
Mémento de Mécanique des milieux continus et de Thermoélasticité

Géométrie

Description du mouvement
Transformation et déformation
Cinématique et dérivation particulière

Modélisation des efforts

Puissances virtuelles et théorèmes généraux
Champ de contrainte
Étude locale

Thermoélasticité

Comportement thermoélastique
Évolutions thermoélastiques quasi-statiques
Problèmes classiques
Méthodes variationnelles

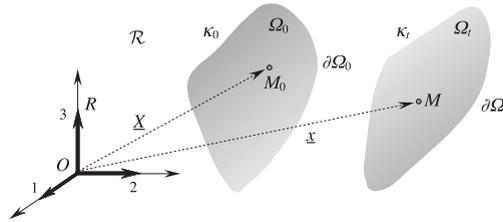
Géométrie

Notation	Signification
\underline{X}	vecteur-position dans κ_0
\underline{x}	vecteur-position dans κ_t
$\underline{\phi}(\underline{X}, t)$	bijection de Ω_0 sur Ω_t
$J(\underline{X}, t)$	Jacobien de la transformation
$d\Omega_0$	élément de volume dans κ_0
$d\Omega_t$	élément de volume dans κ_t
$\underline{U}(\underline{X}, t)$	vitesse en description lagrangienne
$\underline{U}(\underline{x}, t)$	vitesse en description eulérienne
$\underline{F}(\underline{X}, t)$	gradient de la transformation
\underline{dM}_0, ds_0	vecteur élémentaire dans κ_0 , $ds_0 = dM_0 $
\underline{dM}, ds	vecteur élémentaire dans κ_t , $ds = dM $
$\underline{dA} = \underline{N} dA$	vecteur-aire élémentaire dans κ_0
$\underline{da} = \underline{n} da$	vecteur-aire élémentaire dans κ_t
$\underline{\underline{C}}(\underline{X}, t)$	tenseur des dilatations
$\underline{\underline{e}}(\underline{X}, t)$	tenseur des déformations de Green-Lagrange
$\underline{\xi}(\underline{X}, t)$	déplacement
$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{X}, t)$	tenseur des déformations linéarisé
∇	gradient dans κ_0
grad	gradient dans κ_t
$\underline{\underline{\text{grad}}} U(\underline{x}, t)$	gradient eulérien du champ de vitesse
$\underline{\underline{d}}(\underline{x}, t)$	taux de déformation (eulérien)
$\dot{\theta}$	taux de glissement
$\underline{\underline{\Omega}}(\underline{x}, t)$	taux de rotation
$\underline{\underline{\Omega}}(\underline{x}, t)$	vecteur tourbillon
$\frac{d}{dt}$ ou \cdot	symbole de la dérivation particulaire
\underline{W}	vitesse de propagation
[[]]	symbole du « saut » ou discontinuité
$\rho(\underline{x}, t)$	masse volumique dans κ_t
$\rho_0(\underline{X})$	masse volumique dans κ_0

Description du mouvement

■ Le concept de milieu continu est une *modélisation physique macroscopique* issue de l'expérience courante, dont la pertinence est avérée selon les problèmes abordés et en fonction de l'échelle des phénomènes mis en jeu.

Dans la formulation mathématique de ce concept, un système mécanique est représenté par un volume constitué, au niveau différentiel, de *particules*. L'état géométrique de ces particules, est caractérisé par la connaissance de leur position dans un référentiel \mathcal{R} .



■ La *description lagrangienne* identifie les particules par leur position dans une *configuration* du système prise comme *référence*. Le mouvement est décrit en définissant la position de chaque particule, ainsi indexée, au cours de l'évolution, c'est-à-dire en se donnant *sa trajectoire* et son *horaire* de parcours :

$$\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t) .$$

■ La continuité du milieu s'exprime par la *continuité spatiale et temporelle* de la correspondance entre la position initiale de la particule et sa position actuelle. Des conditions de continue différentiabilité par rapport aux variables \underline{X} et t sont de plus imposées :

$$\underline{\phi} \text{ bijective, de classe } C^1 \text{ ou } C^2 \text{ de même que } \underline{\phi}^{-1} ,$$

d'où

$$0 < J(\underline{X}, t) = \frac{D(x^1, x^2, x^3)}{D(X^1, X^2, X^3)} < +\infty$$

$$d\Omega_t = J(\underline{X}, t) d\Omega_0$$

et la vitesse de la particule est

$$\underline{U}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \underline{\phi}(\underline{X}, t)}{\partial t} .$$

La *validation* expérimentale du modèle montre qu'il y a lieu d'affaiblir ces hypothèses de régularité en ne les imposant que « par morceaux ».

■ La *description eulérienne* adopte le point de vue incrémental et définit le mouvement du système par la donnée, à chaque instant, du champ des vitesses des particules : elle se place sur la *configuration actuelle* et les variables spatiales qui y apparaissent ont une signification purement géométrique

$$\underline{U} = \underline{U}(\underline{x}, t) .$$

La notion de continuité dans la description eulérienne correspond aux continuité et continue différentiabilité spatiales et temporelles, par morceaux, du champ des vitesses.

■ Le mouvement est *stationnaire* dans le référentiel \mathcal{R} si sa description eulérienne est indépendante de t :

$$\underline{U}(\underline{x}, t) \equiv \underline{U}(\underline{x}) .$$

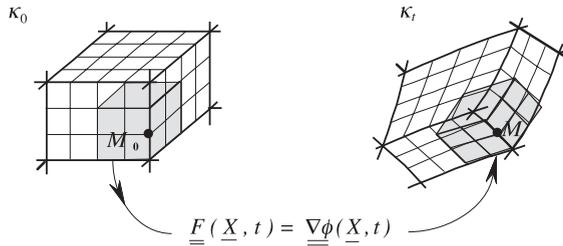
Transformation et déformation

■ Dans une représentation lagrangienne, la comparaison entre la configuration actuelle et la configuration initiale, sans aucune référence à l'histoire intermédiaire du système considéré, introduit au plan géométrique deux concepts essentiels : le transport et la déformation.

■ Le *transport convectif*, dont l'exemple le plus simple est relatif au point matériel, exprime la correspondance entre les positions actuelle et initiale des éléments matériels.

■ L'étude de la transformation du système fait appel à la notion de *transformation homogène tangente*. Celle-ci est définie par le tenseur gradient de la fonction vectorielle qui exprime le transport convectif du point matériel : c'est le *gradient de la transformation*

$$\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \underline{\underline{\nabla}}\phi(\underline{X}, t) .$$



Les formules de transport d'un vecteur, d'une surface ou d'un volume matériels, font intervenir le tenseur enclidien associé à cette application linéaire :

$$\begin{aligned} dM &= \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) \cdot dM_0 \\ d\Omega_t &= d\Omega_0 \det [\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t)] = J(\underline{X}, t) d\Omega_0 \\ da &= J(\underline{X}, t) {}^t \underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{X}, t) \cdot dA . \end{aligned}$$

■ La *déformation* dégage, localement, en quoi la transformation subie par le système d'une configuration à l'autre diffère d'une *isométrie directe* : elle mesure le changement de forme local. Elle introduit pour cela le tenseur des *dilatations*

$$\underline{\underline{C}}(\underline{X}, t) = {}^t \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) \cdot \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t)$$

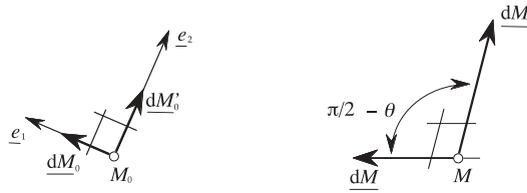
et le tenseur des *déformations* de Green-Lagrange

$$\underline{\underline{e}}(\underline{X}, t) = \frac{1}{2} [\underline{\underline{C}}(\underline{X}, t) - \underline{\underline{1}}]$$

qui permettent d'exprimer les variations de longueurs et les variations angulaires :



$$\begin{aligned} dM \cdot dM' &= dM_0 \cdot \underline{\underline{C}}(\underline{X}, t) \cdot dM'_0 , \\ ds^2 - ds_0^2 &= 2 dM_0 \cdot \underline{\underline{e}}(\underline{X}, t) \cdot dM_0 , \\ \sin \theta &= C_{12}(\underline{X}, t) / \sqrt{C_{11}(\underline{X}, t) C_{22}(\underline{X}, t)} . \end{aligned}$$



