $\underline{\underline{F}}$  de la transformation subie par l'élément considéré. Un repère  $R$  étant choisi dans le référentiel on calcule  $\mathbf{e}$  à partir des composantes de  $\underline{\underline{F}}$  :

$$(4.3) \quad \mathbf{e} = \mathbf{e}_R(T, \underline{\underline{F}})$$

où  $\underline{\underline{F}}$  désigne la matrice de  $\underline{\underline{F}}$  dans le repère  $R$  supposé, pour simplifier, orthonormé.

Le principe d'*isotropie de l'espace* déjà introduit au chapitre VI (§ 4.2) implique ici que l'énergie interne massique de l'élément ne dépend pas de son orientation dans l'espace. Plus précisément, si l'on fait subir, à partir de la même configuration initiale, au même élément de matière, deux transformations qui ne diffèrent que par une isométrie les valeurs de  $\mathbf{e}$  dans les deux configurations actuelles correspondantes sont égales. Ainsi la fonction  $\mathbf{e}_R$  possède la propriété mathématique :

$$(4.4) \quad \begin{cases} \forall \underline{\underline{F}}, \forall \underline{\underline{\tilde{\alpha}}} \text{ telle que } {}^t \underline{\underline{\tilde{\alpha}}} \cdot \underline{\underline{\tilde{\alpha}}} = \underline{\underline{\mathbf{1}}} \\ \mathbf{e}_R(T, \underline{\underline{F}}) = \mathbf{e}_R(T, \underline{\underline{\tilde{\alpha}}} \cdot \underline{\underline{F}}) \end{cases}$$

En rappelant la décomposition polaire de  $\underline{\underline{F}}$  établie au chapitre II (§ 3.4 et 4.5) :

$$(4.5) \quad \begin{cases} \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{S}} \\ {}^t \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{\mathbf{1}}} \quad , \quad \det \underline{\underline{R}} = +1 \quad , \quad {}^t \underline{\underline{S}} = \underline{\underline{S}} \end{cases}$$

on voit que l'on peut, dans (4.4), choisir  $\underline{\underline{\tilde{\alpha}}} = {}^t \underline{\underline{R}}$ , on met alors en évidence que  $\mathbf{e}_R(T, \underline{\underline{F}})$  ne dépend que de  $\underline{\underline{\tilde{S}}}$  matrice de la déformation pure, ou encore de  $\underline{\underline{\tilde{C}}}$  ou de  $\underline{\underline{\tilde{\epsilon}}}$  :

$$(4.6) \quad \mathbf{e}_R(T, \underline{\underline{F}}) = \mathbf{e}_R(T, \underline{\underline{\tilde{S}}}) \quad .$$

Le résultat obtenu est évidemment valable de la même manière pour les fonctions  $\mathbf{s}$  et  $\psi$ .

En ce qui concerne la contrainte le raisonnement est analogue. La dépendance naturellement suggérée par l'expérience est, dans le repère  $R$  :

$$(4.7) \quad \underline{\underline{\tilde{\sigma}}} = \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_R(T, \underline{\underline{\tilde{F}}}) .$$

Le principe d'isotropie de l'espace fournit la propriété mathématique à satisfaire par la fonction matricielle  $\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_R$  dans le repère  $R$  :

$$(4.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \underline{\underline{\tilde{F}}}, \forall \underline{\underline{\tilde{\alpha}}} \text{ telle que } {}^t \underline{\underline{\tilde{\alpha}}} \cdot \underline{\underline{\tilde{\alpha}}} = \underline{\underline{\mathbb{1}}} \\ \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_R(T, \underline{\underline{\tilde{\alpha}}} \cdot \underline{\underline{\tilde{F}}}) = \underline{\underline{\tilde{\alpha}}} \cdot \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_R(T, \underline{\underline{\tilde{F}}}) \cdot {}^t \underline{\underline{\tilde{\alpha}}} \end{array} \right.$$

d'où en choisissant  $\underline{\underline{\tilde{\alpha}}} = {}^t \underline{\underline{\tilde{R}}}$  défini par (4.5), la relation :

$$\underline{\underline{\tilde{F}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_R(T, \underline{\underline{\tilde{F}}}) \cdot {}^t \underline{\underline{\tilde{F}}}^{-1} = \underline{\underline{\tilde{S}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_R(T, \underline{\underline{\tilde{S}}}) \cdot \underline{\underline{\tilde{S}}}^{-1}$$

ou encore, en introduisant le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff

$$(4.9) \quad \underline{\underline{\tilde{\pi}}}_R(T, \underline{\underline{\tilde{F}}}) = (\det \underline{\underline{S}}) \underline{\underline{\tilde{S}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_R(T, \underline{\underline{\tilde{S}}}) \cdot \underline{\underline{\tilde{S}}}^{-1} = \underline{\underline{\pi}}_R(T, \underline{\underline{\tilde{S}}})$$

où l'on retrouve le résultat annoncé en (4.1).

## 4.2 Loi de comportement thermoélastique en l'absence de liaisons internes

### Potentiel thermodynamique

On reprend l'inégalité de Clausius-Duhem dans sa formulation lagrangienne (3.38). Cette inégalité régit toutes les évolutions thermoélastiques réelles de la particule considérée : à partir de son état défini par les variables  $T$  et  $\underline{\underline{e}}$  dans lequel le courant de chaleur sortant est  $\underline{\underline{q}}_0$  avec le gradient de température  $\underline{\underline{\nabla T}}$ , ces évolutions sont définies par  $\dot{T}$  et  $\dot{\underline{\underline{e}}}$ .

L'inégalité (3.38) fait apparaître la dérivée particulière  $\dot{\psi}$  de  $\psi(T, \underline{\underline{e}})$ . Celle-ci s'explique en base quelconque en fonction des composantes  $e_{ij}$  de  $\underline{\underline{e}}$  :

$$(4.10) \quad \dot{\psi} = \frac{\partial \psi(T, \underline{\underline{e}})}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \psi(T, \underline{\underline{e}})}{\partial e_{ij}} \dot{e}_{ij} .$$

De façon générale,  $f(\underline{\underline{t}})$  étant une fonction scalaire, différentiable, des composantes d'un tenseur  $\underline{\underline{t}} = t_{ij} \underline{\underline{e}}_i \otimes \underline{\underline{e}}_j$  quelconque, on définit le tenseur d'ordre deux  $\frac{\partial f(\underline{\underline{t}})}{\partial \underline{\underline{t}}}$  par les relations :

$$(4.11a) \quad \frac{\partial f(\underline{\underline{t}})}{\partial \underline{\underline{t}}} = \frac{\partial f(\underline{\underline{t}})}{\partial t_{ij}} \underline{\underline{e}}_j \otimes \underline{\underline{e}}_i$$

d'où

$$(4.11b) \quad \dot{f} = \frac{\partial f(\underline{\underline{t}})}{\partial t_{ij}} \dot{t}_{ij} = \frac{\partial f(\underline{\underline{t}})}{\partial \underline{\underline{t}}} : \dot{\underline{\underline{t}}} .$$

Cette définition générale, appliquée à  $\psi(T, \underline{\underline{e}})$  introduit le tenseur  $\frac{\partial \psi(T, \underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}}$

$$(4.12a) \quad \frac{\partial \psi(T, \underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}} = \frac{\partial \psi(T, \underline{\underline{e}})}{\partial e_{ij}} \underline{\underline{e}}_j \otimes \underline{\underline{e}}_i$$

et la dérivée particulière (4.10) s'écrit :

$$(4.12b) \quad \dot{\psi} = \frac{\partial \psi(T, \underline{\underline{e}})}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \psi(T, \underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}} : \dot{\underline{\underline{e}}}.$$

On suppose ici que le matériau est *sans liaisons internes*. Cela signifie que les évolutions géométriques de l'élément de matière ne sont soumises à aucune restriction telle que l'incompressibilité, l'inextensibilité dans une ou plusieurs directions, etc., qui pourraient être dues à sa microstructure ou à sa constitution chimique, etc. (Celles-ci seront examinées au paragraphe 4.3). Le tenseur  $\underline{\underline{e}}$  peut être un tenseur symétrique quelconque et toutes les évolutions sont décrites par  $\dot{T}$  et  $\dot{\underline{\underline{e}}}$  symétrique *quelconques*.

L'inégalité de Clausius-Duhem (3.38) devient ainsi :

$$(4.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall T, \forall \underline{\underline{e}} \text{ symétrique} , \\ \forall \dot{T}, \forall \dot{\underline{\underline{e}}} \text{ symétrique} , \\ \underline{\underline{\pi}}(T, \underline{\underline{e}}) : \dot{\underline{\underline{e}}} - \rho_0 \left( \frac{\partial \psi(T, \underline{\underline{e}})}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \psi(T, \underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}} : \dot{\underline{\underline{e}}} + \underline{\underline{s}}(T, \underline{\underline{e}}) \dot{T} \right) \\ \qquad \qquad \qquad - \frac{q_0}{T} \cdot \underline{\underline{\nabla T}} \geq 0 . \end{array} \right.$$

La première ligne de cette inégalité, qui représente la dissipation intrinsèque volumique, ne dépend que de  $T$ ,  $\underline{\underline{e}}$ ,  $\dot{T}$  et  $\dot{\underline{\underline{e}}}$ . La seconde ligne représente la dissipation thermique volumique : avec la loi de Fourier  $\underline{\underline{q}}_0 = -\underline{\underline{K}}_0(T, \underline{\underline{e}}) \cdot \underline{\underline{\nabla T}}$  on voit qu'elle dépend de  $T, \underline{\underline{e}}$  et  $\underline{\underline{\nabla T}}$ . Le premier membre de l'inégalité (4.13) est donc une forme linéaire sur les variables  $\dot{T}$  et  $\dot{\underline{\underline{e}}}$  symétrique

Il résulte alors de (4.13), en y faisant  $\dot{T} = 0$  et  $\dot{\underline{\underline{e}}} = 0$ , que la dissipation thermique est non-négative, d'où :

$$(4.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall T, \forall \underline{\underline{e}} \text{ symétrique} , \\ -\underline{\underline{q}}_0 \cdot \underline{\underline{\nabla T}} \geq 0 \end{array} \right.$$

c'est l'*inégalité de la conduction*.

La forme linéaire en  $\dot{T}$  et  $\dot{\underline{\underline{e}}}$  au premier membre de (4.13) doit conserver un signe constant, on en déduit qu'elle est constante. **La dissipation intrinsèque est donc toujours nulle :**

$$(4.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall T, \forall \underline{\underline{e}} \text{ symétrique} , \forall \dot{T}, \forall \dot{\underline{\underline{e}}} \text{ symétrique} , \\ \left( \underline{\underline{\pi}}(T, \underline{\underline{e}}) - \rho_0 \frac{\partial \psi(T, \underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}} \right) : \dot{\underline{\underline{e}}} - \rho_0 \left( \underline{\underline{s}}(T, \underline{\underline{e}}) + \frac{\partial \psi(T, \underline{\underline{e}})}{\partial T} \right) \dot{T} = 0 . \end{array} \right.$$

D'où :

$$(4.16) \quad \boxed{\begin{array}{l} \forall T, \forall \underline{\underline{e}} \text{ symétrique,} \\ \underline{\underline{s}}(T, \underline{\underline{e}}) = -\frac{\partial \psi(T, \underline{\underline{e}})}{\partial T} \end{array}}$$

Puisque  $\dot{\underline{\underline{e}}} = 0$  est arbitraire *symétrique* la nullité du premier terme de (4.15) conduit au résultat :

$$\left( \underline{\underline{\pi}}(T, \underline{\underline{e}}) - \rho_0 \frac{\partial \psi(T, \underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}} \right) \text{ antisymétrique.}$$

Il en résulte, compte tenu de la symétrie de  $\underline{\underline{\pi}}(T, \underline{\underline{e}})$ , que :

$$(4.17) \quad \underline{\underline{\pi}}(T, \underline{\underline{e}}) = \rho_0 \left( \frac{\partial \psi(T, \underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}} \right)_s,$$

partie symétrique du tenseur  $\rho_0 \left( \frac{\partial \psi(T, \underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}} \right)$ .

La présence dans (4.17) de la seule partie symétrique du tenseur  $\frac{\partial \psi(T, \underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}}$  n'est pas surprenante. Elle résulte d'un artefact introduit par la définition (4.12a). En effet la fonction thermodynamique  $\psi(T, \underline{\underline{e}})$  n'est définie physiquement que sur l'ensemble des tenseurs  $\underline{\underline{e}}$  symétriques. En appliquant la définition générale (4.11a), seule la partie symétrique de  $\frac{\partial \psi(T, \underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}}$  est *physiquement* déterminée par (4.12a), puisque, dans les évolutions de l'élément de matière,  $\dot{\underline{\underline{e}}}$  est symétrique <sup>(9)</sup>. La partie antisymétrique de  $\frac{\partial \psi(T, \underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}}$  n'a qu'une signification mathématique : elle correspond au prolongement, arbitraire sous réserve de conditions de continuité et de différentiabilité, de la fonction physique  $\psi(T, \underline{\underline{e}})$  sur l'ensemble des tenseurs  $\underline{\underline{e}}$  du second ordre quelconques, c'est-à-dire à l'écriture de la fonction  $\psi(T, \underline{\underline{e}})$  en fonction des neuf composantes de  $\underline{\underline{e}}$  supposées indépendantes. Cette difficulté artificielle est levée en adoptant, comme définition de  $\psi(T, \underline{\underline{e}})$  pour  $\underline{\underline{e}}$  tenseur euclidien du deuxième ordre quelconque, la formule :

$$(4.18) \quad \forall \underline{\underline{e}}, \psi(T, \underline{\underline{e}}) = \psi(T, \underline{\underline{e}}_s) = \psi(T, (\underline{\underline{e}} + {}^t \underline{\underline{e}})/2),$$

qui implique que les composantes  $e_{ij}$  et  $e_{ji}$  pour  $i \neq j$  jouent le même rôle dans l'écriture de  $\psi$  : *écriture symétrique* de  $\psi$ . On a alors :

$$\left( \frac{\partial \psi(T, \underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}} \right)_s \equiv \frac{\partial \psi(T, \underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}}$$

---

<sup>(9)</sup> On a en effet, en décomposant (4.11) :  $\frac{\partial f(\underline{\underline{t}})}{\partial \underline{\underline{t}}} : \dot{\underline{\underline{t}}} = \left( \frac{\partial f(\underline{\underline{t}})}{\partial \underline{\underline{t}}} \right)_s : \dot{\underline{\underline{t}}}_s + \left( \frac{\partial f(\underline{\underline{t}})}{\partial \underline{\underline{t}}} \right)_a : \dot{\underline{\underline{t}}}_a$ .



et la formule (4.17) prend la forme simple :

$$(4.19) \quad \boxed{\begin{array}{l} \forall T, \forall \underline{\underline{e}} \text{ symétrique,} \\ \underline{\underline{\pi}}(T, \underline{\underline{e}}) = \rho_0 \frac{\partial \psi(T, \underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}} \end{array}}$$

Ces formules (4.16) et (4.19) montrent que, à partir des hypothèses (4.1), la connaissance de la fonction  $\psi$  définit la loi de comportement du matériau thermoélastique. Par leur forme, elles justifient le nom de **potentiel thermodynamique** donné à  $\psi(T, \underline{\underline{e}})$ . La nullité de la dissipation intrinsèque exprimée par l'équation (4.15) implique que les évolutions adiabatiques ou isothermes (cf. § 3.2) du matériau thermoélastique sont thermodynamiquement réversibles.

On verra au paragraphe 5.5 dans le cas du modèle thermoélastique linéaire, que la **stabilité du matériau** implique que la fonction  $\psi$  est strictement convexe<sup>(10)</sup> par rapport à  $\underline{\underline{e}}$  symétrique. Cette stricte convexité entraîne qu'à  $T$  fixé la correspondance entre  $\underline{\underline{e}}$  et  $\underline{\underline{\pi}}$  est **biunivoque**, d'où la « réversibilité des déformations » au sens indiqué dans l'analyse du diagramme de la figure 3.

### Transformation de Legendre-Fenchel

Ce résultat de convexité permet d'introduire la fonction transformée  $\psi^*$  définie par la transformation de Legendre-Fenchel.

Pour des valeurs de  $T, \underline{\underline{e}}$  et  $\underline{\underline{\pi}}$  **liées par la loi de comportement thermoélastique** (4.19), la fonction  $\psi^*$  des arguments  $T$  et  $\underline{\underline{\pi}}$  est définie par :

$$(4.20) \quad \psi^*(T, \underline{\underline{\pi}}) = \frac{1}{\rho_0} \underline{\underline{\pi}} : \underline{\underline{e}} - \psi(T, \underline{\underline{e}}).$$

La dérivée particulière de  $\psi^*(T, \underline{\underline{\pi}})$  s'écrit :

$$(4.21) \quad \dot{\psi}^* = \frac{\partial \psi^*(T, \underline{\underline{\pi}})}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \psi^*(T, \underline{\underline{\pi}})}{\partial \underline{\underline{\pi}}} : \dot{\underline{\underline{\pi}}}$$

et s'obtient aussi en dérivant (4.20) :

$$(4.22) \quad \dot{\psi}^* = \frac{1}{\rho_0} \dot{\underline{\underline{\pi}}} : \underline{\underline{e}} + \frac{1}{\rho_0} \underline{\underline{\pi}} : \dot{\underline{\underline{e}}} - \dot{\psi}.$$

Compte tenu de (4.12), (4.16) et (4.19), l'équation (4.22) devient

$$(4.23) \quad \dot{\psi}^* = s \dot{T} + \frac{1}{\rho_0} \underline{\underline{e}} : \dot{\underline{\underline{\pi}}}.$$

Le rapprochement de (4.23) et de (4.21) montre que, si l'on définit l'état thermodynamique par  $T$  et  $\underline{\underline{\pi}}$  on a, avec  $\psi^*(T, \underline{\underline{\pi}})$ , les formules homologues de (4.16) et (4.19)

<sup>(10)</sup>Cf. chapitre X (§ 1.5) pour la définition de la convexité.

qui s'écrivent<sup>(11)</sup> :

$$(4.24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{s}(T, \underline{\underline{\pi}}) = \frac{\partial \psi^*(T, \underline{\underline{\pi}})}{\partial T} \\ \underline{\underline{e}}(T, \underline{\underline{\pi}}) = \rho_0 \frac{\partial \psi^*(T, \underline{\underline{\pi}})}{\partial \underline{\underline{\pi}}} . \end{array} \right.$$

La fonction  $\psi^*$  est d'ailleurs elle-même convexe en  $\underline{\underline{\pi}}$  (cf. chapitre ??, § ??).