■ Dans la base orthonormée de leurs **directions principales** communes dans κ_0 , $\underline{C}(\underline{X}, t)$ et $\underline{e}(\underline{X}, t)$ prennent la forme diagonale. Ainsi :

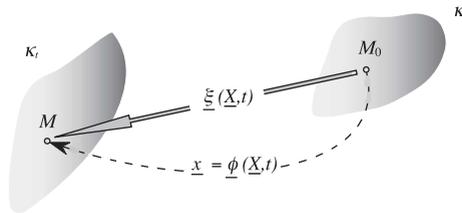
$$\underline{C}(\underline{X}, t) = \lambda_1^2(\underline{X}, t) \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \lambda_2^2(\underline{X}, t) \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \lambda_3^2(\underline{X}, t) \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$$

$$(\lambda_i(\underline{X}, t) > 0, i = 1, 2, 3 : \text{dilatations principales}).$$

Le **trièdre orthogonal** de ces directions principales dans κ_0 est transporté convectivement dans κ_t selon des directions orthogonales (propriété caractéristique).

■ On définit le déplacement :

$$\underline{\xi}(\underline{X}, t) = \underline{\phi}(\underline{X}, t) - \underline{X}.$$



■ Lorsque la transformation est **infinitésimale** les formules se simplifient par **linéarisation** :

$$\|\underline{\nabla}\underline{\xi}(\underline{X}, t)\| \ll 1$$

$$\underline{e}(\underline{X}, t) \simeq \underline{\varepsilon}(\underline{X}, t) = \frac{1}{2} [\underline{\nabla}\underline{\xi}(\underline{X}, t) + {}^t\underline{\nabla}\underline{\xi}(\underline{X}, t)]$$

$$\underline{\varepsilon}(\underline{X}, t) \simeq \frac{1}{2} [\underline{\text{grad}} \underline{\xi}(\underline{x}, t) + {}^t\underline{\text{grad}} \underline{\xi}(\underline{x}, t)], \quad \underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t)$$

$$d\Omega_t \simeq d\Omega_0 [1 + \text{div} \underline{\xi}(\underline{X}, t)]$$

$$(ds - ds_0)/ds_0 = \varepsilon_{11}(\underline{X}, t)$$

$$\theta = 2 \varepsilon_{12}(\underline{X}, t).$$

■ Les déformations sont engendrées par des sollicitations extérieures mécaniques, thermiques, hygrométriques, par des évolutions chimiques et des réorganisations structurelles, etc. Le problème de leur **compatibilité géométrique** se pose alors : savoir si ces déformations sont compatibles avec la continuité du milieu.

Les conditions nécessaires de compatibilité géométrique s'écrivent, si $\|\underline{\nabla}\underline{\xi}\| \ll 1$,

$$\varepsilon_{ij,k\ell} + \varepsilon_{k\ell,ij} - \varepsilon_{ik,j\ell} - \varepsilon_{j\ell,ik} = 0, \quad i, j, k, \ell = 1, 2, 3,$$

en coordonnées cartésiennes orthonormées. Ces six conditions sont également suffisantes si le domaine de définition du champ $\underline{\varepsilon}$ est simplement connexe. Dans le cas contraire on doit satisfaire des conditions de fermeture. On doit dans tous les cas contrôler la compatibilité du champ de déplacement solution avec les conditions au contour qui le concernent.

Cinématique et dérivation particulaire

Le point de vue incrémental pour la description de l'évolution d'un système peut être abordé en description lagrangienne ou en description eulérienne.

■ En description lagrangienne, la dérivation par rapport au temps s'identifie à la *dérivée particulaire* qui suit l'évolution d'une grandeur attachée à une particule, à un ensemble discret de particules, ou à un domaine matériel. Au plan géométrique, la cinématique du milieu continu se déduit directement de l'étude du transport convectif, de la transformation et de la déformation entre une configuration initiale de référence et la configuration actuelle.

Le taux de déformation lagrangien est naturellement $\underline{\dot{e}}(\underline{X}, t)$ qui fournit :

$$\frac{d}{dt}(\underline{dM} \cdot \underline{dM}') = 2 \underline{dM}_0 \cdot \underline{\dot{e}}(\underline{X}, t) \cdot \underline{dM}'_0 .$$

■ En description eulérienne, à chaque instant, l'évolution infinitésimale à venir est définie sur la configuration actuelle. Le mouvement étant donné par le champ des vitesses,

$$\underline{U} = \underline{U}(\underline{x}, t) ,$$

le gradient de ce champ sur la configuration actuelle définit localement la transformation infinitésimale :

$$\underline{\dot{dM}} = \underline{\text{grad}} \underline{U}(\underline{x}, t) \cdot \underline{dM}$$

$$\underline{\dot{d}\Omega_t} = \text{div} \underline{U}(\underline{x}, t) \, d\Omega_t .$$

■ Le tenseur *taux de déformation* (eulérien), partie symétrique de ce gradient,

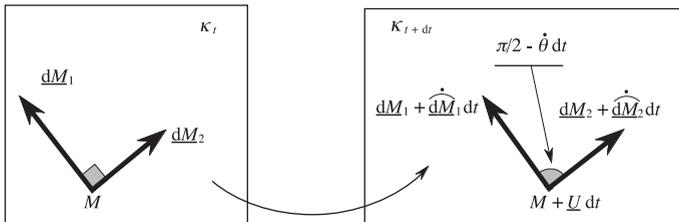
$$\underline{d}(\underline{x}, t) = \frac{1}{2} \left(\underline{\text{grad}} \underline{U}(\underline{x}, t) + {}^t \underline{\text{grad}} \underline{U}(\underline{x}, t) \right)$$

caractérise l'évolution de la métrique,

$$\frac{d}{dt}(\underline{dM} \cdot \underline{dM}') = 2 \underline{dM} \cdot \underline{d}(\underline{x}, t) \cdot \underline{dM}'$$

$$\frac{\hat{d}s}{ds} = d_{11}(\underline{x}, t)$$

$$\hat{\theta} = 2 \, d_{12}(\underline{x}, t) .$$



Le taux de déformation (eulérien) et le taux de déformation Lagrangien sont liés par la relation de transport :

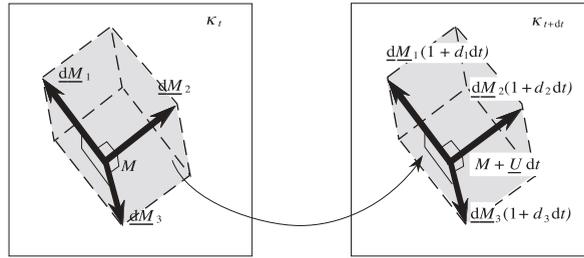
$$\underline{d}(\underline{x}, t) = {}^t \underline{F}^{-1}(\underline{X}, t) \cdot \underline{\dot{e}}(\underline{X}, t) \cdot \underline{F}^{-1}(\underline{X}, t) , \quad \underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t) .$$

■ Dans la base orthonormée de ses directions principales dans κ_t , $\underline{d}(\underline{x}, t)$ prend la forme diagonale :

$$\underline{d}(\underline{x}, t) = d_1(\underline{x}, t) \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + d_2(\underline{x}, t) \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + d_3(\underline{x}, t) \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$$

[$d_i(\underline{x}, t)$, $i = 1, 2, 3$: vitesses de déformations principales].

Un trièdre de vecteurs matériels colinéaires à ces directions principales dans κ_t demeure orthogonal dans la transformation infinitésimale entre t et $t + dt$ (propriété caractéristique).



■ La partie antisymétrique du gradient du champ de vitesse est le **taux de rotation** :

$$\underline{\underline{\Omega}}(\underline{x}, t) = \frac{1}{2} [\underline{\underline{\text{grad}}} U(\underline{x}, t) - {}^t \underline{\underline{\text{grad}}} U(\underline{x}, t)] .$$

Il définit localement la vitesse de rotation du trièdre matériel des directions principales de $\underline{\underline{d}}(\underline{x}, t)$, qui est aussi la vitesse moyenne de rotation de la matière. $\underline{\underline{\Omega}}(\underline{x}, t)$ est le vecteur **tourbillon** :

$$\forall \underline{dM} \in \kappa_t, \quad \underline{\underline{\Omega}}(\underline{x}, t) \cdot \underline{dM} = \underline{\underline{\Omega}}(\underline{x}, t) \wedge \underline{dM}$$

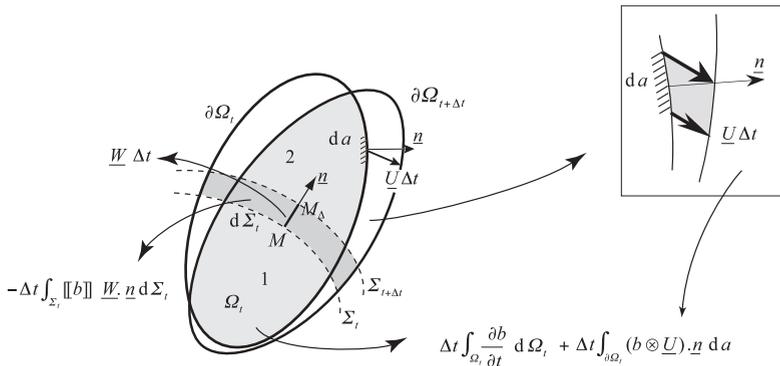
■ La description eulérienne, définissant les grandeurs sur la configuration actuelle en fonction des variables géométriques et du temps, n'identifie pas les éléments matériels. La **dérivation particulière** doit alors y être effectuée comme la **dérivation par rapport au temps en suivant la particule ou l'élément matériel concerné**. Ceci apparaît dans la structure des formules correspondantes où l'on trouve de façon systématique un terme qui correspond à la dérivation partielle par rapport au temps les variables géométriques étant maintenues constantes (point ou élément géométrique « figé »), auquel s'ajoute un **terme de convection**. Celui-ci est la contribution due au transport convectif de la particule ou de l'élément matériel auquel est attachée la grandeur considérée :

$$\mathcal{B} = b(\underline{x}, t) \quad \dot{\mathcal{B}} = \frac{db}{dt} = \frac{\partial b}{\partial t} + \text{grad } b \cdot \underline{U} .$$

■ Une attention particulière est portée à la dérivation particulière des intégrales de volume en raison du rôle privilégié qui leur revient pour définir les grandeurs physiques relatives à un système dans la modélisation du milieu continu :

$$\mathcal{I} = \int_{\Omega_t} b(\underline{x}, t) d\Omega_t \quad , \quad b \text{ et/ou } \underline{U} \text{ discontinues sur } \Sigma_t ,$$

$$\dot{\mathcal{I}} = \int_{\Omega_t} \frac{\partial b}{\partial t} d\Omega_t - \int_{\Sigma_t} \llbracket b \rrbracket W d\Sigma_t + \int_{\partial\Omega_t} (b \otimes \underline{U}) \cdot \underline{da} .$$



■ La masse d'un système s'exprime comme l'intégrale de sa masse volumique. La **conservation de la masse** s'exprime au plan local par l'**équation de continuité**

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div } \underline{U} = 0$$

et l'équation de saut associée

$$\llbracket \rho(\underline{U} - \underline{W}) \rrbracket \cdot \underline{n} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_t$$

en description eulérienne.

La masse de l'élément matériel défini par $d\Omega_0$ en M_0 dans la configuration de référence κ_0 est constante dans le temps :

$$dm = \rho_0(\underline{X}) d\Omega_0 = \rho(\underline{x}, t) d\Omega_t .$$

Modélisation des efforts

Notation	Signification
\mathcal{R}	référentiel galiléen
\mathcal{S}	système
\mathcal{S}'	sous-système de \mathcal{S}
$\hat{\mathbf{U}}$	mouvement virtuel
$\hat{\mathbf{U}}$	vitesse virtuelle, champ de vitesse virtuel
$\mathcal{P}_{(e)}, \mathcal{P}'_{(e)}$	puissance virtuelle des efforts extérieurs pour \mathcal{S} et \mathcal{S}'
$\mathcal{P}_{(i)}, \mathcal{P}'_{(i)}$	puissance virtuelle des efforts intérieurs pour \mathcal{S} et \mathcal{S}'
$\mathcal{A}, \mathcal{A}'$	puissance virtuelle des quantités d'accélération pour \mathcal{S} et \mathcal{S}'
$\{\hat{\mathcal{D}}\}$	distributeur
$[\mathcal{F}]$	torseur
$[\mathcal{F}] \cdot \{\hat{\mathcal{D}}\}$	produit de dualité « torseur-distributeur »
$[\mathcal{F}_e], [\mathcal{F}'_e]$	torseur des efforts extérieurs à \mathcal{S} et \mathcal{S}'
$[\mathcal{F}_i], [\mathcal{F}'_i]$	torseur des efforts intérieurs à \mathcal{S} et \mathcal{S}'
$[\mathcal{M}\hat{\mathcal{Q}}], [\mathcal{M}\hat{\mathcal{Q}}']$	torseur des quantités d'accélération de \mathcal{S} et \mathcal{S}'
$[\mathcal{M}\hat{\mathcal{U}}], [\mathcal{M}\hat{\mathcal{U}}']$	torseur des quantités de mouvement de \mathcal{S} et \mathcal{S}'
$K(\underline{\mathcal{U}}), K'(\underline{\mathcal{U}})$	énergie cinétique de \mathcal{S} et \mathcal{S}'
$\underline{F}(\underline{x}, t)$	force massique
$\underline{T}_\Omega(\underline{x}, t)$	force surfacique au contour de \mathcal{S}
$\underline{T}_{\Omega'}(\underline{x}, t)$	force surfacique au contour de \mathcal{S}'
\underline{df}	force de surface élémentaire
$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)$	tenseur des contraintes de Cauchy
$\underline{T}[\underline{x}, t, \underline{n}(\underline{x})]$	vecteur-contrainte
$\underline{\underline{\pi}}(\underline{X}, t)$	tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff
σ	contrainte normale
τ	contrainte tangentielle
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	contraintes[-.2cm] principales
I_1, I_2, I_3	invariants de $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)$
σ_m	contrainte moyenne
$\underline{\underline{s}}(\underline{x}, t)$	déviateur de $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)$
J_2, J_3	invariants de $\underline{\underline{s}}(\underline{x}, t)$
σ_{oct}	contrainte octaédrale
$ \mathcal{I}_{\text{oct}} $	cission octaédrale

Puissances virtuelles et théorèmes généraux

La modélisation des efforts suppose en préalable la modélisation géométrique du système étudié et doit être cohérente avec elle.

■ *La formulation dualisée de la loi fondamentale de la dynamique* sur l'espace vectoriel des mouvements virtuels exprime que la somme des puissances virtuelles des efforts extérieurs et des efforts intérieurs est égale à la puissance virtuelle des quantités d'accélération en repère galiléen, dans tout mouvement virtuel du système (ou du sous-système) :

$$\begin{aligned} & \text{en référentiel galiléen } \mathcal{R} , \\ & \forall S' \subset \mathcal{S} , \\ & \forall \hat{\mathbf{U}} \text{ m.v.} , \mathcal{P}'_{(e)}(\hat{\mathbf{U}}) + \mathcal{P}'_{(i)}(\hat{\mathbf{U}}) = \mathcal{A}'(\hat{\mathbf{U}}) . \end{aligned}$$

La dualisation de la loi des actions mutuelles se réfère aux mouvements virtuels *rigidifiants*. La puissance virtuelle des efforts intérieurs au système (ou au sous-système) est nulle dans tout mouvement rigidifiant le système (ou le sous-système) :

$$\begin{aligned} & \forall S' \subset \mathcal{S} , \\ & \forall \hat{\mathbf{U}} \text{ m.v.r pour } S' , \mathcal{P}'_{(i)}(\hat{\mathbf{U}}) = 0 . \end{aligned}$$

Ces deux énoncés « des puissances virtuelles », posés en *principe*, constituent le fondement de la *méthode des puissances virtuelles* pour la modélisation des efforts.