### Symétrie

Sous forme explicite, en composantes, la formule (4.19) s'écrit :

$$(4.25) \quad \pi^{ij} = \rho_0 \frac{\partial \psi(T, \underline{\underline{e}})}{\partial e_{ij}} .$$

Il s'ensuit que l'on a la formule de symétrie remarquable :

$$(4.26) \quad \frac{\partial \pi^{ij}(T, \underline{\underline{e}})}{\partial e_{k\ell}} = \frac{\partial \pi^{k\ell}(T, \underline{\underline{e}})}{\partial e_{ij}} ,$$

qui n'est valable que sous l'hypothèse (4.18), c'est-à-dire si les  $\pi^{ij}$  sont écrites symétriquement en  $e_{k\ell}$  et  $e_{\ell k}$ .

## 4.3 Loi de comportement thermoélastique avec liaisons internes

### Définition des liaisons internes

On dit que le comportement du matériau est assujéti à des liaisons internes si ses évolutions thermomécaniques sont, du point de vue géométrique, astreintes à respecter certaines conditions restrictives. Ces conditions font partie intégrante de la loi de comportement du matériau. Elles ont pour origine la microstructure du matériau sous-jacente à la modélisation macroscopique du mécanicien. Elles s'expriment par une ou plusieurs relations indépendantes portant sur le gradient de la transformation  $\underline{\underline{F}}(\underline{\underline{X}}, t)$ . Elles doivent satisfaire le principe d'isotropie de l'espace (cf. § 4.1) et ne portent donc sur  $\underline{\underline{F}}(\underline{\underline{X}}, t)$  qu'à travers le tenseur des déformations  $\underline{\underline{e}}(\underline{\underline{X}}, t)$  ou le tenseur des dilatations  $\underline{\underline{C}}(\underline{\underline{X}}, t)$ . Le nombre de ces relations indépendantes ne peut dépasser 6 (si  $n = 6$ , le matériau est indéformable).

L'exemple le plus fréquent d'une telle liaison interne est la liaison dite « d'incompressibilité » qui exprime l'invariance du volume de l'élément de matière dans toute transformation réelle pour le matériau considéré. Elle s'écrit en allégeant les notations :

$$(4.27) \quad \det \underline{\underline{F}} = 1 \quad \text{ou} \quad \det (\underline{\underline{1}} + 2\underline{\underline{e}}) = 1 .$$

<sup>(11)</sup>Même convention pour l'écriture symétrique de  $\psi^*$  en fonction de  $\underline{\underline{\pi}}$ , que pour  $\psi$  en fonction de  $\underline{\underline{e}}$ .

Un autre exemple pourra être « l'inextensibilité » dans une direction donnée, significative pour le matériau, qui exprime l'invariance de longueur dans cette direction.

On supposera ici plus particulièrement que les liaisons internes se traduisent par  $n$  relations indépendantes portant sur  $\underline{\underline{e}}$  que l'on écrira :

$$(4.28) \quad \varphi_p(\underline{\underline{e}}) = 0 \quad , \quad p = 1, \dots, n \quad (1 \leq n \leq 6) .$$

De même que  $\psi(T, \underline{\underline{e}})$  au paragraphe 4.2, les fonctions  $\varphi_p(\underline{\underline{e}})$  ne sont physiquement définies que sur l'ensemble des tenseurs  $\underline{\underline{e}}$  symétriques. On convient de les écrire en considérant les 9 composantes de  $\underline{\underline{e}}$  comme distinctes et en adoptant des formes symétriques en  $e_{ij}$  et  $e_{ji}$  satisfaisant ainsi l'équation homologue de (4.18). Il s'ensuit que les tenseurs  $\frac{\partial \varphi_p(\underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}}$ , qui interviendront dans la suite, sont symétriques.

L'écriture (4.28) pour les liaisons internes appelle les mêmes remarques que celles déjà faites au paragraphe 4.1 à propos de l'écriture de  $\psi$  sous la forme (4.2). Elles sont illustrées par les deux exemples cités. La liaison d'incompressibilité est évidemment isotrope; elle s'exprime authentiquement sous la forme (4.28) où  $\varphi$  est une fonction du seul tenseur  $\underline{\underline{e}}$  :

$$(4.29) \quad \varphi(\underline{\underline{e}}) = \det(\underline{\underline{1}} + 2\underline{\underline{e}}) - 1 = 0 .$$

En revanche la liaison d'inextensibilité dans une direction définie par le vecteur unitaire  $\underline{U}$  dans  $\kappa_0$  s'écrit :

$$(4.30) \quad \varphi(\underline{\underline{e}}) = \underline{\underline{e}} : (\underline{U} \otimes \underline{U}) = 0$$

qui met en évidence que  $\varphi$  n'est pas à proprement parler une fonction du *seul* tenseur  $\underline{\underline{e}}$ . La notation (4.28), bien comprise, n'induit néanmoins pas de confusion.

## Obtention de la loi de comportement

L'inégalité de Clausius-Duhem (3.38) est écrite à partir d'un état quelconque de la particule défini par les variables  $T$  et  $\underline{\underline{e}}$  vérifiant les liaisons internes (4.28) : elle concerne les évolutions thermomécaniques définies par  $T$  et  $\underline{\underline{e}}$  symétrique qui vérifient les liaisons internes, c'est-à-dire telles que :

$$(4.31) \quad \dot{\varphi}_p = \frac{\partial \varphi_p(\underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}} : \dot{\underline{\underline{e}}} = 0 \quad , \quad p = 1, \dots, n \quad (1 \leq n \leq 6) .$$

Ainsi, au lieu de (4.13), il vient :

$$(4.32) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall T, \forall \underline{\underline{e}} \text{ symétrique tel que (4.28)}, \\ \forall \dot{T}, \forall \dot{\underline{\underline{e}}} \text{ symétrique tel que (4.31)}, \\ \underline{\underline{\pi}}(T, \underline{\underline{e}}) : \dot{\underline{\underline{e}}} - \rho_0 \left( \frac{\partial \psi(T, \underline{\underline{e}})}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \psi(T, \underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}} : \dot{\underline{\underline{e}}} + \mathbf{s}(T, \underline{\underline{e}}) \dot{T} \right) - \frac{q_0}{T} \cdot \underline{\underline{\nabla}} T \geq 0 . \end{array} \right.$$

On peut reprendre les raisonnements du paragraphe précédent. Le premier membre de (4.32) est une forme linéaire sur les variables  $\dot{T}$  et  $\dot{\underline{\underline{e}}}$  symétrique telle que (4.31).

Cette forme linéaire doit conserver un signe constant et est donc constante. On retrouve ainsi **l'inégalité de la conduction** sous la forme :

$$(4.33) \quad \begin{cases} \forall T, \forall \underline{\underline{e}} \text{ symétrique tel que (4.28) ,} \\ -\underline{\underline{q}}_0 \cdot \underline{\underline{\nabla T}} \geq 0 \end{cases}$$

et la **nullité de la dissipation intrinsèque** dont on déduit d'abord l'expression de l'entropie :

$$(4.34) \quad \begin{cases} \forall T, \forall \underline{\underline{e}} \text{ symétrique tel que (4.28) ,} \\ \mathbf{s}(T, \underline{\underline{e}}) = -\frac{\partial \psi(T, \underline{\underline{e}})}{\partial T} . \end{cases}$$

La suite du raisonnement pour obtenir l'expression du tenseur des contraintes de Pilola-Kichhoff exploite l'égalité :

$$(4.35) \quad \begin{cases} \forall T, \forall \underline{\underline{e}} \text{ symétrique tel que (4.28) ,} \\ \forall \underline{\underline{\dot{e}}} \text{ symétrique tel que (4.31) ,} \\ \left( \underline{\underline{\pi}}(T, \underline{\underline{e}}) - \rho_0 \frac{\partial \psi(T, \underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}} \right) : \underline{\underline{\dot{e}}} = 0 \end{cases}$$

dont on déduit<sup>(12)</sup>, compte tenu de la symétrie de  $\underline{\underline{\pi}}$ , de  $\frac{\partial \psi(T, \underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}}$  et des  $\frac{\partial \varphi_p(\underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}}$ , que le tenseur  $\underline{\underline{\pi}}(T, \underline{\underline{e}}) - \rho_0 \frac{\partial \psi(T, \underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}}$  est une combinaison linéaire quelconque des  $n$  tenseurs  $\frac{\partial \varphi_p(\underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}}$ .

On en déduit les formules homologues de (4.19) qui expriment la loi de comportement thermoélastique avec liaisons internes :

$$(4.36) \quad \begin{cases} \forall T, \forall \underline{\underline{e}} \text{ symétrique tel que } \varphi_p(\underline{\underline{e}}) = 0, p = 1, \dots, n \quad (1 \leq n \leq 6), \\ \underline{\underline{\pi}}(T, \underline{\underline{e}}) = \rho_0 \frac{\partial \psi(T, \underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}} + \eta_p \frac{\partial \varphi_p(\underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}} \quad (13) \end{cases}$$

où les  $\eta_p$  sont  $n$  **scalaires arbitraires** (multiplicateurs de Lagrange associés à chaque liaison interne). On voit que  $\underline{\underline{\pi}}$  est indéterminé par les  $n$  termes  $\eta_p \frac{\partial \varphi_p(\underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}}$  qui sont  $n$

<sup>(12)</sup>L'égalité (4.35) exprime l'orthogonalité de  $\left( \underline{\underline{\pi}} - \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{e}}} \right)$  avec tous les tenseurs  $\underline{\underline{\dot{e}}}$  symétriques respectant (4.31).  $\left( \underline{\underline{\pi}} - \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{e}}} \right)$  est donc un élément de l'espace vectoriel engendré par les tenseurs  $\frac{\partial \varphi_p(\underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}}$ .

<sup>(13)</sup>On rappelle la sommation sur l'indice répété  $p$ .

tenseurs symétriques. L'indépendance des liaisons internes implique que les  $n$  tenseurs symétriques  $\frac{\partial \varphi_p(\underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}}$  sont, pour toute valeur de  $\underline{\underline{e}}$  respectant les liaisons internes (4.28), linéairement indépendants.

La formule (4.36) qui exprime la loi de comportement du matériau insiste sur le fait que les liaisons internes (4.28) font partie intégrante de celle-ci. Dans cette loi de comportement les  $n$  termes  $\eta_p \frac{\partial \varphi_p(\underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}}$  viennent compenser, au niveau des contraintes, les restrictions imposées aux déformations. Cette idée de « compensation » dans la loi de comportement s'éclaire dès que l'on considère l'analyse d'un système constitué d'un tel matériau, c'est-à-dire que l'on se place du point de vue global d'un problème d'évolution thermoélastique tels qu'ils seront posés et étudiés au chapitre VIII. La formule (4.36) écrite en chaque point du système introduit alors  $n$  **champs** scalaires  $\eta_p$  indéterminés. Pour un problème d'évolution quasi-statique bien posé et dont les données aux limites cinématiques sont compatibles avec les liaisons internes, ces champs sont **déterminés**, dans la construction d'une solution, par l'ensemble des équations de champs et des conditions aux limites du problème comme on le verra au chapitre ?? (§ ??).

Par ailleurs quelques précisions peuvent être apportées quant aux équations (4.36).

- Il est clair que, pour une liaison interne donnée, la représentation sous la forme (4.28) n'est pas unique : il en résulte que des jeux distincts de fonctions  $\varphi_p$  sont équivalents pour l'écriture de (4.28). Cet arbitraire est sans conséquence sur l'expression (4.36) de la loi de comportement car les tenseurs  $\frac{\partial \varphi_p(\underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}}$ , avec  $\varphi_p(\underline{\underline{e}}) = 0$ , fournis par les différents jeux de  $\varphi_p$  sont proportionnels entre eux et conduisent donc à la même indétermination.
- On doit aussi remarquer que, bien que l'existence des liaisons internes (4.28), restrictions imposées à  $\underline{\underline{e}}$ , introduise maintenant un arbitraire dans l'écriture symétrique de  $\psi(T, \underline{\underline{e}})$  en fonction des 9 composantes de  $\underline{\underline{e}}$  considérées comme indépendantes, la formule (4.36) qui exprime la loi de comportement est insensible à cette indétermination dont les effets sont « absorbés » par la présence des termes  $\eta_p \frac{\partial \varphi_p(\underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}}$  (14).
- Si l'on considère deux tenseurs  $\frac{\pi}{T}$ <sup>①</sup> et  $\frac{\pi}{T}$ <sup>②</sup> satisfaisant à la loi de comportement (4.36) pour les mêmes valeurs de  $\underline{\underline{T}}$  et de  $\underline{\underline{e}}$ , et un taux de déformation  $\dot{\underline{\underline{e}}}$  satisfaisant

<sup>(14)</sup> Si l'on désigne par  $\psi(T, \underline{\underline{e}})$  et  $\psi_1(T, \underline{\underline{e}})$  deux telles écritures symétriques équivalentes à travers les liaisons internes c'est-à-dire telles que :

$$\psi(T, \underline{\underline{e}}) = \psi_1(T, \underline{\underline{e}}) \quad , \quad \forall \underline{\underline{e}} \text{ symétrique tel que } \varphi_p(\underline{\underline{e}}) = 0 \quad , \quad p = 1, \dots, n$$

on a, entre les dérivées de  $\psi$  et de  $\psi_1$  par rapport aux 9 composantes de  $\underline{\underline{e}}$  considérées comme indépendantes, la relation  $\frac{\partial \psi_1(T, \underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}} = \frac{\partial \psi(T, \underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}} + \alpha_p \frac{\partial \varphi_p(\underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}}$  (somme sur  $p$ ),  $\forall \underline{\underline{e}}$  symétrique tel que  $\varphi_p(\underline{\underline{e}}) = 0$ ,  $p = 1, \dots, n$ , où les  $\alpha_p$  sont  $n$  scalaires déterminés pour chaque valeur de  $(T, \underline{\underline{e}})$ .

les liaisons internes (4.31), on a évidemment :

$$(4.37) \quad \underline{\underline{\pi}}^{(1)}(T, \underline{\underline{e}}) : \underline{\underline{e}} = \underline{\underline{\pi}}^{(2)}(T, \underline{\underline{e}}) : \underline{\underline{e}} ;$$

autrement dit les puissances des efforts intérieurs dans un taux de déformation compatible avec les liaisons internes sont identiques. Le tenseur  $(\underline{\underline{\pi}}^{(1)} - \underline{\underline{\pi}}^{(2)})$  est un **tenseur inopérant** dans toute évolution respectant les liaisons internes à partir de l'état actuel. Ainsi la loi de comportement (4.36) définit les liaisons internes du matériau et détermine les contraintes à un tenseur inopérant près.

- La nullité de la dissipation intrinsèque, dont on a déduit (4.34) et (4.35), implique que les liaisons internes sont **parfaites**, ce qui est une conséquence des hypothèses (4.1) de la thermoélasticité.

#### 4.4 Respect des symétries de la matière

Déjà introduit au chapitre VI (§ 4.2) à propos de l'écriture de la fonction de charge, le principe du respect des symétries de la matière s'impose à la loi de comportement thermoélastique : il exprime l'invariance de cette loi dans toute transformation isométrique appartenant au groupe des symétries du matériau.

La loi de comportement thermoélastique est écrite, par les formules (4.19) ou (4.36) en représentation lagrangienne : les symétries du matériau sont définies dans la configuration de référence correspondante.

Le groupe  $\mathcal{G}$  des symétries matérielles dans la configuration  $\kappa_0$  peut être caractérisé par les deux énoncés équivalents :

- il n'est pas possible, dans la configuration  $\kappa_0$ , de discerner deux éléments qui se déduisent l'un de l'autre par une isométrie appartenant au groupe  $\mathcal{G}$  ; ils réagissent identiquement l'un et l'autre, sous une même sollicitation quelconque ;
- si l'on applique à un élément donné deux sollicitations distinctes déduites l'une de l'autre au moyen d'une isométrie du groupe  $\mathcal{G}$ , les réponses sont distinctes mais se déduisent l'une de l'autre au moyen de la même isométrie.

Il est utile ici d'expliciter l'écriture de  $\psi$  en supposant choisi un repère  $R$ , ortho-normé pour simplifier (comme dans la formule (4.3)) :

$$(4.38) \quad \psi = \psi_R(T, \underline{\underline{e}})$$

où  $\underline{\underline{e}}$  désigne la matrice de  $\underline{\underline{e}}$  dans ce repère.

Le respect des symétries du matériau dans la configuration  $\kappa_0$  impose à  $\psi$  la condition mathématique :

$$(4.39) \quad \forall \underline{\underline{e}}, \forall \underline{\underline{\alpha}} \in \mathcal{G}, \quad \psi_R(T, \underline{\underline{e}}) = \psi_R(T, {}^t\underline{\underline{\alpha}} \cdot \underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{\alpha}}) .$$

On vérifie alors que l'on a bien, par la loi de comportement (4.19), la relation :

$$(4.40) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \underline{\underline{e}}, \forall \underline{\underline{\alpha}} \in \mathcal{G}, \\ \underline{\underline{\pi}}_R(T, {}^t\underline{\underline{\alpha}} \cdot \underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{\alpha}}) = {}^t\underline{\underline{\alpha}} \cdot \underline{\underline{\pi}}_R(T, \underline{\underline{e}}) \cdot \underline{\underline{\alpha}} . \end{array} \right.$$

Selon les cas il sera commode pour exprimer et exploiter le principe du respect des symétries de la matière, soit de raisonner sur la fonction  $\psi$  et d'appliquer (4.39) comme on le fera au paragraphe 4.5, soit d'écrire (4.40) au niveau des tenseurs des déformations et des contraintes (cf. § 5.7).

Les considérations homologues des précédentes valent évidemment pour l'expression des liaisons internes.

## 4.5 Matériau thermoélastique isotrope dans la configuration de référence

Pour le matériau isotrope (au sens de Cauchy) dans la configuration de référence, le groupe  $\mathcal{G}$  est le groupe de *toutes* les isométries, directes et indirectes. Cela signifie que l'on ne peut distinguer par leurs réponses à des sollicitations identiques, ni deux éléments d'orientations différentes, ni un élément et son image dans une glace.

On retrouve alors l'argumentation déjà développée au chapitre VI (§ 4.2) à propos de la fonction de charge. Ainsi :

$$(4.41) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \underline{\tilde{e}}, \forall \underline{\tilde{\alpha}} \text{ tel que } {}^t\underline{\tilde{\alpha}} \cdot \underline{\tilde{\alpha}} = \underline{\tilde{1}}, \\ \psi_R(T, \underline{\tilde{e}}) = \psi_R(T, {}^t\underline{\tilde{\alpha}} \cdot \underline{\tilde{e}} \cdot \underline{\tilde{\alpha}}). \end{array} \right.$$

La fonction  $\psi$  apparaît comme une *fonction scalaire (isotrope) du (seul) tenseur*  $\underline{e}$ , ce qui traduit bien le fait que le matériau ne possède pas de directions privilégiées qui orienteraient son comportement<sup>(15)</sup>.