■ Le rôle essentiel joué par les mouvements virtuels rigidifiants conduit à leur étude particulière. On introduit la notion de *distributeur* :

$$\{\hat{\mathcal{D}}\} = \{O, \hat{\underline{U}}_0, \hat{\underline{\omega}}_0\} = \{O', \hat{\underline{U}}_0 + \hat{\underline{\omega}}_0 \wedge \underline{OO}', \hat{\underline{\omega}}_0\}$$

qui définit le champ de vitesse virtuel rigidifiant $\hat{\underline{U}}$:

$$\hat{\underline{U}}(\underline{x}) = \hat{\underline{U}}_0 + \hat{\underline{\omega}}_0 \wedge \underline{OM}$$

Par dualité apparaît la notion de *torseur* :

$$\begin{aligned} [\mathcal{F}] &= [O, \underline{E}_0, \underline{C}_0] = [O', \underline{E}_0, \underline{C}_0 + \underline{O'Q} \wedge \underline{E}_0] \\ [\mathcal{F}] \cdot \{\hat{\mathcal{D}}\} &= \underline{E}_0 \cdot \hat{\underline{U}}_0 + \underline{C}_0 \cdot \hat{\underline{\omega}}_0 \end{aligned}$$

■ On établit les théorèmes généraux, valables pour toute modélisation mécaniquement cohérente, qui expriment la *loi fondamentale de la dynamique*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{en référentiel galiléen } \mathcal{R} , \\ \forall S' \subset \mathcal{S} , \\ [\mathcal{F}'_e] = [\mathcal{M}\mathcal{Q}'] \end{array} \right.$$

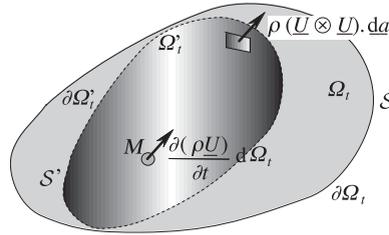
et la *loi des actions mutuelles* en termes de torseurs

$$\forall S' \subset \mathcal{S} , \quad [\mathcal{F}'_i] = 0 .$$

■ Pour les milieux continus classiques la loi fondamentale de la dynamique s'exprime aussi par le théorème de *conservation de la quantité de mouvement* en termes de torseurs

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{en référentiel galiléen } \mathcal{R} , \\ \forall S' \subset \mathcal{S} , \\ [\mathcal{F}'_e] = \frac{d}{dt}[\mathcal{M}\mathcal{U}'] \end{array} \right.$$

ou encore par le *théorème d'Euler* :



en référentiel galiléen \mathcal{R} ,

$$\forall S' \subset S, \quad [\mathcal{F}'_e] = \left[\begin{array}{ll} \frac{\partial(\rho \underline{U})}{\partial t} d\Omega_t & \text{sur } \Omega'_t, \\ \rho(\underline{U} \otimes \underline{U}) \cdot \underline{da} & \text{sur } \partial\Omega'_t, \\ (-\llbracket \rho \underline{U} \rrbracket) W d\Sigma_t & \text{sur } \Sigma_t \cap S' \text{ si onde de choc} \end{array} \right].$$

On en déduit le *théorème de l'énergie cinétique*

$$K'(\underline{U}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega'_t} \rho(\underline{x}, t) \underline{U}^2(\underline{x}, t) d\Omega_t$$

en référentiel galiléen \mathcal{R} ,

$$\forall S' \subset S, \quad \mathcal{P}'_{(e)}(\underline{U}) + \mathcal{P}'_{(i)}(\underline{U}) = \frac{d}{dt} K'(\underline{U}).$$

Champ de contrainte

■ La construction de la modélisation des efforts en mécanique des milieux continus classique par la méthode des puissances virtuelles choisit, comme espace vectoriel des mouvements virtuels, l'ensemble des champs de vecteurs *continus et continûment différentiables par morceaux*.

Les efforts extérieurs au système étudié sont modélisés par des *densités volumiques de forces*, à l'intérieur du système, et des *densités surfaciques de forces* à son contour.

La même forme est adoptée relativement à un sous-système quelconque avec, en outre, l'hypothèse qu'il n'y a *pas d'efforts intérieurs à distance* entre les particules constitutives du système elles-mêmes :

$$\mathcal{P}'_{(e)}(\hat{\underline{U}}) = \int_{\Omega'_t} \rho(\underline{x}, t) \underline{F}(\underline{x}, t) \cdot \hat{\underline{U}}(\underline{x}) d\Omega_t + \int_{\partial\Omega'_t} \underline{T}_{\Omega'}(\underline{x}, t) \cdot \hat{\underline{U}}(\underline{x}) da.$$

■ On postule que la puissance virtuelle des efforts intérieurs se met sous la forme de l'intégrale d'une *densité volumique*, forme linéaire des valeurs locales du champ de vitesse virtuel et de son gradient, indépendante du sous-système considéré. L'approche la plus générale dans le cadre fixé modélise les efforts intérieurs par le champ d'un *tenseur du deuxième ordre*, qui doit être *symétrique* pour respecter la loi des actions mutuelles. Ce tenseur est, dans la densité de puissance virtuelle des efforts intérieurs, la variable duale du taux de déformation virtuel (au signe près) :

$$\mathcal{P}'_{(i)}(\hat{\underline{U}}) = \int_{\Omega'_t} -\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) : \hat{\underline{\underline{d}}}(\underline{x}) d\Omega_t + \int_{\Sigma_{\hat{\underline{U}}}' \cap \Omega'_t} -\llbracket \hat{\underline{U}}(\underline{x}) \rrbracket \cdot \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x}) da.$$

■ Les équations de la dynamique fournissent, pour ce champ tensoriel symétrique, trois équations aux dérivées partielles du premier ordre

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) + \rho(\underline{x}, t)[\underline{F}(\underline{x}, t) - \underline{a}(\underline{x}, t)] = 0 \quad \text{sur } \Omega_t$$

et trois conditions aux limites au contour du système

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x}) = \underline{T}_{\Omega'}(\underline{x}, t) \quad \text{sur } \partial\Omega_t .$$

Les efforts extérieurs au contour d'un sous-système quelconque sont alors déterminés par :

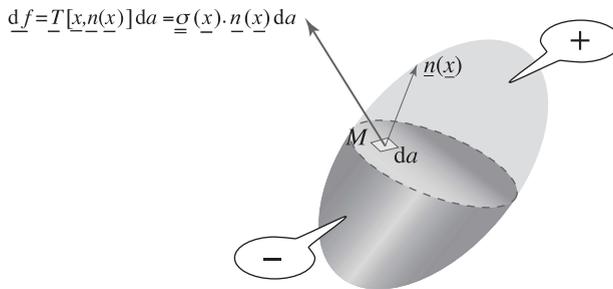
$$\underline{T}_{\Omega'}(\underline{x}, t) = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x}) \quad \text{sur } \partial\Omega'_t .$$

■ L'interprétation mécanique de la modélisation montre que les efforts intérieurs, réduits à des actions **de contact** entre les particules du système, sont schématisés de la façon suivante : les particules situées de part et d'autre d'un plan géométrique à l'intérieur du système, infiniment près de celui-ci, exercent les unes sur les autres des efforts représentés par des forces surfaciques distribuées sur ce plan géométrique, appelé aussi « **facette** » :

$$df = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x}) da .$$

La densité surfacique correspondante est le **vecteur-contrainte** sur la facette :

$$\underline{T}[\underline{x}, t, \underline{n}(\underline{x})] = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x}) .$$

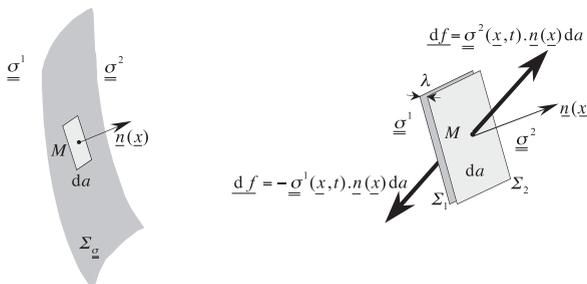


Le champ tensoriel symétrique de la modélisation est le **champ des tenseurs des contraintes de Cauchy**, ou champ de contrainte (de Cauchy).

■ Lorsque le champ de contrainte est continu et continûment différentiable, **par morceaux**, les équations de la dynamique comportent en outre l'équation de saut :

$$\llbracket \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) \rrbracket \cdot \underline{n}(\underline{x}) + \underline{F}_{\Sigma}(\underline{x}, t) = \rho(\underline{x}, t) \llbracket \underline{U}(\underline{x}, t) \rrbracket \llbracket \underline{U}(\underline{x}, t) - \underline{W}(\underline{x}, t) \rrbracket \cdot \underline{n}(\underline{x}) \quad \text{sur } \Sigma_{\underline{\underline{\sigma}}} .$$

En l'absence d'onde de choc ($\llbracket \underline{U}(\underline{x}, t) \rrbracket = 0$) et de densité surfacique de forces extérieures à l'intérieur du système ($\underline{F}_{\Sigma}(\underline{x}, t) = 0$), cette équation exprime la **continuité du vecteur-contrainte** sur la surface de discontinuité du champ $\underline{\underline{\sigma}}$:



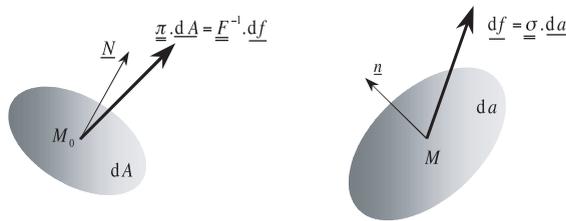
■ Le transport, sur la configuration de référence, de la puissance virtuelle des efforts intérieurs fait apparaître que le taux de déformation lagrangien est associé par dualité à un tenseur symétrique qui est, de ce point de vue, l'homologue du tenseur des contraintes de Cauchy :

$$\mathcal{P}'_{(i)}(\hat{U}) = \int_{\Omega'_0} -\underline{\pi}(\underline{X}, t) : \hat{\underline{\epsilon}}(\underline{X}, t) \, d\Omega_0 .$$

C'est le *tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff*

$$\frac{\underline{\pi}}{\rho_0} = \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \frac{\underline{\sigma}}{\rho} \cdot {}^t \underline{\underline{F}}^{-1}$$

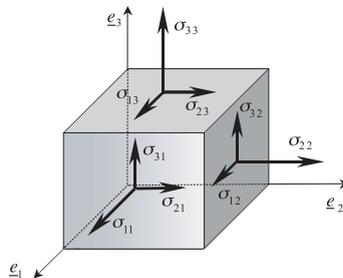
qui correspond au transport convectif de la force sur un élément de surface orienté, comme si cette force était un vecteur matériel. $\underline{\pi}(\underline{X}, t)$ est symétrique.



Étude locale

■ Le tenseur des contraintes de Cauchy en un point définit l'application linéaire qui détermine le vecteur-contrainte pour toute facette passant par ce point :

$$\underline{T}(\underline{n}) = \underline{\sigma} \cdot \underline{n} .$$



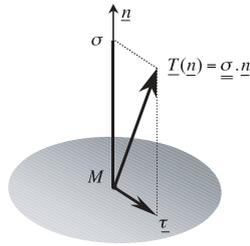
En base orthonormée

$$T_i = \sigma_{ij} n_j$$

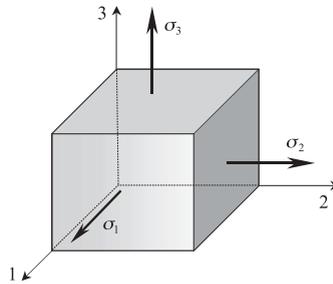
la composante σ_{ij} du tenseur des contraintes de Cauchy représente la composante selon la direction \underline{e}_i du vecteur-contrainte sur la facette de normale \underline{e}_j .

■ Sur une facette quelconque, on calcule la contrainte normale σ (positive en traction) et la contrainte tangentielle $\underline{\tau}$:

$$\begin{aligned} \sigma &= \underline{T}(\underline{n}) \cdot \underline{n} = \underline{n} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{n} \\ \underline{T}(\underline{n}) &= \sigma \underline{n} + \underline{\tau} \\ |\underline{\tau}| &= [(\underline{\sigma} \cdot \underline{n})^2 - (\underline{n} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{n})^2]^{\frac{1}{2}} . \end{aligned}$$



■ Dans le cas général, pour un état de contrainte donné, il existe trois facettes sur lesquelles le vecteur-contrainte est normal. Ces facettes sont orthogonales aux *directions principales* des contraintes et les contraintes correspondantes sont les *contraintes principales*.



Dans la base orthonormée des directions principales :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_1 \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \sigma_2 \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \sigma_3 \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 .$$

Invariants (dans tout changement de base) :

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{tr } \underline{\underline{\sigma}} &= \sigma^i_i &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 &= \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}^2)/2 = (\sigma^i_j \sigma^j_i)/2 &= [(\sigma_1)^2 + (\sigma_2)^2 + (\sigma_3)^2]/2 \\ I_3 &= \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}^3)/3 = (\sigma^i_j \sigma^j_k \sigma^k_i)/3 &= [(\sigma_1)^3 + (\sigma_2)^3 + (\sigma_3)^3]/3 . \end{aligned}$$

■ On décompose $\underline{\underline{\sigma}}$ en sa partie sphérique $\sigma_m \underline{\underline{1}}$, et sa partie déviatorique $\underline{\underline{s}}$ ou *déviateur* des contraintes :

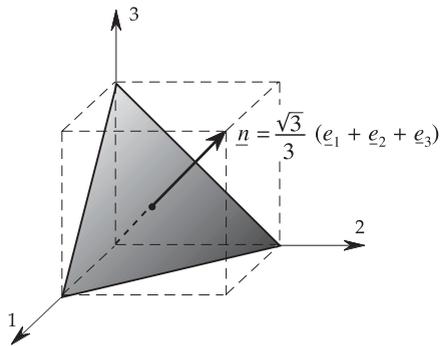
$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} &= \sigma_m \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{s}} \\ \sigma_m &= I_1/3 , \quad \underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}} - \sigma_m \underline{\underline{1}} , \end{aligned}$$

dont les invariants sont

$$J_1 = \text{tr } \underline{\underline{s}} = 0 , \quad J_2 = (\text{tr } \underline{\underline{s}}^2)/2 , \quad J_3 = (\text{tr } \underline{\underline{s}}^3)/3 ,$$

avec les relations

$$\begin{aligned} I_2 &= J_2 + (I_1)^2/6 \\ I_3 &= J_3 + 2 I_1 J_2/3 + (I_1)^3/27 . \end{aligned}$$



La facette également inclinée sur les trois directions principales est dite « octaédrale ». La contrainte normale σ_{oct} et la contrainte tangentielle $|\tau_{\text{oct}}|$ sur cette facette sont appelées « contrainte octaédrale » et « cission octaédrale » :

$$\sigma_{\text{oct}} = I_1/3 = \sigma_m, \quad |\tau_{\text{oct}}| = \sqrt{2J_2/3}.$$

Thermoélasticité

Notation	Signification
$r(\underline{x}, t)$	densité volumique de chaleur reçue
$e(\underline{x}, t)$	énergie interne massique
$\underline{q}(\underline{x}, t)$	courant de chaleur sortant
$s(\underline{x}, t)$	entropie massique
$T(\underline{x}, t)$	température absolue
ψ	énergie libre massique
$\varphi_p(\underline{\underline{e}})$	liaison interne
η_p	multiplicateur de Lagrange
	associé à une liaison interne
I'_1, I'_2, I'_3	invariants de $\underline{\underline{e}}$
$\underline{\underline{A}}$	tenseur d'élasticité
$\underline{\underline{k}}$	tenseur des coefficients thermiques
τ	variation de température
$\underline{\underline{\sigma}}^P$	tenseur de précontrainte
λ	constante de Lamé
μ, G	module de cisaillement
E	module de Young
ν	coefficient de Poisson
α	coefficient de dilatation thermique linéique
K	module élastique de compression
T^d	valeur donnée d'une composante de \underline{T}
ξ_i^d	valeur donnée d'une composante de $\underline{\xi}$
S_{T_i}	portion du contour où T_i est donnée
S_{ξ_i}	portion du contour où ξ_i est donnée
$\mathbb{S}(\underline{F}, S_{T_i}, T_i^d)$	ensemble des champs de contrainte
	S.A. avec \underline{F}, T_i^d sur S_{T_i} .
$\mathbb{C}(S_{\xi_i}, \xi_i^d)$	ensemble des champs de déplacement
	C.A. avec ξ_i^d sur S_{ξ_i} .