En application du théorème de représentation puisque  $\underline{e}$  est symétrique (chapitre VI, § 2.7; annexe I, § 5.7),  $\psi$  s'exprime nécessairement comme une fonction de  $T$  et des *invariants* du tenseur  $\underline{e}$ .

On pose :

$$(4.42) \quad I'_1 = \text{tr } \underline{e} \quad , \quad I'_2 = \frac{1}{2} \text{tr } \underline{e}^2 \quad , \quad I'_3 = \frac{1}{3} \text{tr } \underline{e}^3$$

et  $\psi$  s'écrit :

$$(4.43)$$

$$\psi(T, \underline{e}) = \psi(T, I'_1, I'_2, I'_3)$$

On comprend mieux ici la signification du mot « exploiter » employé à la fin du paragraphe (4.4) : le principe de respect des symétries de la matière permet de préciser la forme qu'a nécessairement la fonction  $\psi$  et, comme on le verra au paragraphe 5.3, permet de réduire a priori le nombre des coefficients indépendants caractérisant le comportement du matériau qui sont à déterminer expérimentalement.

<sup>(15)</sup>L'écriture  $\psi(T, \underline{e})$  pour le potentiel thermodynamique est, dans ce cas, pleinement justifiée du point de vue mathématique.

L'isotropie correspondant évidemment au groupe de symétries matérielles le plus vaste (*toutes les isométries*), l'expression (4.43) représente la forme la plus réduite possible pour  $\psi$  (sans l'introduction d'hypothèses supplémentaires).

On déduit sans difficulté de (4.42) les formules suivantes :

$$(4.44) \quad \frac{\partial I'_1}{\partial \underline{\underline{e}}} = \underline{\underline{\pi}} \quad , \quad \frac{\partial I'_2}{\partial \underline{\underline{e}}} = \underline{\underline{e}} \quad , \quad \frac{\partial I'_3}{\partial \underline{\underline{e}}} = \underline{\underline{e}}^2 = \underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{e}}$$

d'où par (4.19), pour le matériau sans liaisons internes (en allégeant les notations) :

$$(4.45) \quad \underline{\underline{\pi}} = \rho_0 \left( \frac{\partial \psi}{\partial I'_1} \underline{\underline{\pi}} + \frac{\partial \psi}{\partial I'_2} \underline{\underline{e}} + \frac{\partial \psi}{\partial I'_3} \underline{\underline{e}}^2 \right)$$

dans laquelle  $\frac{\partial \psi}{\partial I'_1}$ ,  $\frac{\partial \psi}{\partial I'_2}$  et  $\frac{\partial \psi}{\partial I'_3}$  sont des fonctions de  $T, I'_1, I'_2, I'_3$ .

Cette expression de la loi de comportement du matériau thermoélastique isotrope met notamment en évidence le résultat remarquable :

*pour le matériau thermoélastique isotrope dans la configuration de référence, les directions principales de  $\underline{\underline{e}}$  sont principales pour  $\underline{\underline{\pi}}$ .*

Pour le matériau avec liaisons internes, si l'hypothèse d'isotropie est physiquement validée, elle concerne toutes les fonctions qui expriment le comportement du matériau et donc, en particulier, les liaisons internes. Les fonctions  $\varphi_p(\underline{\underline{e}})$  ne dépendent, elles aussi, que des invariants  $I'_1, I'_2, I'_3$  et l'on obtient pour  $\underline{\underline{\pi}}$  :

$$(4.46) \quad \begin{cases} \underline{\underline{\pi}} = \rho_0 \left( \frac{\partial \psi}{\partial I'_1} \underline{\underline{\pi}} + \frac{\partial \psi}{\partial I'_2} \underline{\underline{e}} + \frac{\partial \psi}{\partial I'_3} \underline{\underline{e}}^2 \right) + \eta_p \left( \frac{\partial \varphi_p}{\partial I'_1} \underline{\underline{\pi}} + \frac{\partial \varphi_p}{\partial I'_2} \underline{\underline{e}} + \frac{\partial \varphi_p}{\partial I'_3} \underline{\underline{e}}^2 \right) \\ \varphi_p(I'_1, I'_2, I'_3) = 0 \quad , \quad p = 1, \dots, n \quad 1 \leq n \leq 3. \end{cases}$$

Le résultat de coïncidence des directions principales de  $\underline{\underline{\pi}}$  et de  $\underline{\underline{e}}$  est conservé.

On peut enfin signaler qu'il n'y a pas de contradiction mathématique à exprimer le comportement thermoélastique d'un matériau au moyen d'un potentiel  $\psi(T, \underline{\underline{e}})$  fonction isotrope de  $\underline{\underline{e}}$  avec des liaisons internes anisotropes ; le matériau correspondant est évidemment anisotrope. Des modèles physiquement réalistes de matériaux composites renforcés ont cette forme.

## 4.6 Les liaisons internes du point de vue eulérien

À partir de l'état actuel satisfaisant (4.28), les liaisons internes s'expriment, du point de vue eulérien, par les conditions portant sur le taux (eulérien) de déformation déduites de (4.31) en appliquant la formule de correspondance donnée au chapitre III :

$$(4.47) \quad \begin{cases} \underline{\underline{\dot{e}}}(\underline{\underline{X}}, t) = {}^t \underline{\underline{F}}(\underline{\underline{X}}, t) \cdot \underline{\underline{d}}(\underline{\underline{x}}, t) \cdot \underline{\underline{F}}(\underline{\underline{X}}, t) \\ \underline{\underline{x}} = \underline{\underline{\phi}}(\underline{\underline{X}}, t) . \end{cases}$$





chapitre II (§ 7.1) définies par :

$$(5.1) \quad \|\underline{\underline{e}}\| \ll 1$$

et des « petites variations de température » :

$$(5.2) \quad \tau = (T - T_0) \quad \ll \text{petit} \gg .$$

L'idée est alors que, sous ces hypothèses, en l'absence de liaisons internes, il est légitime de linéariser la loi de comportement (4.19), c'est-à-dire de l'écrire sous la forme d'une **expression linéaire** (affine) en  $\underline{\underline{e}}$  et  $\tau$ . Cette écriture s'obtient par dérivation de l'expression de  $\rho_0 \psi(T, \underline{\underline{e}})$  limitée à son développement polynomial au second degré en fonction de  $\tau$  et des composantes de  $\underline{\underline{e}}$ .

En laissant de côté la constante additive sans importance dans la dérivation,  $\rho_0 \psi(T, \underline{\underline{e}})$  se met ainsi sous la forme (5.3) qui doit, en outre, respecter la convention d'écriture symétrique (4.18) soit :

$$(5.3) \quad \rho_0 \psi = \underline{\underline{\pi}}^0 : \underline{\underline{e}} - \rho_0 s_0 \tau + \frac{1}{2} \underline{\underline{e}} : \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{e}} - \underline{\underline{k}} : \underline{\underline{e}} \tau - \frac{1}{2} \rho_0 b \tau^2$$

• Dans cette formule,  $s_0$  et  $b$  sont des **constantes physiques** scalaires. Les termes correspondants ne posent aucun problème d'interprétation.

• Le terme  $\underline{\underline{\pi}}^0 : \underline{\underline{e}}$  est linéaire en fonction des composantes de  $\underline{\underline{e}}$ . Pour satisfaire la condition (4.18) d'écriture symétrique de  $\psi$ , le **tenseur physique constant**  $\underline{\underline{\pi}}^0$  doit être symétrique.

• Le terme  $\underline{\underline{k}} : \underline{\underline{e}} \tau$  est bilinéaire en fonction de  $\tau$  et des composantes de  $\underline{\underline{e}}$ . Pour satisfaire (4.18) le **tenseur physique constant**  $\underline{\underline{k}}$  doit, lui aussi, être symétrique.

• Le terme  $\frac{1}{2} \underline{\underline{e}} : \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{e}}$  est quadratique en fonction des composantes de  $\underline{\underline{e}}$ . Le tenseur  $\underline{\underline{A}}$  est un tenseur physique du quatrième ordre **constant** et l'écriture  $\frac{1}{2} \underline{\underline{e}} : \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{e}}$  désigne la contraction totale, sur les indices 1 et 4, 2 et 3, 5 et 8, 6 et 7, du produit tensoriel  $\frac{1}{2} \underline{\underline{e}} \otimes \underline{\underline{A}} \otimes \underline{\underline{e}}$ , c'est-à-dire qu'en base orthonormée le terme quadratique s'écrit :

$$(5.4) \quad \frac{1}{2} \underline{\underline{e}} : \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{e}} = \frac{1}{2} e_{ji} A_{ijkl} e_{lk} .$$

On remarque évidemment que l'écriture explicite (5.4) du produit doublement contracté fait apparaître la somme de 81 termes : 9 termes « carrés » et 72 termes « rectangles » alors que l'écriture la plus générale d'une forme quadratique en fonction des 9 composantes de  $\underline{\underline{e}}$  n'en requiert que 45 (=9+36). Le procédé est classique ; il s'agit du dédoublement des termes rectangles : pour  $(i, j) \neq (k, \ell)$  on distingue le terme  $e_{ji} A_{ijkl} e_{lk}$  et le terme  $e_{lk} A_{klij} e_{ji}$  et l'on pose

$$(5.5) \quad \forall (i, j) \neq (k, \ell), \quad A_{ijkl} = A_{klij}$$

c'est-à-dire qu'il y a **symétrie entre les groupes d'indices**  $(i, j)$  et  $(k, \ell)$ .

Cette procédure permet à la fois l'écriture compacte (5.4) de la forme quadratique et, grâce à la convention (5.5), une expression simple de sa dérivée (5.7).

- Pour satisfaire la condition (4.18) d'écriture symétrique de  $\psi$ , le tenseur  $\underline{\underline{A}}$  doit être **symétrique** sur les indices  $i$  et  $j$  d'une part,  $k$  et  $\ell$  de l'autre :

$$(5.6) \quad A_{ijkl} = A_{jikl} = A_{ijlk} = A_{jilk} .$$

- Ainsi, au total, compte tenu des 60 relations de symétrie indépendantes exprimées par (5.5) et (5.6) les 81 composantes de  $\underline{\underline{A}}$  ne dépendent plus que de **21 paramètres indépendants**<sup>(16)</sup>.

La loi de comportement thermoélastique linéaire s'obtient en appliquant (4.16) et (4.19) à  $\psi$  exprimé par (5.3), où la dérivée de la forme quadratique prend la forme simple :

$$(5.7) \quad \frac{\partial}{\partial \underline{\underline{e}}} \left( \frac{1}{2} \underline{\underline{e}} : \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{e}} \right) = \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{e}} \quad (17).$$

Il vient alors :

$$(5.8)$$

$$\underline{\underline{\pi}} = \underline{\underline{\pi}}^0 + \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{e}} - \underline{\underline{k}} \tau$$

$$(5.9)$$

$$\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{s}}_0 + \frac{1}{\rho_0} \underline{\underline{k}} : \underline{\underline{e}} + b \tau$$

ou, en composantes :

$$(5.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \pi_{ij} = \pi_{ij}^0 + A_{ijkl} e_{lk} - k_{ij} \tau \\ \underline{\underline{s}} = \underline{\underline{s}}_0 + \frac{1}{\rho_0} k_{ij} e_{ji} + b \tau . \end{array} \right.$$

Il est intéressant de commenter cette expression linéaire des composantes de  $\underline{\underline{\pi}}$  en fonction de  $\tau$  et des composantes de  $\underline{\underline{e}}$ . On aurait évidemment pu l'écrire directement, par définition même de la linéarisation, et y imposer les symétries nécessaires. La symétrie sur les indices  $i$  et  $j$  apparaît immédiatement en raison de la symétrie de  $\underline{\underline{\pi}}$ . La sommation complète sur toutes les composantes de  $\underline{\underline{e}}$  symétrique distingue le terme en  $A_{ijkl} e_{lk}$  et le terme en  $A_{ijlk} e_{kl}$ ; seules les sommes de composantes  $(A_{ijkl} + A_{ijlk})$  sont indépendantes, ce qui permet d'imposer la symétrie sur les indices  $k$  et  $\ell$ , c'est-à-dire d'obtenir pour  $\pi_{ij}$ , une écriture symétrique en  $e_{lk}$  et  $e_{kl}$ . Alors la formule de symétrie (4.26), qui provient de l'**existence du potentiel**  $\rho_0 \psi$  dont **dérive**  $\underline{\underline{\pi}}$ , est applicable et amène la symétrie entre les groupes d'indices  $(i, j)$  et  $(k, \ell)$ . On retrouve bien ainsi les symétries énoncées dans (5.6).

<sup>(16)</sup>Cette réduction n'a rien de magique! Il s'agit simplement du nombre des termes d'une forme quadratique sur un espace à 6 dimensions (les composantes indépendantes de  $\underline{\underline{e}}$ ), qui est aussi le nombre de coefficients indépendants d'un tableau  $6 \times 6$  symétrique.

<sup>(17)</sup>Avec la condition (5.5) on a :  $\forall \underline{\underline{t}}, \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{t}} = \underline{\underline{t}} : \underline{\underline{A}}$ . Il en résulte, avec la définition (4.11) que :

$$\forall \underline{\underline{t}}, \frac{\partial}{\partial \underline{\underline{t}}} \left( \frac{1}{2} \underline{\underline{t}} : \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{t}} \right) = \frac{1}{2} \left( \underline{\underline{t}} : \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{t}} \right) = \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{t}} .$$

## Interprétation physique des coefficients

Ces résultats permettent d'interpréter physiquement les constantes introduites dans l'expression (5.3), et de préciser la notion de « petites » variations de température.

### • Valeurs initiales.

Le tenseur symétrique  $\underline{\underline{\pi}}^0$  apparaît comme le tenseur des *contraintes initiales* : ce sont les contraintes qui correspondent à une déformation nulle et à un écart de température nul par rapport à la configuration de référence. La formule linéaire (5.8) exprime que, en représentation lagrangienne, la contrainte  $\underline{\underline{\pi}}$  résulte de la *superposition* de la contrainte initiale  $\underline{\underline{\pi}}^0$ , de la contrainte  $\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{\epsilon}}$  induite à température constante par la seule déformation  $\underline{\underline{\epsilon}}$  et de celle  $-\underline{\underline{k}}\tau$  induite par l'écart de température  $\tau$  à déformation constante<sup>(18)</sup>.

$s_0$  est l'entropie massique initiale définie de la même manière.

### • Coefficients d'élasticité.

Le tenseur  $\underline{\underline{A}}$  est le tenseur d'élasticité qui, à température constante, lie les contraintes aux déformations. Le décompte effectué plus haut montre que, dans un repère quelconque, le tenseur  $\underline{\underline{A}}$  correspond à 21 coefficients indépendants. Il s'agit là du cas général du matériau qui ne possède aucune symétrie matérielle particulière, appelé aussi « matériau aelotrope ». Les 21 coefficients sont définis à partir de **18 modules élastiques** proprement dits, constantes physiques du matériau, et des 3 angles d'Euler qui définissent l'orientation de celui-ci dans le repère utilisé.

Ceci est à rapprocher des développements donnés au chapitre VI (§4.2) à propos de la fonction de charge et du principe de l'isotropie de l'espace. Dans un repère orthonormé  $R$  significatif pour le matériau, la fonction  $\psi_R(T, \underline{\underline{\epsilon}})$  de la formule (4.38) s'exprime en thermoélasticité linéaire en fonction de 18 coefficients qui sont des constantes physiques du matériau. L'expression de  $\psi$  dans un repère  $R'$  orthonormé quelconque s'obtient alors à partir de  $\psi_R$  par :

$$\psi_{R'}(T, \underline{\underline{\epsilon}}') = \psi_R(T, {}^t\underline{\underline{\alpha}} \cdot \underline{\underline{\epsilon}} \cdot \underline{\underline{\alpha}})$$

où la matrice  $\underline{\underline{\alpha}}$  de changement de repères est définie par les angles d'Euler qui caractérisent l'orientation du matériau par rapport à  $R'$ .

Les modules élastiques ont les *dimensions d'une contrainte* : ils s'expriment en pascal (Pa) mais pour les matériaux courants on aura plus souvent recours au mégapascal (MPa).

<sup>(18)</sup>Ce résultat n'est pas conservé pour le tenseur des contraintes de Cauchy  $\underline{\underline{\sigma}}$  : le tenseur des contraintes initiales  $\underline{\underline{\pi}}^0$  induit dans l'expression de  $\underline{\underline{\sigma}}$  le terme additif  $\frac{\rho}{\rho_0} \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{\pi}}^0 \cdot {}^t\underline{\underline{F}}$  qui n'est pas constant. Ce point sera repris au paragraphe 5.4 où l'on traitera plus particulièrement le cas où ce terme peut être considéré comme constant en transformation infinitésimale.

• *Coefficients thermiques.*

On a évidemment, à partir de (5.9) :

$$(5.11) \quad T \dot{\mathbf{s}} = \frac{1}{\rho_0} T \underline{\underline{k}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} + T b \dot{\tau}$$

Le premier membre de cette égalité, qui a les dimensions d'une puissance massique, est, irréversibilités thermiques mises à part, le taux massique de chaleur reçue pour des vitesses de déformation et d'écart de température  $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}$  et  $\dot{\tau}$  ; ainsi :

$\frac{1}{\rho_0} T \underline{\underline{k}}$  est le tenseur des chaleurs latentes massiques de déformation.

(6 coefficients indépendants définis à partir de 3 constantes physiques et des 3 angles d'Euler caractérisant l'orientation du matériau).

$T b$  est la chaleur massique à déformation constante.

• « *Petite* » *variation de température.*

La notion de petite variation de température peut être précisée à partir de (5.8) : les contraintes  $-\underline{\underline{k}} \tau$  engendrées par la variation de température  $\tau$  doivent être du même ordre de grandeur que des contraintes  $\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{\epsilon}}$  engendrées par une déformation  $\underline{\underline{\epsilon}}$  vérifiant la condition (5.1) des déformations infinitésimales.

### 5.3 Matériau thermoélastique linéaire isotrope

La loi de comportement du matériau thermoélastique linéaire, isotrope dans la configuration de référence s'obtient en combinant les résultats des paragraphes 4.5 et 5.2.