Notation	Signification
\mathcal{C}	couple de torsion
$\varphi(x, y)$	fonction de gauchissement
α	rotation différentielle (angle de torsion)
J	inertie de torsion
$\underline{\mathcal{X}}$	résultante sur la section droite
$\underline{\mathcal{M}}$	moment de flexion
\mathcal{M}_z	composante de $\underline{\mathcal{M}}$ suivant \underline{e}_z
\mathcal{M}_y	composante de $\underline{\mathcal{M}}$ suivant \underline{e}_y
I_y, I_z	moments principaux d'inertie géométrique de la section droite
$\underline{\omega}(x)$	rotation de la section droite
χ	courbure des fibres
$\hat{\underline{\xi}}$	champ de déplacement virtuel
$\hat{\underline{\underline{\xi}}}$	déformation linéarisée associée à $\hat{\underline{\xi}}$
$W(\tau, \underline{\xi}')$	énergie élastique de déformation de $\underline{\xi}'$
$W(\tau, \underline{\xi}') - \Phi(\underline{\xi}')$	énergie potentielle de $\underline{\xi}'$
$W^*(\tau, \underline{\underline{\sigma}}')$	énergie élastique de contrainte de $\underline{\underline{\sigma}}'$
$W^*(\tau, \underline{\underline{\sigma}}') - \Phi^*(\underline{\underline{\sigma}}')$	énergie complémentaire de $\underline{\underline{\sigma}}'$
$\mathbb{A}(S_{T_i})$	espace vectoriel des champs d'autocontrainte pour le problème
$\underline{Q} = (Q_1, \dots, Q_n)$	paramètres de chargement
$\underline{q} = (q_1, \dots, q_n)$	paramètres cinématiques
$W^*(\tau, \underline{Q})$	énergie élastique de contrainte, fonction de \underline{Q}
$\underline{X} = (X_1, \dots, X_k)$	inconnues hyperstatiques
$W^*(\tau, \underline{Q}', \underline{X}')$	énergie élastique de contrainte, fonction de \underline{Q}' et de \underline{X}'

Comportement thermoélastique

■ Les principes de la thermodynamique des milieux continus s'expriment localement en description eulérienne par :

l'équation de l'énergie pour le premier principe,

$$\rho \dot{\underline{\underline{e}}} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} + r - \text{div } \underline{\underline{q}} ,$$

l'inégalité fondamentale pour le deuxième principe

$$\rho \dot{\underline{\underline{s}}} + \text{div} \left(\frac{\underline{\underline{q}}}{T} \right) - \frac{r}{T} \geq 0$$

ou *l'inégalité de Clausius-Duhem* obtenue par combinaison avec la précédente

$$\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} - \rho(\dot{\underline{\underline{\psi}}} + \underline{\underline{s}} \dot{T}) - \frac{\underline{\underline{q}}}{T} \cdot \underline{\underline{\text{grad}}} T \geq 0 .$$

■ L'expérience met en évidence le comportement thermoélastique des matériaux, caractérisé par sa *réversibilité*. Le modèle correspondant est établi en description lagrangienne : l'énergie libre, fonction des valeurs actuelles de la température et du tenseur des déformations, est le potentiel thermodynamique dont on dérive les expressions de l'entropie massique et du tenseur des contraintes :

$$\underline{\underline{s}} = - \frac{\partial \psi(T, \underline{\underline{e}})}{\partial T} , \quad \underline{\underline{\pi}} = \rho_0 \frac{\partial \psi(T, \underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}} \quad \text{pour le matériau sans liaisons internes .}$$

Dans le cas de liaisons internes, $\varphi_p(\underline{\underline{e}}) = 0$, la loi de comportement introduit un scalaire arbitraire η_p pour chaque liaison interne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\pi}} = \rho_0 \frac{\partial \psi(T, \underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}} + \eta_p \frac{\partial \varphi_p(\underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}} \\ \varphi_p(\underline{\underline{e}}) = 0 , \quad p = 1, \dots, n , \quad 1 \leq n \leq 6 . \end{array} \right.$$

■ Le principe du respect des symétries matérielles restreint la forme de la loi de comportement. Ainsi, pour le matériau *isotrope* dans la configuration de référence :

$$\begin{aligned} \psi(T, \underline{\underline{e}}) &= \psi(T, I'_1, I'_2, I'_3) \\ I'_1 &= \text{tr } \underline{\underline{e}} , \quad I'_2 = \frac{1}{2} \text{tr}(\underline{\underline{e}})^2 , \quad I'_3 = \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{e}})^3 . \end{aligned}$$

Il en va de même pour les liaisons internes si celles-ci sont isotropes.

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\pi}} = \rho_0 \left[\frac{\partial \psi}{\partial I'_1} \underline{\underline{1}} + \frac{\partial \psi}{\partial I'_2} \underline{\underline{e}} + \frac{\partial \psi}{\partial I'_3} \underline{\underline{e}}^2 \right] + \eta_p \left[\frac{\partial \varphi_p}{\partial I'_1} \underline{\underline{1}} + \frac{\partial \varphi_p}{\partial I'_2} \underline{\underline{e}} + \frac{\partial \varphi_p}{\partial I'_3} \underline{\underline{e}}^2 \right] , \\ \varphi_p(I'_1, I'_2, I'_3) = 0 , \quad p = 1, \dots, n , \quad 1 \leq n \leq 3 . \end{array} \right.$$

Les tenseurs $\underline{\underline{\pi}}$ et $\underline{\underline{e}}$ ont alors mêmes directions principales.

■ Lorsque la *déformation* est *infinitésimale* et la variation de température « *petite* », cette loi de comportement peut être linéarisée : linéarisation « physique » de la relation entre contraintes, déformations et variation de température

$$\underline{\underline{\pi}} = \underline{\underline{\pi}}^0 + \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{e}} - \underline{\underline{k}} \tau$$

où le tenseur d'élasticité $\underline{\underline{A}}$ possède les symétries suivantes (base orthonormée) :

$$A_{ijkl} = A_{jikl} = A_{ijlk} = A_{klij}.$$

Si de plus, la **transformation est infinitésimale**, la linéarisation peut être poursuivie : linéarisation « géométrique ». On aboutit à une relation linéaire (affine) entre le tenseur des contraintes de Cauchy, le tenseur des déformations linéarisé et la variation de température à partir d'une configuration de référence précontrainte :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^P + \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{\varepsilon}}' - \underline{k} \tau'.$$

La loi de comportement linéarisée fait intervenir des **modules élastiques** et des **coefficients de dilatation thermique**, caractéristiques physiques intrinsèques du matériau, dont le nombre est réduit par les **symétries matérielles** et qui vérifient la condition de **stabilité** du matériau.