Le développement polynomial au second degré de  $\rho_0 \psi(T, \underline{\underline{\epsilon}})$  en fonction de  $\tau$  et des composantes de  $\underline{\underline{\epsilon}}$ , ne doit plus faire intervenir que les invariants de  $\underline{\underline{\epsilon}}$  définis par (4.42). Il en résulte, compte tenu de l'ordre de  $I'_1, I'_2, I'_3$ , l'expression la plus générale de  $\rho_0 \psi$  pour le matériau thermoélastique linéaire isotrope :

$$(5.12) \quad \rho_0 \psi = \pi^0 I'_1 - \rho_0 \mathbf{s}_0 \tau + \frac{\lambda}{2} I_1'^2 + 2 \mu I_2' - k I_1' \tau - \frac{1}{2} \rho_0 b \tau^2$$

On remarque que dans cette formule  $\pi^0, \mathbf{s}_0, \lambda, \mu, k$  et  $b$  sont toutes des constantes *scalaires*.

On en déduit, par application de (4.16), (4.19) et (4.45) :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\pi}} &= \pi^0 \underline{\underline{1}} + \lambda I_1' \underline{\underline{1}} + 2 \mu \underline{\underline{\epsilon}} - k \tau \underline{\underline{1}} \\ \mathbf{s} &= \mathbf{s}_0 + \frac{1}{\rho_0} k I_1' + b \tau \end{aligned}$$

ou encore

$$(5.13)$$

$$\underline{\underline{\pi}} = \pi^0 \underline{\underline{\mathbf{1}}} + \lambda (\text{tr } \underline{\underline{e}}) \underline{\underline{\mathbf{1}}} + 2\mu \underline{\underline{e}} - k\tau \underline{\underline{\mathbf{1}}}$$

$$(5.14)$$

$$\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{s}}_0 + \frac{1}{\rho_0} k \text{tr } \underline{\underline{e}} + b\tau$$

On voit sur cette loi de comportement que le tenseur des contraintes initiales  $\underline{\underline{\pi}}^0$  de (5.8) est ici nécessairement, en raison de l'hypothèse d'isotropie du matériau, un tenseur **isotrope** quelconque :  $\underline{\underline{\pi}}^0 = \pi^0 \underline{\underline{\mathbf{1}}}$ .

Le tenseur d'élasticité  $\underline{\underline{A}}$  ne dépend que de deux coefficients indépendants  $\lambda$  et  $\mu$ <sup>(19)</sup>.

Ces deux coefficients sont authentiquement des **modules élastiques**, constantes physiques du matériau, car l'isotropie du matériau implique que son orientation n'intervient pas.

*L'élasticité linéaire du matériau isotrope est caractérisée par deux modules élastiques.*

Les coefficients  $\lambda$  et  $\mu$  de (5.12) et (5.13) sont appelés **coefficients d'élasticité de Lamé**<sup>(20)</sup> en particulier  $\mu$  est le **module de cisaillement**.

Enfin on remarque que le tenseur  $\underline{\underline{k}}$  est lui aussi nécessairement isotrope :  $\underline{\underline{k}} = k \underline{\underline{\mathbf{1}}}$ . Il n'y a donc plus qu'un seul coefficient thermique dans le passage de (5.8) à (5.13).

L'inversion de la loi de comportement (5.13), exprimant  $\underline{\underline{e}}$  en fonction de  $\underline{\underline{\pi}}$  et  $\tau$ , est aisée. Il est d'usage de mettre la formule inverse sous la forme :

$$(5.15)$$

$$(\underline{\underline{e}} - \underline{\underline{e}}^0) = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\pi}} - \frac{\nu}{E} (\text{tr } \underline{\underline{\pi}}) \underline{\underline{\mathbf{1}}} + \alpha \tau \underline{\underline{\mathbf{1}}}$$

qui fait intervenir 3 coefficients élastiques et thermiques  $E, \nu, \alpha$ .

$E$  est le **module d'élasticité de Young** qui a les dimensions d'une contrainte<sup>(21)</sup>,

$\nu$  est le **coefficient de Poisson**, nombre sans dimension<sup>(22)</sup>,

$\alpha$  est le **coefficient de dilatation thermique linéique**.

<sup>(19)</sup>On a :  $A_{ijkl} = \lambda(\delta_{ij}\delta_{kl}) + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$ .

<sup>(20)</sup>G. Lamé (1795-1870). Dans la littérature anglo-saxonne notamment, le module de cisaillement  $\mu$  est souvent noté  $G$  et  $\lambda$  porte le nom de « constante de Lamé ».

<sup>(21)</sup>Médecin, physicien (franges de Young), mécanicien, T. Young (1773-1829) était également un remarquable spécialiste des langues modernes et anciennes qui s'intéressa à l'égyptologie et notamment au déchiffrement des hiéroglyphes.

<sup>(22)</sup>D. Poisson (1781-1840).

$\underline{\underline{e}}^0$  apparaît comme la déformation dans l'état de contrainte nulle ( $\underline{\underline{\pi}} = 0$ ) et pour un écart de température nul, par rapport à la configuration (ou état) de référence. Elle vaut :

$$(5.16) \quad \underline{\underline{e}}^0 = -\frac{1-2\nu}{E} \pi^0 \underline{\underline{1}}^{(23)}.$$

Il est utile d'écrire les formules permettant de passer des coefficients d'élasticité de Lamé au module de Young et au coefficient de Poisson :

$$(5.17) \quad \begin{cases} E = \mu \frac{(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)} & \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \\ \lambda = E \frac{\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} & \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \end{cases}$$

$$(5.18) \quad k = \frac{E\alpha}{1 - 2\nu} \quad \alpha = \frac{k}{3\lambda + 2\mu}$$

L'équation (5.15) adoptée pour exprimer l'inverse de la relation linéaire (5.13) peut surprendre par la complication de son écriture. L'explication de ce choix réside dans la signification, et donc dans l'accessibilité expérimentale, des coefficients élastiques  $E$  et  $\nu$ . Le résultat qui vient d'être obtenu pour le matériau isotrope est en effet particulièrement remarquable si l'on se réfère à l'expérience de traction-compression. Il signifie qu'une seule expérience de traction (ou compression) simple, effectuée en déformation infinitésimale selon une direction  $\underline{e}_X$  quelconque pour le matériau, dans laquelle on impose le tenseur des contraintes de la forme  $\underline{\underline{\pi}} = \pi_{XX} \underline{e}_X \otimes \underline{e}_X$  à partir de l'état initial  $\underline{\underline{\pi}}^0 = 0$  avec l'écart de température  $\tau = 0$  permet, par la mesure de  $\underline{\underline{e}}$ , de déterminer complètement le comportement élastique du matériau isotrope. En effet  $\underline{\underline{e}}$  apparaît de la forme :  $\underline{\underline{e}} = e_{XX} \underline{e}_X \otimes \underline{e}_X + (e_{YY} = e_{ZZ}) (\underline{e}_Y \otimes \underline{e}_Y + \underline{e}_Z \otimes \underline{e}_Z)$  où  $\underline{e}_Y$  et  $\underline{e}_Z$  forment avec  $\underline{e}_X$  un trièdre orthonormé quelconque. On a ainsi :

$$E = \pi_{XX}/e_{XX} \quad \text{et} \quad \nu = -e_{YY}/e_{XX} = -e_{ZZ}/e_{XX},$$

où  $e_{XX}$ ,  $e_{YY}$  et  $e_{ZZ}$  sont les allongements unitaires selon  $\underline{e}_X$ ,  $\underline{e}_Y$  et  $\underline{e}_Z$  linéarisés en *déformation infinitésimale* (chapitre II, § 7.1). La réalisation et l'interprétation de cette expérience sont évidemment facilitées dans le cas de la transformation infinitésimale qui sera étudié aux paragraphes 5.4 et 5.5.

Par ailleurs une expérience de dilatation (ou de rétraction) thermique, où l'on impose  $\tau$  avec  $\underline{\underline{\pi}} = \underline{\underline{\pi}}^0 = 0$  permet de déterminer  $\alpha$  :

$$\alpha = \text{tr} \underline{\underline{e}}/3\tau = e_{XX}/\tau,$$

où  $\text{tr} \underline{\underline{e}}$  n'est autre que la déformation volumique linéarisée,  $\text{tr} \underline{\underline{e}} \simeq (d\Omega_t - d\Omega_0)/d\Omega_0$ , en déformation infinitésimale.

On doit ajouter que ce résultat, établi ici en exploitant le principe des symétries de la matière sous la forme (4.39) à partir de l'écriture du potentiel thermodynamique  $\rho_0\psi$ , peut aussi s'obtenir en appliquant ce principe sous la forme (4.40) à l'équation (5.10) (comme au paragraphe (5.7)). On constate alors que le raisonnement s'appuie évidemment sur les symétries entre les indices  $i$  et  $j$  et entre les indices  $k$  et  $\ell$  mais **ne nécessite pas** de faire intervenir la symétrie entre les groupes d'indices  $(i, j)$  et  $(k, \ell)$ .

---

<sup>(23)</sup> La similitude des notations peut être trompeuse :  $\underline{\underline{\pi}}^0$  et  $\underline{\underline{e}}^0$  **ne correspondent pas au même état** du matériau, sauf lorsqu'elles sont toutes deux nulles (état de contrainte nul dans la configuration de référence).

## 5.4 Transformation infinitésimale : linéarisation géométrique

On rappelle la correspondance entre les tenseurs des contraintes de Cauchy et de Piola-Kirchhoff (chapitre V, § 4.1) :

$$(5.19) \quad \underline{\underline{\sigma}} = \frac{\rho}{\rho_0} \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{\pi}} \cdot {}^t \underline{\underline{F}} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{F}} = (\underline{\underline{\mathbb{1}}} + \underline{\underline{\nabla \xi}}).$$

On déduit alors de la loi de comportement thermoélastique linéaire (5.8) l'expression de  $\underline{\underline{\sigma}}$  :

$$(5.20) \quad \underline{\underline{\sigma}} = \frac{\rho}{\rho_0} \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{\pi}}^0 \cdot {}^t \underline{\underline{F}} + \frac{\rho}{\rho_0} \underline{\underline{F}} \cdot (\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{\varepsilon}}) \cdot {}^t \underline{\underline{F}} - \frac{\rho}{\rho_0} \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{k}} \tau \cdot {}^t \underline{\underline{F}}.$$

On se propose maintenant d'examiner quelques circonstances, essentielles pour les applications pratiques, dans lesquelles cette formule est linéarisable. La linéarisation correspondante est dite *géométrique*.

### Transformation infinitésimale

L'hypothèse commune à ces diverses circonstances est celle de la *transformation infinitésimale* (chapitre II, § 5.1)

$$(5.21) \quad \|\underline{\underline{\nabla \xi}}\| \ll 1$$

qui permet, en négligeant les termes du deuxième ordre en  $\|\underline{\underline{\nabla \xi}}\|$ , d'écrire  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  sous sa forme linéarisée  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  et de confondre les gradients lagrangien  $\underline{\underline{\nabla \xi}}$  et eulérien  $\underline{\underline{\text{grad } \xi}}$  du déplacement  $\underline{\underline{\xi}}$  aux points homologues  $\underline{\underline{X}}$  et  $\underline{\underline{x}}$  de la configuration de référence et de la configuration actuelle<sup>(24)</sup> :

$$(5.22) \quad \underline{\underline{\varepsilon}} \simeq \underline{\underline{\varepsilon}} = (\underline{\underline{\nabla \xi}} + {}^t \underline{\underline{\nabla \xi}})/2 \simeq (\underline{\underline{\text{grad } \xi}} + {}^t \underline{\underline{\text{grad } \xi}})/2 ;$$

on a aussi, au même ordre :

$$(5.23) \quad \rho/\rho_0 = d\Omega_0/d\Omega \simeq (1 + \text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}})^{-1} \simeq (1 - \text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}}).$$

Compte tenu de cette hypothèse, il vient en ne retenant que les termes du premier ordre dans (5.20)

$$(5.24) \quad \underline{\underline{\sigma}} \simeq \underline{\underline{\pi}}^0 (1 - \text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}}) + \underline{\underline{\text{grad } \xi}} \cdot \underline{\underline{\pi}}^0 + \underline{\underline{\pi}}^0 \cdot {}^t \underline{\underline{\text{grad } \xi}} + \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{k}} \tau$$

qui s'explicité en fonction des parties symétrique  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  et antisymétrique  $\underline{\underline{w}}$  de  $\underline{\underline{\text{grad } \xi}}$

$$(5.25) \quad \underline{\underline{\text{grad } \xi}} = \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{w}}$$

sous la forme :

$$(5.26) \quad \underline{\underline{\sigma}} \simeq \underline{\underline{\pi}}^0 + [\underline{\underline{w}} \cdot \underline{\underline{\pi}}^0 - \underline{\underline{\pi}}^0 \cdot \underline{\underline{w}}] + \{-\underline{\underline{\pi}}^0 \text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{\underline{\pi}}^0 + \underline{\underline{\pi}}^0 \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{\varepsilon}}\} - \underline{\underline{k}} \tau.$$

<sup>(24)</sup>Comme dans la section 4.6, il pourrait être opportun d'expliciter la dépendance spatiale et temporelle de chacune des grandeurs qui interviennent dans les équations. Il est malheureusement évident que les formules deviendraient alors vite inextricables et il paraît préférable de se satisfaire de la dépendance implicite qui apparaît à travers les notations choisies, sans risque majeur d'ambiguïté.



Dans cette formule, le terme entre [...] exprime qu'en l'absence de déformation de l'élément de matière et de variation de température une transformation rigidifiante modifie le tenseur  $\underline{\underline{\sigma}}$  qui correspond à un même tenseur  $\underline{\underline{\pi}}^0$ . Les termes entre {...} représentent une application linéaire en  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  que l'on peut écrire

$$(5.27) \quad -\underline{\underline{\pi}}^0 \operatorname{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{\underline{\pi}}^0 + \underline{\underline{\pi}}^0 \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{\varepsilon}} = (\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} - \underline{\underline{\pi}}^0 \otimes \underline{\underline{1}}) : \underline{\underline{\varepsilon}}$$

où les  $B_{ijkl}$  ont les mêmes symétries que les  $A_{ijkl}$  et sont définis à partir de  $\underline{\underline{\pi}}^0$  par

$$(5.28) \quad B_{ijkl} = (\pi_{ik}^0 \delta_{lj} + \pi_{lj}^0 \delta_{ik} + \pi_{il}^0 \delta_{kj} + \pi_{kj}^0 \delta_{il})/2 .$$

On obtient ainsi, pour  $\underline{\underline{\sigma}}$ , l'expression :

$$(5.29) \quad \underline{\underline{\sigma}} \simeq \underline{\underline{\pi}}^0 + [\underline{\underline{w}} \cdot \underline{\underline{\pi}}^0 - \underline{\underline{\pi}}^0 \cdot \underline{\underline{w}}] + (\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} - \underline{\underline{\pi}}^0 \otimes \underline{\underline{1}}) : \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{k}} \tau .$$

De nouvelles hypothèses permettent d'en poursuivre la linéarisation.

### État initial naturel

Par définition, l'état initial, pris comme état de référence, est dit *naturel* si le tenseur des contraintes  $\mathbf{y}$  est nul :

$$(5.30) \quad \underline{\underline{\pi}} = 0 \quad \text{pour} \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = 0 \quad \text{et} \quad \tau = 0$$

c'est-à-dire, par (5.8),

$$(5.31) \quad \underline{\underline{\pi}}^0 = 0 .$$

En reprenant l'expression (5.29) de  $\underline{\underline{\sigma}}$  il vient alors :

$$(5.32) \quad \underline{\underline{\sigma}} \simeq \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{k}} \tau ,$$

que dans la suite, selon l'usage, on écrira en remplaçant le signe  $\simeq$  par le signe d'égalité stricte :

$$(5.33) \quad \boxed{\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{k}} \tau}$$

On aboutit ainsi à une formulation eulérienne en  $\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\varepsilon}}, \tau$  identique à l'écriture lagrangienne (5.8) en  $\underline{\underline{\pi}}, \underline{\underline{\varepsilon}}, \tau$  avec  $\underline{\underline{\pi}}^0 = 0$ .

Pour le matériau isotrope :

$$(5.34) \quad \boxed{\underline{\underline{\sigma}} = \lambda (\operatorname{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{1}} + 2 \mu \underline{\underline{\varepsilon}} - k \tau \underline{\underline{1}}}$$

inversée en

$$(5.35) \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1 + \nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} (\text{tr} \underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{\mathbf{1}}} + \alpha \tau \underline{\underline{\mathbf{1}}}$$

qui sont homologues de (5.13) et (5.15).

Il se révèle commode, pour certaines applications, de transformer ces expressions en introduisant le déviateur  $\underline{\underline{s}}$  de  $\underline{\underline{\sigma}}$  défini au chapitre VI (§ 2.8) et le déviateur  $\underline{\underline{\varepsilon}}_d$  de  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  défini de la même façon :

$$(5.36) \quad \begin{cases} \underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}} - (\text{tr} \underline{\underline{\sigma}}/3) \underline{\underline{\mathbf{1}}}, \\ \underline{\underline{\varepsilon}}_d = \underline{\underline{\varepsilon}} - (\text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}/3) \underline{\underline{\mathbf{1}}}. \end{cases}$$

On obtient alors les formules suivantes (5.37) et (5.38), respectivement équivalentes à (5.34) et (5.35), et inverses les unes des autres :

$$(5.37) \quad \begin{cases} \text{tr} \underline{\underline{\sigma}} = (3\lambda + 2\mu) \text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} - 3k\tau \\ \underline{\underline{s}} = 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}_d \end{cases}$$

$$(5.38) \quad \begin{cases} \text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1 - 2\nu}{E} \text{tr} \underline{\underline{\sigma}} + 3\alpha\tau \\ \underline{\underline{\varepsilon}}_d = \frac{1 + \nu}{E} \underline{\underline{s}}. \end{cases}$$

On y remarque la proportionnalité entre les déviateurs  $\underline{\underline{s}}$  et  $\underline{\underline{\varepsilon}}_d$  à travers le module de cisaillement  $\mu$ . En rappelant que, d'après (5.23),  $\text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} \simeq (d\Omega_t - d\Omega_0)/d\Omega_0$ , représente la déformation volumique linéarisée, on voit que celle-ci dépend linéairement de l'écart de température  $\tau$  à travers le coefficient de dilatation thermique volumique égal à  $3\alpha$ , et de la trace du tenseur des contraintes.

On pose habituellement :

$$(5.39) \quad 3K = 3\lambda + 2\mu = \frac{E}{1 - 2\nu}.$$

On voit, à partir de (5.38), que la déformation volumique élastique dans une expérience de compression uniforme isotherme où  $\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{\mathbf{1}}}$ , est égale à :

$$(5.40) \quad \text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} = \text{tr} \underline{\underline{\sigma}}/3K = -p/K.$$

Le coefficient  $K$  défini par (5.39) est appelé *module élastique de compression* (ou encore module de rigidité à la dilatation)<sup>(25)</sup>.

<sup>(25)</sup>Cette hésitation dans la terminologie traduit le fait que  $K$  est d'autant plus élevé que le matériau est plus « raide ». On la trouve aussi à propos des modules élastiques.

### État initial quasi-naturel

L'état initial *quasi-naturel* est défini physiquement en exprimant que les *contraintes initiales sont très petites devant les modules d'élasticité du matériau considéré* (cette comparaison a un sens puisqu'il s'agit de grandeurs physiques qui ont les mêmes dimensions). Cette hypothèse est très fréquemment satisfaite dans la pratique, notamment pour les structures et les matériaux usuels de la construction mécanique, en sorte que l'on a, en se référant à (5.27, 5.28 et 5.29) :

$$(5.41) \quad \|\underline{\underline{\pi}}^0 \otimes \underline{\underline{1}}\| \ll \|\underline{\underline{A}}\| \quad \text{et} \quad \|\underline{\underline{B}}\| \ll \|\underline{\underline{A}}\| .$$

Si, *de plus*, on suppose que

$$(5.42) \quad \|\underline{\underline{\varepsilon}}\| \quad \text{et} \quad \|\underline{\underline{\text{grad } \xi}}\| \quad \text{sont du même ordre}$$

les termes entre [...] dans (5.29) sont négligeables et  $\underline{\underline{\sigma}}$  se réduit à :

$$(5.43) \quad \underline{\underline{\sigma}} \simeq \underline{\underline{\pi}}^0 + \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{k}} \tau .$$

En remplaçant comme précédemment le signe  $\simeq$  par le signe d'égalité stricte on aboutit ainsi, sous les hypothèses énoncées, à une formulation eulérienne en  $\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\varepsilon}}, \tau$  identique à l'écriture lagrangienne (5.8) en  $\underline{\underline{\pi}}, \underline{\underline{\varepsilon}}, \tau$ , où  $\underline{\underline{\pi}}^0$  apparaît comme le tenseur des contraintes initiales  $\underline{\underline{\sigma}}^0$ . On écrira ainsi :

$$(5.44) \quad \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^0 + \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{k}} \tau .$$

Pour le matériau isotrope la formule (5.44) devient :

$$(5.45) \quad \underline{\underline{\sigma}} = \sigma^0 \underline{\underline{1}} + \lambda (\text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{1}} + 2 \mu \underline{\underline{\varepsilon}} - k \tau \underline{\underline{1}}$$

inversée en

$$(5.46) \quad \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^0 = \frac{1 + \nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} (\text{tr } \underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{1}} + \alpha \tau \underline{\underline{1}} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^0 = -\frac{1 - 2\nu}{E} \sigma^0 \underline{\underline{1}} .$$

On remarque que l'état initial naturel est un cas particulier d'état initial quasi naturel; la formule (5.44) contient la formule (5.33) mais celle-ci ne nécessite pas l'hypothèse (5.42).

L'hypothèse (5.42) est très généralement satisfaite dans la pratique en choisissant de façon pertinente le référentiel dans lequel est observé le matériau. L'étude de problèmes posés sur des corps élancés peut néanmoins présenter des difficultés de ce point de vue.

### État de référence précontraint

On remarque que, dans la formule (5.44), le tenseur des contraintes initiales  $\underline{\underline{\sigma}}^0 = \underline{\underline{\pi}}^0$  est évidemment astreint (cf. § 5.2) à respecter les symétries de la matière dans la configuration  $\kappa_0$ . C'est ce que traduit par exemple l'expression  $\underline{\underline{\sigma}}^0 = \sigma^0 \underline{\underline{1}}$  dans la formule (5.45) qui concerne le matériau isotrope.

Dans la pratique on étend la validité de la formule (5.44) en y supprimant la restriction imposée à  $\underline{\underline{\sigma}}^0$  par les symétries de la matière. Ceci revient à considérer que les symétries de la matière concernent, dans l'expression linéarisée de la loi de comportement en formulation eulérienne, non plus  $\underline{\underline{\sigma}}$  mais  $\underline{\underline{\sigma}}' = (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^0)$ .

C'est ainsi notamment que l'on écrit cette loi de comportement dans le cas où la configuration de référence est une configuration  $\kappa_p$  *précontrainte thermoélastiquement dans une transformation infinitésimale* à partir de l'état initial naturel :

$$(5.47) \quad \underline{\underline{\sigma}}' = (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^p) = \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{\varepsilon}}' - \underline{\underline{k}} \tau'$$

où  $\underline{\underline{\sigma}}^p$ , tenseur de précontrainte, n'est soumis à aucune restriction, et où  $\underline{\underline{\xi}}'$ ,  $\underline{\underline{\varepsilon}}'$  et  $\tau'$  sont rapportés à la configuration précontrainte  $\kappa_p$ , les transformations étant infinitésimales et devant respecter la condition (5.42).

Pour le matériau isotrope :

$$(5.48) \quad \underline{\underline{\sigma}}' = (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^p) = \lambda (\text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}}') \underline{\underline{1}} + 2 \mu \underline{\underline{\varepsilon}}' - k \tau' \underline{\underline{1}}$$

$$(5.49) \quad \underline{\underline{\varepsilon}}' = \frac{1 + \nu}{E} \underline{\underline{\sigma}}' - \frac{\nu}{E} (\text{tr } \underline{\underline{\sigma}}') \underline{\underline{1}} + \alpha \tau' \underline{\underline{1}}$$

On peut donner, de la formule (5.47), la justification suivante qui en précise la signification. Désignant par  $\kappa_0$  la configuration du matériau dans laquelle l'état est naturel on a, en application de (5.20) :

$$(5.50) \quad \underline{\underline{\sigma}} = \frac{\rho}{\rho_0} (\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\nabla}}\xi) \cdot (\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{e}} - \underline{\underline{k}} \tau) \cdot (\underline{\underline{1}} + {}^t \underline{\underline{\nabla}}\xi)$$

$$(5.51) \quad \underline{\underline{\sigma}}^p = \frac{\rho^p}{\rho_0} (\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\nabla}}\xi^p) \cdot (\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{e}}^p - \underline{\underline{k}} \tau^p) \cdot (\underline{\underline{1}} + {}^t \underline{\underline{\nabla}}\xi^p).$$

Il vient en introduisant le gradient  $\underline{\underline{\nabla}}_p$  par rapport à la configuration  $\kappa_p$  :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\rho}{\rho_p} \frac{\rho_p}{\rho_0} (\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\nabla}}_p \xi') \cdot (\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\nabla}}\xi^p) \cdot (\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{e}} - \underline{\underline{k}} \tau^p - \underline{\underline{k}} \tau') \cdot (\underline{\underline{1}} + {}^t \underline{\underline{\nabla}}\xi^p) \cdot (\underline{\underline{1}} + {}^t \underline{\underline{\nabla}}_p \xi')$$

où l'on a, puisque les transformations considérées sont infinitésimales,

$$\underline{\underline{e}} \simeq \underline{\underline{\varepsilon}} = (\underline{\underline{\nabla}}\xi + {}^t \underline{\underline{\nabla}}\xi)/2, \quad \underline{\underline{e}}^p \simeq \underline{\underline{\varepsilon}}^p = (\underline{\underline{\nabla}}\xi^p + {}^t \underline{\underline{\nabla}}\xi^p)/2,$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} \simeq \underline{\underline{\varepsilon}}^p + \underline{\underline{\varepsilon}}' \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{\varepsilon}}' = (\underline{\underline{\nabla}}_p \xi' + {}^t \underline{\underline{\nabla}}_p \xi')/2.$$

On en déduit, compte tenu de (5.51),

$$(5.52) \quad \underline{\underline{\sigma}} \simeq \frac{\rho}{\rho_0} (\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\nabla}}_p \xi') \cdot \underline{\underline{\sigma}}^p \cdot (\underline{\underline{1}} + {}^t \underline{\underline{\nabla}}_p \xi') \\ + \frac{\rho}{\rho_p} (\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\nabla}}_p \xi') \cdot \left\{ \frac{\rho_p}{\rho_0} (\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\nabla}}\xi^p) \cdot (\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{\varepsilon}}' - \underline{\underline{k}} \tau') \cdot (\underline{\underline{1}} + {}^t \underline{\underline{\nabla}}\xi^p) \right\} \cdot (\underline{\underline{1}} + {}^t \underline{\underline{\nabla}}_p \xi')$$

où l'on retrouve la structure de l'équation (5.20),  $\kappa_p$  jouant le rôle de  $\kappa_0$  et  $\underline{\underline{\sigma}}^p$  celui de  $\underline{\underline{\sigma}}^0$ .

Le caractère infinitésimal de la transformation de  $\kappa_0$  à  $\kappa_p$  implique que les précontraintes sont très petites devant les modules d'élasticité du matériau : la condition homologue de

(5.41) pour  $\underline{\underline{\sigma}}^P$  est donc satisfaite. De plus le terme entre  $\{\dots\}$  dans (5.52) est équivalent à  $(\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{\varepsilon}}' - \underline{\underline{k}} \tau')$ . On obtient ainsi, sous la condition homologue de (5.42) pour la transformation infinitésimale de  $\kappa_p$  à  $\kappa_t$ , l'équation homologue de (5.44)

$$(5.53) \quad \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^P + \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{\varepsilon}}' - \underline{\underline{k}} \tau'$$

qui montre que les tenseurs  $\underline{\underline{A}}$  et  $\underline{\underline{k}}$  dans la formule (5.47) sont ceux de la configuration  $\kappa_0$ .

## Récapitulatif et commentaires

Les exemples précédents rassemblent, sans exhaustivité, divers cas de linéarisation géométrique de la loi de comportement thermoélastique fréquemment rencontrés dans la pratique<sup>(26)</sup>. On ne devra pas perdre de vue qu'il s'agit de formules approchées, écrites en  $\underline{x}$  dans  $\kappa_t$ , dans lesquelles le signe  $\simeq$  a été remplacé par le signe  $=$  et dont les conditions de validité ont été précisées. En cas de confusion il sera toujours avisé de revenir à la formulation lagrangienne au point  $\underline{X}$  dans  $\kappa_0$ .

Compte tenu de l'importance pratique de ce cas particulier, on a regroupé ci-après les formules essentielles exprimant la loi de comportement thermoélastique du matériau isotrope dans l'hypothèse de la transformation infinitésimale et de l'état de référence précontraint (5.21, 5.41, 5.42).

$$(5.54) \quad \begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} &= \underline{\underline{\sigma}}^P + \lambda (\text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}}') \underline{\underline{\mathbb{1}}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}' - k \tau' \underline{\underline{\mathbb{1}}} \\ \underline{\underline{\varepsilon}}' &= \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}}' - \frac{\nu}{E} (\text{tr } \underline{\underline{\sigma}}') \underline{\underline{\mathbb{1}}} + \alpha \tau' \underline{\underline{\mathbb{1}}} \\ \underline{\underline{\sigma}}' &= \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^P \\ E &= \mu \frac{(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)} & \nu &= \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} & \alpha &= \frac{k}{(3\lambda + 2\mu)} \\ \lambda &= E \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \mu &= \frac{E}{2(1+\nu)} & k &= \alpha \frac{E}{(1-2\nu)} \end{aligned}$$

## 5.5 Stabilité du matériau thermoélastique

On considère un élément de matériau thermoélastique *dans son état naturel* pris comme état initial. Étudier la stabilité du matériau, c'est examiner si cet élément, en l'absence de sollicitations extérieures (forces, écarts de température) a tendance à évoluer spontanément ou au contraire à demeurer dans son état initial.

<sup>(26)</sup>On peut aussi remarquer l'intérêt de l'état de référence à contrainte isotrope : le terme entre [...] dans (5.26) est alors nul. (Cf. J. Mandel, *Introduction à la mécanique des milieux continus déformables*).



Dans la pratique les valeurs négatives de  $\nu$  sont exceptionnelles <sup>(29)</sup>.

Pour tenter d'apprécier la portée de la condition de stabilité posée a priori sous la forme (5.55), il est intéressant d'identifier la signification physique des restrictions (5.59) et (5.60) qui en découlent sur des expériences simples effectuées dans le cadre de la transformation infinitésimale <sup>(30)</sup> :

- $E > 0$  implique par (5.35) que, dans une expérience de traction isotherme ( $\tau = 0$ ) où  $\underline{\underline{\sigma}}$  est uniaxial :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{xx} \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x \quad , \quad \sigma_{xx} > 0 \quad ,$$

on a

$$\underline{\underline{\varepsilon}} : (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x) = \varepsilon_{xx} = \sigma_{xx}/E > 0$$

c'est-à-dire que le matériau *s'allonge* si l'on effectue sur lui une **traction isotherme** ;

- $\nu < 1/2$  avec  $E > 0$  impliquent que, dans une expérience de compression isotrope isotherme, où  $\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{1}}$ , on a par (5.40) :

$$\text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} = -p/K = -3p(1 - 2\nu)/E < 0$$

c'est-à-dire que le matériau *diminue de volume* si l'on effectue sur lui une **compression isotrope isotherme** ;

- $\nu > -1$  avec  $E > 0$  impliquent que, dans une expérience de cission simple, la direction de la contrainte principale maximale coïncide avec la direction principale d'extension maximale.

On remarque que, au moins pour les deux premières d'entre elles, ces implications ont un caractère « naturel » réconfortant.

Enfin, comme annoncé au paragraphe 4.2, la condition de stabilité (5.55) permet d'affirmer que la loi de comportement élastique linéaire (5.8), dans une évolution isotherme, est une correspondance **biunivoque** entre  $\underline{e}$  d'une part et la contrainte  $\underline{\underline{\sigma}}$  de l'autre. Ceci implique notamment que, dans une telle évolution, il y a « réversibilité » des déformations comme on l'a indiqué dans la section 2 à propos des constatations expérimentales.

<sup>(29)</sup> On a mesuré  $\nu = 0,05$  pour le beryllium et un doute subsisterait sur le signe de  $\nu$  pour la pyrite.

<sup>(30)</sup> L'hypothèse essentielle est celle de la **déformation infinitésimale** ; la transformation n'est ici supposée infinitésimale que pour rendre l'interprétation des expériences plus immédiate (cf. § 5.3).

## 5.6 Quelques valeurs typiques pour des matériaux usuels

Matériau	$E$ en MPa	$\nu$	$\alpha^{(31)}$ en $10^{-6} \text{ K}^{-1}$
Acier doux	$2 \times 10^5$	0,25-0,30	12
Acier invar (64% Fe, 36% Ni)	$1,4 \times 10^5$		$\simeq 0$
Aluminium	$7,4 \times 10^4$	0,34	22
Argent	$8,5 \times 10^4$	0,39	19
Béton	3,5 à $4,5 \times 10^4$	0,2	10
Bronze	$1 \times 10^5$	0,31	17 à 19
Cuivre	$1,2 \times 10^5$	0,34	17
Fonte	$8 \times 10^4$	0,36	10
Granite	$8 \times 10^4$	0,27	9
Laiton	$9,2 \times 10^4$	0,33	18
Or	$8 \times 10^4$	0,42	14
Platine	$1,5 \times 10^5$	0,38	9
Plomb	$1,7 \times 10^4$	0,45	29
Verre	$7 \times 10^4$	0,22 à 0,31	6 à 10

La limite d'élasticité en traction simple de l'acier doux est de l'ordre de 240 MPa, celle d'un acier à haute résistance de 1000 MPa.

## 5.7 Exemples de matériaux thermoélastiques anisotropes

Relativement à l'échelle macroscopique choisie pour la modélisation du matériau comme un milieu continu, la structure microscopique due à la constitution et à l'élaboration de ce matériau gouverne les propriétés de symétries évoquées au chapitre VI (§ 4.2) et au paragraphe (4.4). C'est ainsi notamment que, outre les matériaux mono ou polycristallins classiques tels que les métaux par exemple, les matériaux composites de toutes natures, à l'échelle choisie pour leur analyse mécanique par homogénéisation, sont concernés par les considérations relatives aux symétries matérielles. Compte tenu de l'importance croissante de ce type de matériaux dans les applications pratiques on se propose de donner, sans démonstration détaillée les résultats concernant l'écriture de la loi de comportement thermoélastique pour deux types de matériaux *anisotropes* fréquemment rencontrés : le matériau orthotrope et le matériau orthotrope de révolution aussi appelé transversalement isotrope. On pourra se reporter à l'ouvrage de A.E. Love *A treatise on the mathematical theory of elasticity* pour des résultats très détaillés concernant notamment les anisotropies cristallines (monocristaux).

<sup>(31)</sup> On a mesuré  $\alpha = -5 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$  pour le plutonium en phase  $\delta$ , stable entre 315 et 445°C. (Cf. Y. Quéré, *Physique des matériaux*).



La méthode d'étude suivie ici (mais il en existe d'autres, fondées sur les théorèmes de représentation des fonctions tensorielles par exemple) consiste à exploiter le principe du respect des symétries de la matière en écrivant l'équation (4.40). Pour cela on se place dans le repère significatif pour le matériau du point de vue de ses symétries. Ceci permet de dénombrer les constantes physiques (élastiques ou thermiques) qui caractérisent le comportement. L'écriture de la loi de comportement dans un repère quelconque nécessite évidemment de leur adjoindre les paramètres géométriques (angles d'Euler par exemple) qui permettent de définir l'orientation du matériau (cf. § 5.2).

### Matériau orthotrope dans la configuration de référence

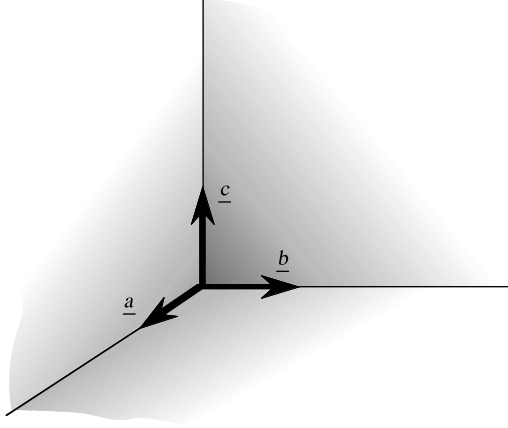


Figure 7 – Matériau orthotrope : plans de symétries

Un matériau est orthotrope dans la configuration de référence s'il possède, dans cette configuration, trois plans de symétrie orthogonaux entre eux ; ceci définit le groupe  $\mathcal{G}$  des symétries du matériau pour l'application de l'équation (4.40). On utilise (figure 7) une base orthonormée dirigée suivant les intersections de trois plans de symétrie du matériau ; on explicite la loi de comportement en composantes dans cette base ; on en écrit l'invariance par changement d'orientation des vecteurs de la base.