■ Pour le **matériau isotrope**, la thermoélasticité linéaire est caractérisée par **deux** modules élastiques λ (constante de Lamé) et μ (module de cisaillement), ou par le module de Young E et le coefficient de Poisson ν , et par **le** coefficient de dilatation thermique α ou par le coefficient thermique k :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^P + \lambda (\text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}}') \underline{\underline{1}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}' - k \tau' \underline{\underline{1}}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}' = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}}' - \frac{\nu}{E} (\text{tr } \underline{\underline{\sigma}}') \underline{\underline{1}} + \alpha \tau' \underline{\underline{1}}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^P$$

$$E = \mu \frac{(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)} > 0$$

$$-1 < \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} < \frac{1}{2}$$

$$\lambda = E \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} > 0$$

$$k = \frac{E\alpha}{1-2\nu}$$

$$\alpha = \frac{k}{3\lambda + 2\mu}$$

$$3K = 3\lambda + 2\mu = \frac{E}{(1-2\nu)} > 0$$

Évolutions thermoélastiques quasi-statiques

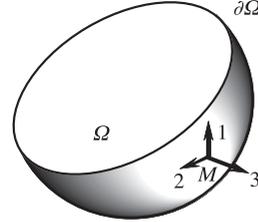
■ Les sollicitations mécaniques et thermiques habituellement imposées à un système en fonction du temps sont volumiques (forces de masse données) et surfaciques qui incluent la température donnée au contour du système et les **conditions aux limites** sur le vecteur-contrainte et le déplacement. L'**évolution** du système constitué d'un matériau thermoélastique est définie par un système d'équations qui sont écrites à la fois sur la configuration géométrique initiale connue du système et sur la configuration actuelle qui est une inconnue du problème d'évolution : équations de la dynamique, équation de continuité, loi de comportement, équation thermique, et conditions au contour.

■ On regroupe sous le nom d'**hypothèse des petites perturbations** l'ensemble des hypothèses suivantes : hypothèse des petites transformations, hypothèse des petits déplacements, et hypothèse des petites variations de température :

$$\|\underline{\underline{\nabla}}\xi\| \ll 1, \quad \tau \ll \text{petit}, \quad \ll \text{petits} \gg \text{déplacements}.$$

Les équations du problème d'évolution thermoélastique quasi-statique sont alors toutes écrites sur la configuration initiale connue du système et elles sont **linéaires**.

$$\begin{cases} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) + \rho_0(\underline{x}) \underline{F}(\underline{x}, t) = 0 & \text{sur } \Omega, \\ \llbracket \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) \rrbracket \cdot \underline{n}(\underline{x}) = 0 & \text{sur } \Sigma_{\underline{\underline{\sigma}}} \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) = \underline{\underline{\sigma}}^0(\underline{x}) + \underline{\underline{A}}(\underline{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}, t) - \underline{\underline{k}}(\underline{x}) \tau(\underline{x}, t) \\ \operatorname{div}(\underline{\underline{K}}(\underline{x}) \cdot \operatorname{grad} T(\underline{x})) = 0 & \text{sur } \Omega \\ \rho(\underline{x}, t) = \rho_0(\underline{x})(1 - \operatorname{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}, t)) \\ T(\underline{x}, t) = T^d(\underline{x}, t) & \text{sur } \partial\Omega, \\ \begin{cases} \sigma_{ij}(\underline{x}, t) n_j(\underline{x}) = T_i^d(\underline{x}, t) & \text{sur } S_{T_i} \\ \xi_i(\underline{x}, t) = \xi_i^d(\underline{x}, t) & \text{sur } S_{\xi_i} \\ S_{\xi_i} \cup S_{T_i} = \partial\Omega, S_{\xi_i} \cap S_{T_i} = \emptyset, i = 1, 2, 3 \end{cases} \end{cases}$$



■ Le problème thermique est *découplé* et peut être résolu de façon autonome. Le champ d'écart de température déterminé à chaque instant dans le système est intégré dans les données.

Le problème d'évolution thermoélastique quasi-statique linéarisé définit à chaque instant un *problème d'équilibre thermoélastique* qui ne dépend que des sollicitations actuelles et de l'état initial. L'*unicité* de la solution de ce problème est assurée lorsque les conditions aux limites sont celles du problème *bien posé*. Si l'hypothèse des petites perturbations est constamment vérifiée au cours de l'évolution, l'état actuel d'équilibre thermoélastique est entièrement déterminé par la connaissance des sollicitations actuelles et de l'état initial.

Le « *principe* » de *superposition* exprime la linéarité du problème : sous réserve que l'hypothèse des petites perturbations demeure vérifiée, la solution du problème dépend linéairement des données.

■ La solution est constituée d'un champ de déplacement *cinématiquement admissible* pour le problème

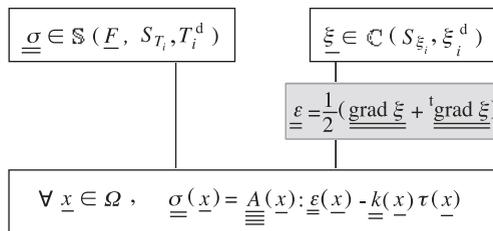
$$\xi_i = \xi_i^d \quad \text{sur } S_{\xi_i} \Leftrightarrow \underline{\underline{\xi}} \in \mathbb{C}(S_{\xi_i}, \xi_i^d),$$

et d'un champ de contrainte *statiquement admissible* pour le problème

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{F} = 0 \quad (\rho = \rho_0) \\ \sigma_{ij} n_j = T_i^d \quad \text{sur } S_{T_i} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \underline{\underline{\sigma}} \in \mathbb{S}(\underline{F}, S_{T_i}, T_i^d),$$

liés par la loi de comportement thermoélastique.

($\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\xi}}$) solution du problème



■ Les méthodes classiques de résolution directe du problème, à partir d'hypothèses inspirées par la forme des données, choisissent l'un ou l'autre de ces champs, cinématiquement admissible ou statiquement admissible, comme inconnue principale et expriment que le champ qui lui est associé par la loi de comportement est, selon le cas, statiquement admissible ou cinématiquement admissible.

- La *méthode des déplacements* part d'une forme postulée pour le champ $\underline{\xi}$ cinématiquement admissible pour le problème. On doit alors assurer que le champ de contrainte qui est élastiquement associé à $\underline{\xi}$ est statiquement admissible pour le problème.

- La *méthode des contraintes* part d'une forme postulée pour le champ $\underline{\sigma}$, statiquement admissible. On doit alors assurer que le champ de déformation (linéarisée) qui est associé à $\underline{\sigma}$ est géométriquement compatible et engendre un champ de déplacement cinématiquement admissible pour le problème.

Problèmes classiques

Cinq problèmes d'équilibre élastique isotherme pour des solides constitués d'un matériau homogène isotrope sont présentés. L'état initial du système sous chargement nul pris comme référence est, dans tous les cas, supposé naturel.

■ Le problème d'équilibre élastique linéarisé associé à la *torsion* isotherme d'une barre cylindrique constituée d'un matériau homogène isotrope peut être résolu lorsque les conditions aux extrémités ont une forme bien précise liée à la géométrie de la section droite de la barre.

Le champ de contrainte solution est un champ de cisaillement pur, non homogène dans la section droite, invariant par translation le long de la barre :

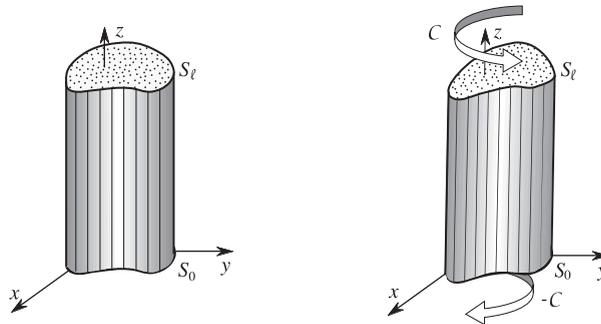
$$\underline{\underline{\sigma}} = \mu \alpha \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_x) + \mu \alpha \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) (\underline{e}_y \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_y).$$

Le champ de déplacement met en évidence le *gauchissement* des sections droites et leur rotation différentielle, constants le long de la barre

$$\underline{\underline{\xi}} = -\alpha z y \underline{e}_x + \alpha z x \underline{e}_y + \alpha \varphi(x, y) \underline{e}_z.$$

La *rotation différentielle* (angle de torsion) α est *proportionnelle* au *couple* de torsion appliqué \mathcal{C} :

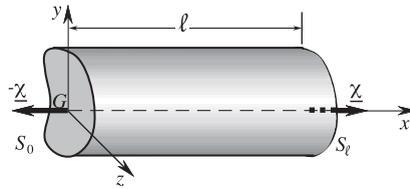
$$\mathcal{C} = \mu J \alpha.$$



■ Le *principe de Saint Venant* affirme que la solution du problème de la torsion obtenue pour les conditions aux limites ainsi spécifiées aux extrémités de la barre demeure valable, dans la *partie courante* de cette même barre supposée suffisamment longue, pour toute distribution d'efforts surfaciques aux extrémités dont le *torseur* se réduit à un couple d'axe parallèle à celui de la barre ; la forme précise des conditions imposées n'introduit que des effets limités au voisinage des extrémités.