On obtient la loi de comportement du matériau thermoélastique orthotrope, *dans sa base privilégiée* notée  $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$  :

$$(5.61) \quad \left\{ \begin{array}{l} \pi_{aa} = \pi_{aa}^0 + A_{11} e_{aa} + A_{12} e_{bb} + A_{13} e_{cc} - k_1 \tau \\ \pi_{bb} = \pi_{bb}^0 + A_{12} e_{aa} + A_{22} e_{bb} + A_{23} e_{cc} - k_2 \tau \\ \pi_{cc} = \pi_{cc}^0 + A_{13} e_{aa} + A_{23} e_{bb} + A_{33} e_{cc} - k_3 \tau \\ \pi_{bc} = A_{44} e_{bc} \\ \pi_{ac} = A_{55} e_{ac} \\ \pi_{ab} = A_{66} e_{ab} . \end{array} \right.$$

Il y a donc 9 modules d'élasticité et 3 constantes thermiques. De plus, le tenseur des contraintes initiales est nécessairement diagonal dans la base  $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$ . La définition de cette

base dans un repère quelconque nécessite, quant à elle, la donnée de 3 angles d'Euler.

On a coutume de transformer (5.61) en introduisant des « modules de Young », des « coefficients de Poisson » et des « modules de cisaillement » pour écrire, dans le cas isotherme et à partir de l'état naturel pour simplifier, la loi de comportement sous la forme inversée (5.63). On prendra garde qu'il n'y a pas de symétrie de ces coefficients de Poisson, mais symétrie du tableau (5.63) comme indiqué au paragraphe 5.2, c'est-à-dire que

$$(5.62) \quad \nu_{21} E_1 = \nu_{12} E_2 \quad \nu_{32} E_2 = \nu_{23} E_3 \quad \nu_{31} E_1 = \nu_{13} E_3 \quad :$$

$$(5.63) \quad \left\{ \begin{array}{l} e_{aa} = \frac{1}{E_1} \pi_{aa} - \frac{\nu_{21}}{E_2} \pi_{bb} - \frac{\nu_{31}}{E_3} \pi_{cc} \\ e_{bb} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} \pi_{aa} + \frac{1}{E_2} \pi_{bb} - \frac{\nu_{32}}{E_3} \pi_{cc} \\ e_{cc} = -\frac{\nu_{13}}{E_1} \pi_{aa} - \frac{\nu_{23}}{E_2} \pi_{bb} + \frac{1}{E_3} \pi_{cc} \\ 2e_{bc} = \frac{1}{G_{23}} \pi_{bc} \quad 2e_{ac} = \frac{1}{G_{13}} \pi_{ac} \quad 2e_{ab} = \frac{1}{G_{12}} \pi_{ab} . \end{array} \right.$$

### Matériau orthotrope de révolution dans la configuration de référence

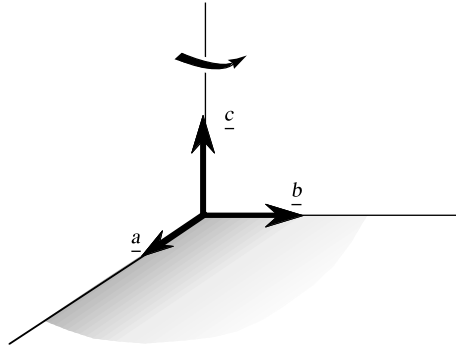


Figure 8 – Matériau orthotrope de révolution : axe de symétrie et plans de symétries

Un matériau est orthotrope de révolution dans la configuration de référence s'il possède, dans cette configuration, un axe de symétrie de révolution et admet pour plans de symétrie tout plan passant par cet axe et un plan perpendiculaire à cet axe. On dit aussi d'un tel matériau qu'il est transversalement isotrope autour de l'axe indiqué. On utilise (figure 8) une base orthonormée constituée de deux vecteurs  $\underline{a}$  et  $\underline{b}$  situés dans le plan de symétrie orthogonal à l'axe et d'un vecteur  $\underline{c}$  selon l'axe de symétrie de révolution. On explicite la loi de comportement en composantes dans cette base ; on en écrit l'invariance par changement d'orientation des vecteurs de base et par rotation de la base autour de l'axe de symétrie.

On obtient la loi de comportement du matériau thermoélastique orthotrope de révolution

dans la base  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$  (ou toute base équivalente) :

$$(5.64) \quad \left\{ \begin{array}{l} \pi_{aa} = \pi^0 + A_{11} e_{aa} + A_{12} e_{bb} + A_{13} e_{cc} - k \tau \\ \pi_{bb} = \pi^0 + A_{12} e_{aa} + A_{11} e_{bb} + A_{13} e_{cc} - k \tau \\ \pi_{cc} = \pi_{cc}^0 + A_{13} e_{aa} + A_{13} e_{bb} + A_{33} e_{cc} - k_3 \tau \\ \pi_{bc} = A_{44} e_{bc} \\ \pi_{ac} = A_{44} e_{ac} \\ \pi_{ab} = (A_{11} - A_{12}) e_{ab} . \end{array} \right.$$

Il y a donc 5 modules d'élasticité et 2 constantes thermiques. De plus, le tenseur des contraintes initiales est nécessairement diagonal et « de révolution » autour de l'axe de symétrie du matériau. La définition de cet axe dans un repère quelconque nécessite par ailleurs la donnée de 2 angles.

On peut aussi introduire des « modules de Young », des « coefficients de Poisson » et des « modules de cisaillement ». Dans le cas isotherme à partir de l'état naturel on écrira :

$$(5.65) \quad \left\{ \begin{array}{l} e_{aa} = \frac{1}{E} \pi_{aa} - \frac{\nu}{E} \pi_{bb} - \frac{\nu'}{E'} \pi_{cc} \\ e_{bb} = -\frac{\nu}{E} \pi_{aa} + \frac{1}{E} \pi_{bb} - \frac{\nu'}{E'} \pi_{cc} \\ e_{cc} = -\frac{\nu'}{E'} \pi_{aa} - \frac{\nu'}{E'} \pi_{bb} + \frac{1}{E'} \pi_{cc} \\ 2 e_{bc} = \frac{1}{G} \pi_{bc} \quad 2 e_{ac} = \frac{1}{G} \pi_{ac} \quad 2 e_{ab} = \frac{2(1+\nu)}{E} \pi_{ab} . \end{array} \right.$$

## 6 Aperçu historique

Sans viser à l'exhaustivité il paraît utile de situer ici, du point de vue historique, l'apparition des principaux concepts évoqués dans ce chapitre consacré au comportement élastique, en donnant les indications essentielles sur les démarches suivies dans les travaux correspondants. Le lecteur soucieux d'approfondir cette question se reportera avec grand profit à l'introduction historique et aux annexes du livre de A.E.H. Love *A treatise on the mathematical theory of elasticity*.

### Élasticité uniaxiale

Comme indiqué au paragraphe 2.4 la loi de comportement élastique uniaxiale reliant l'extension d'un solide élastique à la force de traction qui lui est appliquée fut découverte et énoncée indépendamment par Hooke et Mariotte. L'application en fut faite essentiellement pour l'étude des poutres. Mariotte lui-même reprit ainsi le problème posé par Galilée (1638) qui tentait d'évaluer la capacité portante d'une poutre console. Pour l'étude de l'*elastica* (ligne élastique qui se déforme en flexion) Jacques Bernoulli<sup>(32)</sup> associa la résistance opposée par une tige à la flexion à l'extension et à la contraction de ses fibres longitudinales, aboutissant ainsi pratiquement à un moment de flexion proportionnel à la courbure correspondante

<sup>(32)</sup>Jacques Bernoulli (1654-1705) ; Jean Bernoulli (1667-1748) frère de Jacques ; Daniel Bernoulli (1700-1782) fils de Jean.

de la tige. Ce problème de l'*élastica* fut étudié entre autres par Euler, Lagrange, Daniel Bernoulli, conduisant notamment aux premiers travaux sur la stabilité élastique (cf. chapitre XII, § 3.1). Pour les poutres de section finie c'est Coulomb<sup>(33)</sup> qui, à partir de la loi de Hooke appliquée aux fibres longitudinales, proposa une théorie de la flexion.

## Milieu continu et élasticité tridimensionnelle

Thomas Young fut le premier à reconnaître le cisaillement comme une déformation élastique (Coulomb ne l'avait considéré qu'en relation avec la rupture). Il fit la remarque que la résistance élastique au cisaillement et la résistance élastique à la traction compression d'un même corps sont en général différentes. Il introduisit le concept de « module d'élasticité d'une substance » dont est issu l'actuel *module de Young*<sup>(34)</sup>.

Navier<sup>(35)</sup> rechercha les équations d'équilibre des solides élastiques à travers une « théorie moléculaire ». Considérant la matière comme constituée de molécules ponctuelles (points matériels) qui exerçaient entre elles des forces axiales, il obtenait les forces élastiques comme résultat des variations de ces forces « moléculaires » liées aux déplacements relatifs des molécules. En supposant le matériau isotrope Navier aboutissait à des équations d'équilibre du solide élastique, exprimées en termes de déplacements des points matériels, mais qui ne faisaient intervenir qu'une seule constante liée au matériau, semblable au module de Young<sup>(36)</sup>.

On a déjà évoqué au chapitre V (§ 3.6) le mémoire communiqué à l'Académie des Sciences en septembre 1822 par Cauchy. Outre l'introduction du concept de contrainte comme on l'a mentionné précédemment, ce mémoire explicitait aussi clairement la notion de *déformation* caractérisée par ses 6 composantes ou par les axes principaux des déformations et les extensions principales correspondantes. À partir des équations d'équilibre écrites en contraintes, Cauchy souhaitait aboutir aux équations en déplacements régissant l'équilibre du solide élastique. Il utilisait pour cela la relation contrainte-déformation qu'il obtenait, pour les matériaux isotropes, en supposant d'une part la linéarité et d'autre part la coïncidence des directions principales des contraintes et des déformations. Introduisant ainsi **2 constantes matérielles**, Cauchy aboutissait aux équations d'équilibre pour un solide élastique exprimées en termes de déplacements<sup>(37)</sup>. Dans une extension ultérieure Cauchy s'intéressa aux solides cristallins en faisant l'hypothèse de points matériels interagissant par des forces d'attraction et de répulsion. Dans un premier mémoire sur ce thème Cauchy put notamment retrouver par cette voie les équations du cas isotrope qu'il avait obtenues antérieurement (avec 2 constantes matérielles). Dans un second mémoire, immédiatement postérieur, il aboutissait à une relation contrainte-déformation avec un seul coefficient d'élasticité dans le cas isotrope et aux équations trouvées par Navier ; pour le matériau anisotrope le plus général, Cauchy trouvait 21 constantes matérielles, dont 6 représentaient les contraintes initiales, d'où seulement 15 coefficients d'élasticité.

On doit aussi mentionner les mémoires de Poisson à l'Académie des Sciences, fondés sur une théorie moléculaire, qui retrouvaient les équations obtenues par Navier.

<sup>(33)</sup>Ch. A. Coulomb (1736-1806).

<sup>(34)</sup>Dans *A Course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts* (Londres, 1807), Thomas Young donne la définition suivante : « The modulus of elasticity of a substance is a column of the same substance capable of producing a pressure on its base which is to the weight causing a certain degree of compression, as the length of the substance is to the diminution of its length ». (Cité par S. Timoshenko dans *History of the Strength of Materials*). La complexité de cet énoncé explique sans doute le commentaire de J.E. Gordon dans *The New Science of Strong Materials* : « Young published the idea of his modulus in a rather incomprehensible paper in 1807 after he had been dismissed from his lectureship at the Royal Institution for not being sufficiently practical. Thus perhaps the most famous and the most useful of all concepts in engineering, was not generally understood or absorbed into engineering practice until after Young's death ».

<sup>(35)</sup>C. Navier (1785-1836) : mémoire lu à l'Académie des Sciences en 1821, publié en 1827.

<sup>(36)</sup>L'équation obtenue n'est pas celle donnée au chapitre VIII (§ 5.3).

<sup>(37)</sup>Équations exactes données au chapitre VIII (§ 5.3).

## L'approche énergétique

C'est à Green <sup>(38)</sup> qu'il revient d'avoir obtenu les équations de l'élasticité à partir de considérations énergétiques. « In whatever way the elements of any material system may act upon each other, if all internal forces exerted be multiplied by the elements of their respective directions, the total sum for any assigned portion of the mass will always be the exact differential of some function ». En supposant que cette fonction pouvait être développée en puissances et produits des composantes de la déformation, et en se restreignant au deuxième ordre pour les petites déformations, Green obtenait les équations du comportement élastique linéaire avec les 21 coefficients d'élasticité dans le cas anisotrope général (cf. § 5.2 ci-dessus).

À noter que la question du nombre des coefficients d'élasticité (1 ou 2 pour le matériau isotrope, 15 ou 21 dans le cas le plus général ?) est demeurée pendant longtemps une question ouverte (cf. par exemples les mémoires de Saint Venant, 1863), jusqu'à ce que des résultats expérimentaux indiscutables, et des considérations théoriques, conduisent à rejeter définitivement la thèse du nombre réduit de coefficients : c'est ainsi par exemple que, dans le cas isotrope, la théorie moléculaire de Navier conduirait à l'unique valeur 0,25 (retrouvée par les théories de Cauchy, Poisson, ...) pour le coefficient de Poisson, qui est en désaccord avec l'expérience pour un très grand nombre de matériaux.

---

<sup>(38)</sup>G. Green (1793-1841).

## Récapitulatif des formules essentielles

- *Premier principe*

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{E}} + \dot{K} &= \mathcal{P}_{(e)}(\underline{U}) + \dot{Q} \\ \dot{\mathbf{E}} &= \dot{Q} - \mathcal{P}_{(i)}(\underline{U}) \\ \dot{Q} &= - \int_{\partial\Omega_t} \underline{q} \cdot \underline{n} \, da + \int_{\Omega_t} r \, d\Omega_t\end{aligned}$$

Équation de l'énergie

$$\rho \dot{e} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} + r - \operatorname{div} \underline{q}$$

- *Deuxième principe*

$$\dot{S} \geq - \int_{\partial\Omega_t} \frac{\underline{q} \cdot \underline{n}}{T} \, da + \int_{\Omega_t} \frac{r}{T} \, d\Omega_t$$

Inégalité fondamentale

$$\begin{aligned}\rho \dot{s} + \operatorname{div} \left( \frac{\underline{q}}{T} \right) - \frac{r}{T} &\geq 0 \\ \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} - \rho(\dot{\psi} + \mathbf{s}\dot{T}) - \frac{\underline{q}}{T} \cdot \underline{\underline{\operatorname{grad}}} T &\geq 0 \\ \underline{\underline{\pi}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} - \rho_0(\dot{\psi} + \mathbf{s}\dot{T}) - \frac{\underline{q}_0}{T} \cdot \underline{\underline{\nabla}} T &\geq 0\end{aligned}$$

- *Loi de comportement thermoélastique* (avec liaisons internes)

$$\begin{aligned}\varphi_p(\underline{\underline{\epsilon}}) &= 0 \quad , \quad p = 1, \dots, n \quad 1 \leq n \leq 6 \\ \mathbf{s} &= - \frac{\partial \psi(T, \underline{\underline{\epsilon}})}{\partial T} \\ \underline{\underline{\pi}} &= \rho_0 \frac{\partial \psi(T, \underline{\underline{\epsilon}})}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}} + \eta_p \frac{\partial \varphi_p(\underline{\underline{\epsilon}})}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}} \quad (\eta_p \text{ scalaires arbitraires})\end{aligned}$$

$\psi$  et  $\varphi_p$  symétriques en  $e_{ij}$  et  $e_{ji}$

Linéarisation physique

$$\underline{\underline{\pi}} = \underline{\underline{\pi}}^0 + \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{e}} - \underline{\underline{k}} \tau$$

$$\pi_{ij} = \pi_{ij}^0 + A_{ijkl} e_{lk} - k_{ij} \tau$$

$$A_{ijkl} = A_{ijlk} = A_{jikl} = A_{jilk} = A_{klij} \quad ; \quad \pi_{ij}^0 = \pi_{ji}^0 \quad ; \quad k_{ij} = k_{ji}$$

Isotropie

$$\underline{\underline{\pi}} = \pi^0 \underline{\underline{1}} + \lambda (\text{tr } \underline{\underline{e}}) \underline{\underline{1}} + 2\mu \underline{\underline{e}} - k \tau \underline{\underline{1}}$$

• *Transformation infinitésimale, matériau isotrope*

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^P + \lambda (\text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}}') \underline{\underline{1}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}' - k \tau' \underline{\underline{1}}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}' = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}}' - \frac{\nu}{E} (\text{tr } \underline{\underline{\sigma}}') \underline{\underline{1}} + \alpha \tau' \underline{\underline{1}}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^P$$

$$E = \mu \frac{(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad \alpha = \frac{k}{(3\lambda + 2\mu)}$$

$$\lambda = E \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad k = \alpha \frac{E}{(1-2\nu)}$$

$$3K = 3\lambda + 2\mu = \frac{E}{(1-2\nu)}$$

$$3\lambda + 2\mu > 0 \quad \mu > 0$$

$$E > 0 \quad -1 < \nu < \frac{1}{2}$$

## Exercices

**VII.1 - Thermoélasticité linéaire.** Écrire la loi de comportement thermoélastique linéaire en transformation infinitésimale pour le matériau isotrope à partir d'une contrainte initiale isotrope quelconque.

*Éléments de réponse.*

$$\underline{\underline{\pi}} = \pi^0 \underline{\underline{\mathbf{1}}} + \lambda(\text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{\mathbf{1}}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} - k\tau \underline{\underline{\mathbf{1}}}.$$

On en tire, au 1<sup>er</sup> ordre en transformation infinitésimale, la forme de (5.29) pour le matériau isotrope :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \pi^0 \underline{\underline{\mathbf{1}}} + (\lambda - \pi^0)(\text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{\mathbf{1}}} + 2(\mu + \pi^0) \underline{\underline{\varepsilon}} - k\tau \underline{\underline{\mathbf{1}}}$$

ou encore

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma^0 \underline{\underline{\mathbf{1}}} + \lambda'(\text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{\mathbf{1}}} + 2\mu' \underline{\underline{\varepsilon}} - k\tau \underline{\underline{\mathbf{1}}}$$

*Commentaire.*

La loi de comportement conserve en représentation eulérienne la même forme qu'en représentation lagrangienne mais les coefficients sont modifiés par la contrainte initiale (cf. § 5.2). Si l'état initial est quasi-naturel on a, au 1<sup>er</sup> ordre,  $\lambda' = \lambda$  et  $\mu' = \mu$  comme dans le cas de l'état initial naturel.

**VII.2 - Thermoélasticité du second ordre.** On considère un matériau thermoélastique, isotrope dans la configuration de référence, qui n'est assujéti à aucune liaison interne. Expliciter la loi de comportement de ce matériau en thermoélasticité du second ordre.

*Éléments de réponse.*

Développement polynomial de  $\rho_0 \psi$  au 3<sup>ème</sup> ordre, compte tenu de l'isotropie :

$$\begin{aligned} \rho_0 \psi = & \pi^0 I'_1 - \rho_0 s_0 \tau + \frac{\lambda}{2} (I'_1)^2 + 2\mu I'_2 - k I'_1 \tau - \frac{1}{2} \rho_0 b \tau^2 \\ & + \frac{\alpha}{3} (I'_1)^3 + \beta I'_1 I'_2 + \gamma I'_3 + \frac{\delta}{2} (I'_1)^2 \tau + \varepsilon I'_2 \tau + \varphi I'_1 \tau^2 + \eta \tau^3. \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } \underline{\underline{\pi}} = (\pi_0 + \lambda I'_1 - k\tau + \alpha (I'_1)^2 + \beta I'_2 + \delta I'_1 \tau + \varphi \tau^2) \underline{\underline{\mathbf{1}}} + (2\mu + \beta I'_1 + \varepsilon \tau) \underline{\underline{\varepsilon}} + \gamma \underline{\underline{\varepsilon}}^2.$$

Il y a 9 coefficients de thermoélasticité du second ordre pour ce matériau isotrope, dont 5 coefficients d'élasticité isotherme.

**VII.3 - Matériau « incompressible ».** Étude de la liaison interne « invariance du volume », (on dit aussi matériau « incompressible ») : expression de  $\varphi(\underline{\underline{\varepsilon}})$ , tenseurs inopérants.

*Éléments de réponse.*

- Expression de  $\varphi(\underline{\underline{\varepsilon}})$  :

la restriction sur les déformations s'écrit  $\det \underline{\underline{F}} = 1$  ;

en utilisant l'expression de  $(\det \underline{\underline{F}})^2$  donnée au chapitre II (§ 3.3) on trouve pour la liaison interne

$$\varphi(\underline{\underline{\varepsilon}}) = I'_1 + (I'_1)^2 - 2I'_2 + \frac{2}{3}(I'_1)^3 - 4I'_1 I'_2 + 4I'_3 = 0.$$



- Tenseurs inopérants :

en représentation eulérienne la liaison « invariance du volume » s'écrit :  $\text{tr } \underline{\underline{d}} = 0$

d'où, en représentation lagrangienne :  $(\underline{\underline{1}} + 2\underline{\underline{e}})^{-1} : \underline{\underline{e}} = 0$  ;

$\frac{\partial \varphi}{\partial \underline{\underline{e}}} = (\underline{\underline{1}} + 2\underline{\underline{e}})^{-1}$  (peut aussi s'obtenir directement à partir de  $\varphi(\underline{\underline{e}})$  et du théorème de Cayley-Hamilton).

Tenseurs inopérants,  $\eta$  scalaire arbitraire :

en représentation lagrangienne,  $\eta (\underline{\underline{1}} + 2\underline{\underline{e}})^{-1} = \eta ((1+2I'_1 + 2(I'_1)^2 - 4I'_2) \underline{\underline{1}} - (2+4I'_1) \underline{\underline{e}} + 4\underline{\underline{e}}^2)$   
 en représentation eulérienne,  $\eta \underline{\underline{1}}$  (cf. § 4.6).

## VII.4 - Thermoélasticité du premier ordre pour le matériau isotrope « incompressible ». Écrire la loi de comportement pour un matériau thermoélastique, isotrope, incompressible au premier ordre en $\|\underline{\underline{e}}\|$ .

### Éléments de réponse.

• La liaison interne a été étudiée dans Ex. VII.3. Elle implique que  $I'_1$  est du second ordre en  $\|\underline{\underline{e}}\|$  et est équivalent à  $2I'_2$ . On développe  $\rho_0 \psi$  de façon à n'avoir, après dérivation que des termes du premier ordre en  $\|\underline{\underline{e}}\|$  dans  $\underline{\underline{\pi}}$  donné par :

$$\underline{\underline{\pi}} = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{e}}} + \eta \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{\underline{e}}}, \quad \eta \text{ scalaire arbitraire.}$$

D'où, à partir des résultats de Ex. VII.1 et Ex. VII.2 :

$$\rho_0 \psi = \pi^0 I'_1 - \rho_0 s_0 \tau + 2\mu I'_2 - k I'_1 \tau$$

$$\underline{\underline{\pi}} = \pi^0 \underline{\underline{1}} + 2\mu \underline{\underline{e}} + \eta (\underline{\underline{1}} - 2\underline{\underline{e}}) - k \tau \underline{\underline{1}},$$

avec  $\varphi(\underline{\underline{e}}) = \det(\underline{\underline{1}} + 2\underline{\underline{e}}) - 1 = 0$ ,

où  $(\underline{\underline{1}} - 2\underline{\underline{e}})$  est l'expression au 1<sup>er</sup> ordre de  $(\underline{\underline{1}} + 2\underline{\underline{e}})^{-1}$ .

On peut encore écrire, au 1<sup>er</sup> ordre :  $\underline{\underline{\pi}} = 2(\pi^0 + \mu) \underline{\underline{e}} + (\eta + \pi^0 - k\tau)(\underline{\underline{1}} - 2\underline{\underline{e}})$

soit :  $\underline{\underline{\pi}} = 2(\pi^0 + \mu) \underline{\underline{e}} + \varpi (\underline{\underline{1}} - 2\underline{\underline{e}})$  ,  $\varpi$  scalaire arbitraire.

• En transformation infinitésimale :

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2(\pi^0 + \mu) \underline{\underline{e}} + \varpi \underline{\underline{1}} \quad \text{avec} \quad \text{tr } \underline{\underline{e}} = 0.$$

### Commentaire.

Le terme  $\varpi \underline{\underline{1}}$  ( $\varpi$  arbitraire) dans cette loi s'interprète comme résultat de l'indétermination du terme  $\lambda'(\text{tr } \underline{\underline{e}}) \underline{\underline{1}}$  écrit dans Ex. VII.1 quand  $\text{tr } \underline{\underline{e}} \rightarrow 0$  et  $\lambda' \rightarrow \infty$ . La constante  $\pi^0$  (et le terme  $\pi^0 \underline{\underline{1}}$ ) perd ici la signification de contrainte initiale (qui justifiait la notation dans (5.3), (5.12) et Ex. VII.1) : en effet, pour  $\underline{\underline{e}} = 0$ , la contrainte initiale est un tenseur isotrope laissé indéterminé par la loi de comportement en raison de la liaison interne. Dans cette écriture au premier ordre la constante  $\pi^0$  joue le même rôle que  $\mu$  ; ceci est cohérent avec le fait que l'on peut, dans l'écriture de  $\rho_0 \psi$ , tenir compte de la liaison interne exprimée dans Ex. VII.3 (cf. § 4.3) : on peut, dans  $\rho_0 \psi$  pour la loi de comportement au premier ordre, remplacer le terme  $\pi^0 I'_1$  par  $2\pi^0 I'_2$  qui lui est équivalent. Pour cette raison la loi de comportement thermoélastique du matériau incompressible peut être réduite, au premier ordre, à :

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2\mu \underline{\underline{e}} + \varpi \underline{\underline{1}} \quad \text{avec} \quad \text{tr } \underline{\underline{e}} = 0 \quad , \quad \varpi \text{ scalaire arbitraire, avec la condition } \mu > 0.$$

La confusion des rôles de  $\pi^0$  et  $\mu$  dans les expressions de  $\underline{\underline{\pi}}$  et  $\underline{\underline{\sigma}}$  est évidemment liée au caractère infinitésimal de la déformation (cf. Ex. VII.11).

Il est intéressant de remarquer que, dans la formulation adoptée, la liaison interne d'incompressibilité s'applique à la déformation du matériau quelle qu'en soit la cause ; autrement dit, le matériau est à la fois « *mécaniquement incompressible* » et « *thermiquement indilatable* ». Ceci est conforme à l'intuition que l'on peut avoir relativement à la stabilité du matériau, qui est confirmée par l'analyse. Il en résulte que le passage à la limite sur la formule (5.18) pour le matériau incompressible ( $\lambda \rightarrow \infty$ ) conserve bien une valeur finie au coefficient  $k$ .

**VII.5 - Inextensibilité.** On considère un matériau dont la microstructure impose l'invariance des longueurs (on dit aussi « l'inextensibilité ») dans une direction matérielle donnée. Étudier cette liaison interne.

*Éléments de réponse.*

La liaison interne est définie en représentation lagrangienne ;  $X$  désignant la direction concernée :

$$\varphi(\underline{e}) = 0 \Leftrightarrow e_{XX} = 0.$$

Les tenseurs inopérants sont de la forme :  $\eta \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{e}} = \eta \underline{e}_X \otimes \underline{e}_X$ ,  $\eta$  scalaire arbitraire.

**VII.6 - Symétrie hexagonale.** Soit  $R = (O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$  un repère orthonormé. On considère un matériau élastique linéaire dont la microstructure induit, dans la configuration de référence, les symétries matérielles suivantes : symétrie par rapport au plan  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ , isométries du groupe d'invariance d'un hexagone régulier dans le plan  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ . Déterminer le nombre de coefficients de thermoélasticité linéaire de ce matériau.

*Éléments de réponse.*

Le matériau est orthotrope.  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{e}_3$  définissant les intersections des plans d'orthotropie :  $\underline{a}$  rayon de l'hexagone,  $\underline{b}$  apothème orthogonal. Il faut exploiter la symétrie ternaire pour réduire encore le nombre de coefficients. On exprime l'équation (4.40) dans la base  $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{e}_3)$ , pour une isométrie du type « rotation d'angle  $\varphi = 2\pi/3$  autour de  $\underline{e}_3$  ». On obtient les relations supplémentaires :

$$A_{13} = A_{23}, A_{11} = A_{22}, A_{44} = A_{55}, A_{11} - A_{12} = A_{66}, k_1 = k_2,$$

qui sont identiques à celles obtenues pour le matériau transversalement isotrope : 7 coefficients de thermoélasticité linéaire indépendants (5 constantes élastiques et 2 thermiques).

*Commentaire.*

Bien que l'hypothèse initiale soit plus faible que celle de l'isotropie transversale il se révèle que le matériau élastique linéaire étudié est transversalement isotrope. La définition de l'orientation du matériau ne nécessite donc que la donnée de  $\underline{e}_3$ , c'est-à-dire de 2 angles. On aboutit à la même conclusion pour une symétrie d'ordre supérieur autour de  $\underline{e}_3$ . Ce résultat n'est pas généralisable à d'autres types de lois de comportement.

**VII.7 - Symétries « d'un carré ».**  $R = (O, \underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$  est un repère orthonormé. On considère un matériau linéaire dont les symétries dans la configuration de référence sont : symétrie par rapport au plan  $(\underline{a}, \underline{b})$ , isométries du groupe d'invariance d'un carré de côtés  $\underline{a}$  et  $\underline{b}$  dans le plan  $(\underline{a}, \underline{b})$ . Déterminer le nombre de coefficients de thermoélasticité linéaire de ce matériau.

*Éléments de réponse.*

Le matériau est orthotrope : plans  $(\underline{a}, \underline{b})$ ,  $(\underline{b}, \underline{c})$ ,  $(\underline{c}, \underline{a})$ . Il faut exploiter les autres propriétés d'invariance du carré : invariance par rotation  $\varphi = k\pi/2$  et symétries par rapport aux diagonales ; une rotation ou une symétrie suffit.

On exprime l'équation (4.40) dans la base  $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$ , pour une telle isométrie. On obtient les relations supplémentaires :  $A_{13} = A_{23}$ ,  $A_{11} = A_{22}$ ,  $A_{44} = A_{55}$ ,  $k_1 = k_2$ .

Il reste donc 8 coefficients de thermoélasticité linéaire indépendants : 6 constantes élastiques et 2 thermiques.

*Commentaire.*

On remarque que, à la différence du cas de l'isotropie transversale (orthotropie de révolution), le module de cisaillement dans le plan  $(\underline{a}, \underline{b})$  demeure un coefficient élastique indépendant. Du point de vue mécanique la définition de l'orientation du matériau dans un repère quelconque nécessite la donnée des 3 angles d'Euler de la base  $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$ , tandis que du point de vue thermique l'orientation de  $\underline{c}$  (donc la donnée de 2 angles) suffit.

**VII.8 - Symétrie cubique.**  $R = (O, \underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$  désignant un repère orthonormé, on considère un matériau thermoélastique linéaire dont la microstructure induit, dans la configuration de référence, les symétries matérielles suivantes : isométrie du groupe d'invariance du cube de côtés  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ . Déterminer le nombre de coefficients de thermoélasticité linéaire de ce matériau.

*Éléments de réponse.*

En poursuivant le raisonnement mis en œuvre dans Ex. VII.7 et en l'appliquant aux carrés de côtés  $(\underline{b}, \underline{c})$  ou  $(\underline{a}, \underline{c})$ , on obtient, par rapport au matériau orthotrope, les relations supplémentaires :

$A_{11} = A_{22} = A_{33}$ ,  $A_{12} = A_{13} = A_{23}$ ,  $A_{44} = A_{55} = A_{66}$ ,  $k_1 = k_2 = k_3$ . Il y reste donc 4 coefficients de thermoélasticité linéaire indépendants : 3 constantes élastiques et 1 thermique.

*Commentaire.*

Il reste 3 constantes d'élasticité isotherme au lieu de 2 pour le matériau isotrope ; celui-ci correspond à la relation supplémentaire  $A_{44} = (A_{11} - A_{12})$  obtenue comme pour le matériau orthotrope de révolution (5.64). Du point de vue mécanique la définition de l'orientation du matériau dans un repère quelconque nécessite la donnée des 3 angles d'Euler de la base  $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$ , tandis que du point de vue thermique le matériau est isotrope.

**VII.9 - Autres formulations de la loi de comportement thermoélastique.** On considère un matériau thermoélastique sans liaison interne. En conservant la convention d'écriture tensorielle telle que (4.2) expliquée au paragraphe 4.1 on désigne par  $\psi$  la fonction définie par

$$\forall T, \forall \underline{F}, \psi(T, \underline{F}) = \psi(T, \underline{e}).$$

Donner en fonction de  $\frac{\partial \psi(T, \underline{F})}{\partial \underline{F}}$  les expressions de  $\underline{\sigma}$  et  $\underline{B}$  correspondant à  $\underline{F}$  par la loi de comportement thermoélastique. Cas du matériau avec liaisons internes. Cas particulier du matériau incompressible.

*Éléments de réponse.*

• D'après la définition générale (4.11) appliquée à  $\frac{\partial \psi}{\partial \underline{F}}, \forall \dot{T}, \forall \dot{\underline{F}}$  :

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \psi}{\partial \underline{F}} : \dot{\underline{F}} \quad \text{et} \quad \dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \psi}{\partial \underline{e}} : \dot{\underline{e}} \quad \text{où} \quad 2 \dot{\underline{e}} = {}^t \dot{\underline{F}} \cdot \underline{F} + {}^t \underline{F} \cdot \dot{\underline{F}}.$$

On écrit que  $\forall \dot{T}, \forall \dot{\underline{F}} : \dot{\psi} = \dot{\psi}$  ;

$$\text{d'où} : \frac{\partial \psi(T, \underline{F})}{\partial T} = \frac{\partial \psi(T, \underline{e})}{\partial T} \quad \text{et} \quad \forall \dot{\underline{F}}, 2 \frac{\partial \psi}{\partial \underline{F}} : \dot{\underline{F}} = \frac{\partial \psi}{\partial \underline{e}} : ({}^t \dot{\underline{F}} \cdot \underline{F}) + \frac{\partial \psi}{\partial \underline{e}} : ({}^t \underline{F} \cdot \dot{\underline{F}}).$$

On en déduit :

$$\forall \underline{\underline{F}}, 2 \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{F}}} : \dot{\underline{\underline{F}}} = \left( \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{e}}} \cdot {}^t \underline{\underline{F}} \right) : \dot{\underline{\underline{F}}} + {}^t \left( \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{e}}} \right) \cdot {}^t \underline{\underline{F}} : \dot{\underline{\underline{F}}},$$

$$\text{d'où : } \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{F}}} = \left( \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{e}}} \right)_s \cdot {}^t \underline{\underline{F}}$$

et, avec la convention d'écriture symétrique de  $\psi(T, \underline{\underline{e}})$ ,

$$\frac{\partial \psi(T, \underline{\underline{F}})}{\partial \underline{\underline{F}}} = \frac{\partial \psi(T, \underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}} \cdot {}^t \underline{\underline{F}}.$$

Il en résulte évidemment que  $\frac{\partial \psi(T, \underline{\underline{F}})}{\partial \underline{\underline{F}}} \cdot {}^t \underline{\underline{F}}^{-1}$  est symétrique et égal à  $\underline{\underline{F}}^{-1} \cdot {}^t \left( \frac{\partial \psi(T, \underline{\underline{F}})}{\partial \underline{\underline{F}}} \right)$ .

• De  $\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\rho}{\rho_0} \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{\pi}} \cdot {}^t \underline{\underline{F}}$  on tire l'expression de la loi de comportement thermoélastique entre  $\underline{\underline{\sigma}}$  et  $\underline{\underline{F}}$  :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \rho \underline{\underline{F}} \cdot \frac{\partial \psi(T, \underline{\underline{F}})}{\partial \underline{\underline{F}}}.$$

• De même, à partir de  $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{\pi}}$  (chapitre V, § 4.2) :

$$\underline{\underline{B}} = \rho_0 {}^t \left( \frac{\partial \psi(T, \underline{\underline{F}})}{\partial \underline{\underline{F}}} \right) \text{ et } {}^t \underline{\underline{B}} : \dot{\underline{\underline{F}}} = \underline{\underline{\pi}} : \dot{\underline{\underline{e}}}.$$

• De la même façon, on caractérise les liaisons internes par des fonctions  $\varphi_p$  de  $\underline{\underline{F}}$  telles que :  $\varphi_p(\underline{\underline{F}}) = 0 \Leftrightarrow \varphi_p(\underline{\underline{e}}) = 0$ ,  $p = 1, \dots, n$ .

On obtient :  $\underline{\underline{\sigma}} = \rho \underline{\underline{F}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{F}}} + \eta_p (\det \underline{\underline{F}})^{-1} \underline{\underline{F}} \cdot \frac{\partial \varphi_p(\underline{\underline{F}})}{\partial \underline{\underline{F}}}$  avec  $\varphi_p(\underline{\underline{F}}) = 0$ ,  $p = 1, \dots, n$

ainsi que :  $\underline{\underline{B}} = \rho_0 {}^t \left( \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{F}}} \right) + \eta_p {}^t \left( \frac{\partial \varphi_p}{\partial \underline{\underline{F}}} \right)$  ( $\eta_p$  scalaires arbitraires).

• Pour le matériau incompressible on écrit la liaison interne sous la forme :

$$\varphi(\underline{\underline{F}}) = \det \underline{\underline{F}} - 1 = 0.$$

On a (chapitre III, § 3.5) :  $\frac{d(\det \underline{\underline{F}})}{dt} (\det \underline{\underline{F}})^{-1} = \text{tr } d \underline{\underline{F}} : \underline{\underline{F}}^{-1}$

d'où :  $\frac{\partial \varphi}{\partial \underline{\underline{F}}} = (\det \underline{\underline{F}}) \underline{\underline{F}}^{-1}$  et

$$\underline{\underline{\sigma}} = \rho \underline{\underline{F}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{F}}} + \eta \underline{\underline{F}} \quad \text{avec } \det \underline{\underline{F}} = 1, \quad \underline{\underline{B}} = \rho_0 {}^t \left( \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{F}}} \right) + \eta \underline{\underline{F}}^{-1} \quad (\eta \text{ scalaire arbitraire}).$$

**VII.10 - Matériau thermoélastique isotrope : directions principales des contraintes, contraintes principales.** On considère un matériau thermoélastique isotrope sans liaison interne. Montrer que les directions principales de  $\underline{\underline{\sigma}}$  se déduisent des directions principales de  $\underline{\underline{\pi}}$  par transport convectif et donner la relation entre les contraintes principales  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  de  $\underline{\underline{\sigma}}$  et les contraintes principales  $\pi_1, \pi_2, \pi_3$  de  $\underline{\underline{\pi}}$ . Montrer que  $\psi(T, \underline{\underline{F}})$  défini dans Ex. VII.9 se met, pour ce matériau, sous la forme d'une fonction symétrique  $\bar{\psi}(T, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  des dilatations principales et donner les expressions des  $\sigma_i$  et de  $\pi_i$  en fonctions des  $\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \lambda_i}$ . Cas du matériau isotrope avec liaisons internes. Cas particulier du matériau incompressible.

**Éléments de réponse.**

• En raison de l'isotropie du matériau,  $\underline{\underline{\pi}}$  a mêmes directions principales que  $\underline{\underline{e}}$ ; soient  $\underline{U}, \underline{V}, \underline{W}$  leurs vecteurs unitaires :  $\underline{\underline{\pi}} = \pi_1 \underline{U} \otimes \underline{U} + \pi_2 \underline{V} \otimes \underline{V} + \pi_3 \underline{W} \otimes \underline{W}$ .

$\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$  obtenus par transport convectif de  $\underline{U}, \underline{V}, \underline{W}$  s'écrivent :

$$\underline{u} = \underline{F} \cdot \underline{U}, \quad \underline{v} = \underline{F} \cdot \underline{V}, \quad \underline{w} = \underline{F} \cdot \underline{W}.$$

De  $\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\rho}{\rho_0} \underline{F} \cdot \underline{\underline{\pi}} \cdot {}^t \underline{F}$  on tire :  $\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\rho}{\rho_0} (\pi_1 \underline{u} \otimes \underline{u} + \pi_2 \underline{v} \otimes \underline{v} + \pi_3 \underline{w} \otimes \underline{w})$

qui démontre le résultat cherché sur les directions principales.

• On a  $|\underline{u}| = \lambda_1$ ,  $|\underline{v}| = \lambda_2$ ,  $|\underline{w}| = \lambda_3$  (dilatations principales)

$$\text{d'où : } \sigma_1 = \frac{\rho}{\rho_0} \lambda_1^2 \pi_1 = \pi_1 \frac{\lambda_1}{\lambda_2 \lambda_3}, \quad \sigma_2 = \pi_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_1 \lambda_3}, \quad \sigma_3 = \pi_3 \frac{\lambda_3}{\lambda_1 \lambda_2}.$$

• Le matériau étant isotrope,  $\psi(T, \underline{\underline{e}}) = \psi(T, \underline{\underline{e}})$  est une fonction des invariants de  $\underline{\underline{e}}$  ou encore une fonction symétrique des valeurs principales de  $\underline{\underline{e}}$  soit  $e_i = (\lambda_i^2 - 1)/2$ ; c'est donc une fonction symétrique des  $\lambda_i$  :

$$\psi(T, \underline{\underline{e}}) = \hat{\psi}(T, e_1, e_2, e_3) = \bar{\psi}(T, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3).$$

On désigne par  $e_{ij}$  les composantes de  $\underline{\underline{e}}$  dans sa base principale  $\underline{U}, \underline{V}, \underline{W}$  figée à l'instant  $t$ .

On calcule  $\dot{I}'_1, \dot{I}'_2, \dot{I}'_3$ ; il vient :

$$\dot{e}_{11} + \dot{e}_{22} + \dot{e}_{33} = \dot{e}_1 + \dot{e}_2 + \dot{e}_3,$$

$$e_1 \dot{e}_{11} + e_2 \dot{e}_{22} + e_3 \dot{e}_{33} = e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2 + e_3 \dot{e}_3,$$

$$(e_1)^2 \dot{e}_{11} + (e_2)^2 \dot{e}_{22} + (e_3)^2 \dot{e}_{33} = (e_1)^2 \dot{e}_1 + (e_2)^2 \dot{e}_2 + (e_3)^2 \dot{e}_3,$$

qui montrent que  $\dot{e}_{11} = \dot{e}_1, \dot{e}_{22} = \dot{e}_2, \dot{e}_{33} = \dot{e}_3$ .

On en déduit, puisque  $\underline{\underline{\pi}} = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{e}}}$  admet  $\underline{U}, \underline{V}$ , et  $\underline{W}$  pour directions principales, que :

$$\underline{\underline{\pi}} = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{e}}} = \rho_0 \left( \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial e_1} \underline{U} \otimes \underline{U} + \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial e_2} \underline{V} \otimes \underline{V} + \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial e_3} \underline{W} \otimes \underline{W} \right)$$

$$\text{d'où : } \pi_i = \rho_0 \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial e_i} = \frac{1}{\lambda_i} \rho_0 \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \lambda_i} \quad \text{et} \quad \sigma_i = \lambda_i \rho \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \lambda_i} \quad \text{puisque} \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}.$$

• Les liaisons internes devant être isotropes, on a de même :

$\varphi_p(\underline{\underline{e}}) = \bar{\varphi}_p(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  fonction symétrique de  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . Il vient :

$$\pi_i = \frac{1}{\lambda_i} (\rho_0 \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \lambda_i} + \eta_p \frac{\partial \bar{\varphi}_p}{\partial \lambda_i}), \quad \eta_p \text{ scalaires arbitraires,}$$

$$\sigma_i = \lambda_i \left( \rho \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \lambda_i} + \eta_p \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial \bar{\varphi}_p}{\partial \lambda_i} \right) \quad \text{où} \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}.$$

• Pour le matériau incompressible la liaison interne s'écrit :  $\bar{\varphi}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 - 1 = 0$ .

$$\text{D'où : } \pi_i = \frac{1}{\lambda_i} \rho_0 \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \lambda_i} + \eta \frac{1}{\lambda_i^2}, \quad \sigma_i = \lambda_i \rho_0 \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \lambda_i} + \eta.$$

**VII.11 - Modélisation du comportement élastique du caoutchouc.** Divers modèles ont été proposés pour rendre compte des observations expérimentales relatives au comportement élastique isotherme du caoutchouc en grande déformation. Le matériau est considéré comme isotrope et incompressible avec (cf. Ex. VII.10 pour les notations) :

$$\text{pour le modèle « Néo-Hookien »} \quad : \quad \rho_0 \psi = \mu I'_1,$$

$$\text{pour le modèle de Varga} \quad : \quad \rho_0 \bar{\psi} = 2\mu (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3),$$

$$\text{pour un modèle de Mooney-Rivlin} \quad : \quad \rho_0 \psi = \pi^0 I'_1 + \frac{\alpha}{2} (I'^2_1 - 2 I'_2),$$

pour un modèle d'Ogden :

$$\rho_0 \bar{\psi} = \frac{\mu_1}{\alpha_1} (\lambda_1^{\alpha_1} + \lambda_2^{\alpha_1} + \lambda_3^{\alpha_1} - 3) + \frac{\mu_2}{\alpha_2} (\lambda_1^{\alpha_2} + \lambda_2^{\alpha_2} + \lambda_3^{\alpha_2} - 3) + \frac{\mu_3}{\alpha_3} (\lambda_1^{\alpha_3} + \lambda_2^{\alpha_3} + \lambda_3^{\alpha_3} - 3).$$

Écrire les lois de comportement correspondantes.

**Éléments de réponse.**

Le matériau étant isotrope incompressible on s'appuie sur les résultats du paragraphe 4.3 et de Ex. VII.3, Ex. VII.9 et VII.10.  $\varphi(\underline{\underline{\epsilon}}) = \det(\underline{\underline{1}} + 2\underline{\underline{\epsilon}}) - 1$ ,  $\varphi(\underline{\underline{F}}) = \det \underline{\underline{F}} - 1$ ,  $\bar{\varphi}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 - 1$ .

• Modèle « Néo-Hookien » :

$$\underline{\underline{\pi}} = \mu \underline{\underline{1}} + \eta (\underline{\underline{1}} + 2\underline{\underline{\epsilon}})^{-1} \quad \text{avec} \quad \varphi(\underline{\underline{\epsilon}}) = 0, \quad \eta \text{ scalaire arbitraire.}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mu \underline{\underline{F}} \cdot {}^t \underline{\underline{F}} + \eta \underline{\underline{1}} \quad \text{avec} \quad \det \underline{\underline{F}} - 1 = 0,$$

$$\rho_0 \bar{\psi} = \frac{\mu}{2} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3), \quad \sigma_i = \mu \lambda_i^2 + \eta \quad \text{avec} \quad \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1.$$

• Modèle de Varga :

$$\pi_i = 2\mu \frac{1}{\lambda_i} + \eta \frac{1}{\lambda_i^2} \quad \text{avec} \quad \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1, \quad \eta \text{ scalaire arbitraire, } \sigma_i = 2\mu \lambda_i + \eta.$$

• Modèle de Mooney-Rivlin :

$$\underline{\underline{\pi}} = \pi^0 \underline{\underline{1}} + \alpha I_1' \underline{\underline{1}} - \alpha \underline{\underline{\epsilon}} + \eta (\underline{\underline{1}} + 2\underline{\underline{\epsilon}})^{-1} \quad , \quad \text{avec} \quad \varphi(\underline{\underline{\epsilon}}) = 0, \quad \eta \text{ scalaire arbitraire.}$$

$$\rho_0 \bar{\psi} = \frac{1}{2} (\pi^0 - \alpha) (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + \frac{\alpha}{4} (\lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 - 3)$$

ou encore, en tenant compte de la liaison interne  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$  :

$$\rho_0 \bar{\psi} = \frac{1}{2} (\pi^0 - \alpha) (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + \frac{\alpha}{4} \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \frac{1}{\lambda_3^2} - 3 \right)$$

$$\pi_i = (\pi^0 - \alpha) - \frac{\alpha}{2} \frac{1}{\lambda_i^4} + \eta' \frac{1}{\lambda_i^2}, \quad \text{avec} \quad \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1, \quad \eta' \text{ scalaire arbitraire,}$$

$$\sigma_i = (\pi^0 - \alpha) \lambda_i^2 - \frac{\alpha}{2} \frac{1}{\lambda_i^2} + \eta'.$$

Pour le caoutchouc étudié par Mooney :  $\pi = 0, 502 \text{ MPa}$ ,  $\alpha = 0, 136 \text{ MPa}$ .

• Modèle d'Ogden :

$$\sigma_i = \mu_1 \lambda_i^{\alpha_1} + \mu_2 \lambda_i^{\alpha_2} + \mu_3 \lambda_i^{\alpha_3} + \eta, \quad \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1, \quad \eta \text{ scalaire arbitraire.}$$

Le modèle d'Ogden calé sur des expériences effectuées par Treloar correspond à :

$$\mu_1 = 6,3 \text{ MPa} \quad , \quad \mu_2 = 0,012 \text{ MPa} \quad , \quad \mu_3 = -0,1 \text{ MPa}$$

$$\alpha_1 = 1,3 \quad , \quad \alpha_2 = 5 \quad , \quad \alpha_3 = -2.$$

• Linéarisation de ces lois en transformation infinitésimale

Modèle « Néo-Hookien » :  $\underline{\underline{\sigma}} = 2\mu \underline{\underline{\epsilon}} + \varpi \underline{\underline{1}}$ , avec  $\text{tr} \underline{\underline{\epsilon}} = 0$ ,  $\varpi$  scalaire arbitraire.

Modèle de Varga :  $\underline{\underline{\sigma}} = 2\mu \underline{\underline{\epsilon}} + \varpi \underline{\underline{1}}$ , avec  $\text{tr} \underline{\underline{\epsilon}} = 0$ ,  $\varpi$  scalaire arbitraire.

Modèle de Mooney-Rivlin :  $\underline{\underline{\sigma}} = 2(\pi^0 - \frac{\alpha}{2}) \underline{\underline{\epsilon}} + \varpi \underline{\underline{1}}$ , avec  $\text{tr} \underline{\underline{\epsilon}} = 0$ ,  $\varpi$  scalaire arbitraire.

Modèle d'Ogden :  $\underline{\underline{\sigma}} = (\alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2 + \alpha_3 \mu_3) \underline{\underline{\epsilon}} + \varpi \underline{\underline{1}}$ , avec  $\text{tr} \underline{\underline{\epsilon}} = 0$ ,  $\varpi$  scalaire arbitraire.

**Commentaire.**

La linéarisation conduit évidemment pour ces diverses lois à la seule forme établie dans Ex. VII.4 :  $\underline{\underline{\sigma}} = 2\mu \underline{\underline{\epsilon}} + \varpi \underline{\underline{1}}$ . (Pour le modèle de Mooney-Rivlin :  $\mu = \pi^0 - \alpha/2$ ; pour le modèle d'Ogden :  $2\mu = \alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2 + \alpha_3 \mu_3$ ). La documentation à l'origine de cet exercice est tirée de l'article *Sur les densités d'énergie en élasticité non linéaire* ... par J.L. Davet in Annales des Ponts et Chaussées, 35, 1985, pp. 2-33; on y trouvera notamment des considérations sur la validation expérimentale de ces divers modèles. (Cf. aussi Ex. IX.8).

**VII.12 - Formulation incrémentale de la loi de comportement.** Écrire la relation entre le taux de déformation (eulérien) et la dérivée intrinsèque de la contrainte  $\underline{\underline{\sigma}}$  (cf. chapitre VI, § 5.2) pour un matériau thermoélastique en évolution isotherme. Examiner le cas particulier de la transformation infinitésimale à partir de l'état initial naturel ou quasi-naturel.

*Éléments de réponse.*

• La dérivation particulière de la loi de comportement en évolution isotherme donne :

$$\underline{\underline{\dot{\pi}}} = \frac{\partial \underline{\underline{\pi}}(T, \underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}} : \underline{\underline{\dot{e}}}.$$

Avec les relations (4.47),  $\underline{\underline{\dot{e}}} = {}^t \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{d}} \cdot \underline{\underline{F}}$  et (5.6) du chapitre VI,  $\left( \frac{D \underline{\underline{\sigma}}}{Dt} \right)_T = J^{-1} \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{\dot{\pi}}} \cdot {}^t \underline{\underline{F}}$ ,

on obtient :  $\left( \frac{D \underline{\underline{\sigma}}}{Dt} \right)_T = J^{-1} \underline{\underline{F}} \cdot \left( \frac{\partial \underline{\underline{\pi}}(T, \underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}} : ({}^t \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{d}} \cdot \underline{\underline{F}}) \right) \cdot {}^t \underline{\underline{F}}$ .

On pose  $\underline{\underline{\underline{A}}}(T, \underline{\underline{e}}) = \frac{\partial \underline{\underline{\pi}}(T, \underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}} = \rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \underline{\underline{e}} \partial \underline{\underline{e}}}$  qui a les mêmes symétries (5.5) et (5.6) que  $\underline{\underline{\underline{A}}}$  dans le cas de l'élasticité linéaire, et on définit  $\underline{\underline{\underline{A}}}(T, \underline{\underline{F}}) = \underline{\underline{\underline{A}}}_{ijkl} \underline{\underline{e}}_i \otimes \underline{\underline{e}}_j \otimes \underline{\underline{e}}_k \otimes \underline{\underline{e}}_l$  dans une base orthonormée par :  $\underline{\underline{\underline{A}}}_{ijkl}(T, \underline{\underline{F}}) = J^{-1} F_{im} F_{jn} F_{up} F_{vq} A_{mnpq}(T, \underline{\underline{e}})$ .

$\underline{\underline{\underline{A}}}(T, \underline{\underline{F}})$  a les mêmes symétries (5.5) et (5.6) que  $\underline{\underline{\underline{A}}}$ . L'équation liant  $\left( \frac{D \underline{\underline{\sigma}}}{Dt} \right)_T$  à  $\underline{\underline{d}}$  s'écrit :

$$\left( \frac{D \underline{\underline{\sigma}}}{Dt} \right)_T = \underline{\underline{\underline{A}}}(T, \underline{\underline{F}}) : \underline{\underline{d}},$$

relation *linéaire* entre  $\left( \frac{D \underline{\underline{\sigma}}}{Dt} \right)_T$  et  $\underline{\underline{d}}$ . On remarque que  $\underline{\underline{d}} = 0$  implique  $\left( \frac{D \underline{\underline{\sigma}}}{Dt} \right)_T = 0$ , c'est-à-dire que  $\underline{\underline{\sigma}}$  subit alors le même mouvement rigidifiant que l'élément de matière.

• Dans le cas de la transformation infinitésimale à partir de l'état initial naturel ou quasi-naturel on a :

$$\left( \frac{D \underline{\underline{\sigma}}}{Dt} \right)_T = \underline{\underline{\dot{\sigma}}} - \underline{\underline{\text{grad}}} U \cdot \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\text{grad}}} U \simeq \underline{\underline{\dot{\sigma}}},$$

$$\underline{\underline{\underline{A}}}(T, \underline{\underline{F}}) \simeq \underline{\underline{\underline{A}}}(T, 0),$$

$$\underline{\underline{d}} \simeq \underline{\underline{\dot{e}}}.$$

$$\text{D'où : } \underline{\underline{\dot{\sigma}}} \simeq \underline{\underline{\underline{A}}}(T, 0) : \underline{\underline{\dot{e}}}.$$

*Commentaires.*

On met en évidence l'intervention naturelle des dérivées de Truesdell (ou de Jaumann par la relation linéaire (5.13) du chapitre VI) dans la formulation incrémentale de la loi de comportement.