Plus généralement le principe de Saint Venant est énoncé pour les corps *élancés* chargés à leurs extrémités.

■ *Traction-compression d'une barre cylindrique.* La solution, obtenue pour des conditions aux extrémités spécifiées, est étendue par le principe de Saint Venant à la partie courante d'une barre élançée dont les torseurs des efforts appliqués aux extrémités se réduisent chacun à une force, parallèle à l'axe de la barre, exercée au centre de la section.



Le champ de contrainte solution est uniforme : il est uniaxial, de traction ou de compression, parallèle à la barre,

$$\underline{\underline{\sigma}} = E \frac{\delta}{\ell} \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x .$$

Le champ de déplacement

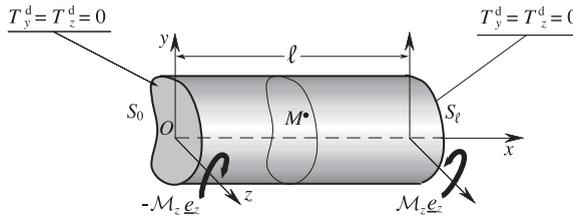
$$\underline{\underline{\xi}} = \frac{\delta}{\ell} [x \underline{e}_x - \nu(y \underline{e}_y + z \underline{e}_z)]$$

met en évidence l'allongement de la barre, proportionnel à la longueur de celle-ci et à la force de traction appliquée,

$$\frac{\chi}{S} = E \frac{\delta}{\ell}$$

et la contraction transversale, constante le long de la barre et proportionnelle à la force de traction.

■ **Flexion normale d'une barre cylindrique.** La solution, établie pour des conditions aux limites précises, est étendue par le principe de Saint Venant à la partie courante d'une barre suffisamment élancée à laquelle sont appliqués des efforts aux extrémités dont les torseurs se réduisent chacun à un moment porté par un **axe principal d'inertie** (géométrique) de la section droite.

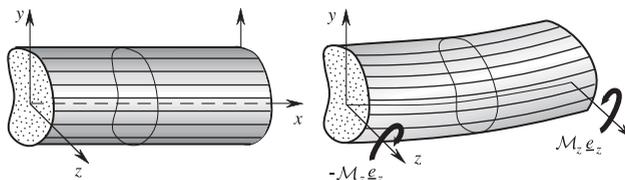


Le champ de contrainte est uniaxial de traction et de compression parallèle à la barre ; il est invariant par translation le long de la barre ; il varie linéairement dans la section droite et s'annule sur l'**axe neutre** qui coïncide avec l'axe d'inertie portant le moment de flexion appliqué

$$\underline{\underline{\sigma}} = -\frac{\mathcal{M}_z}{I_z} y \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x .$$

Le champ de déplacement met en évidence que les sections droites demeurent planes et orthogonales à la fibre moyenne, dont la déformée est circulaire. Leur rotation autour de l'axe neutre, ainsi que la courbure de la déformée, sont proportionnelles au moment de flexion appliqué :

$$\underline{\underline{\omega}}(x) = \frac{\mathcal{M}_z}{E I_z} x \underline{e}_z \quad , \quad \chi(x) = \frac{d\omega(x)}{dx} = \frac{\mathcal{M}_z}{E I_z} .$$

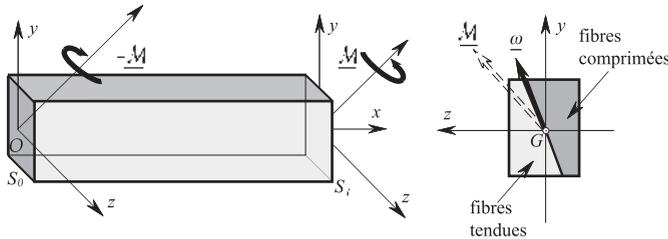


■ La combinaison linéaire des solutions obtenues pour des moments de flexion portés par l'un ou l'autre des axes d'inertie principaux de la section droite permet de résoudre le problème de la flexion pour un moment de direction quelconque $\underline{M} = M_y \underline{e}_y + M_z \underline{e}_z$.

La solution présente les mêmes propriétés de linéarité mais l'axe neutre sur lequel s'annule le champ de contrainte et autour duquel tourne la section droite ne coïncide plus, en général, avec la direction du moment de flexion appliqué. La *flexion* est *déviée* :

$$\underline{\sigma} = \left(-\frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z \right) \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x$$

$$\underline{\omega}(x) = \left(\frac{M_z}{E I_z} \underline{e}_z + \frac{M_y}{E I_y} \underline{e}_y \right) x .$$

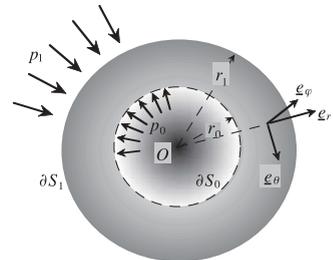


■ Le problème de l'équilibre d'une *enveloppe sphérique* soumise à des *pressions intérieure et extérieure* est résolu par la méthode des déplacements.

La solution est à symétrie sphérique. Le champ de déplacement est radial :

$$\underline{\xi} = \left(\frac{A}{3\lambda + 2\mu} r + \frac{B}{2\mu r^2} \right) \underline{e}_r$$

$$A = \frac{p_0 r_0^3 - p_1 r_1^3}{r_1^3 - r_0^3} , \quad B = \frac{1}{2} \frac{(p_0 - p_1) r_0^3 r_1^3}{r_1^3 - r_0^3} .$$



Le champ de contrainte admet en chaque point la direction radiale et les directions orthoradiales pour directions principales :

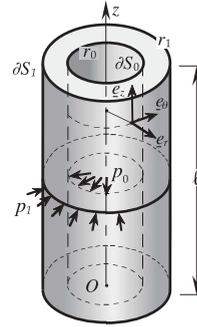
$$\sigma_{rr} = A - 2\frac{B}{r^3} , \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = A + \frac{B}{r^3} , \quad \text{autres } \sigma_{ij} = 0 .$$

■ Le problème de l'équilibre d'un *tube cylindrique* sous *pressions intérieure et extérieure* est résolu de manière analogue.

La solution est à symétrie cylindrique. Le champ de déplacement a une composante radiale fonction de la distance à l'axe du tube et une composante parallèle au tube proportionnelle à la cote :

$$\underline{\xi} = \left[\left(\frac{A(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{E} - \nu \frac{\delta}{\ell} \right) r + \frac{B}{2\mu r} \right] \underline{e}_r + z \frac{\delta}{\ell} \underline{e}_z$$

$$A = \frac{p_0 r_0^2 - p_1 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} \quad B = \frac{(p_0 - p_1) r_0^2 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} .$$



Le champ de contrainte admet, en chaque point, pour directions principales les directions de la base locale des coordonnées cylindriques :

$$\sigma_{rr} = A - \frac{B}{r^2} \quad , \quad \sigma_{\theta\theta} = A + \frac{B}{r^2} \quad , \quad \sigma_{zz} = 2\nu A + E \frac{\delta}{\ell} \quad , \quad \text{autres } \sigma_{ij} = 0 .$$

Méthodes variationnelles

■ L'hypothèse des petites perturbations permet l'écriture du principe des puissances virtuelles sur la configuration initiale du système étudié en y faisant intervenir, d'une part un champ de contrainte de Cauchy, d'autre part un champ de déplacement virtuel et son champ de déformation linéarisée. L'énoncé correspondant est le *théorème des travaux virtuels* :

$$\forall \underline{\underline{\sigma}}^* \begin{cases} \text{continu et continûment différentiable, par morceaux,} \\ \text{div } \underline{\underline{\sigma}}^* + \rho \underline{F} = 0 \text{ sur } \Omega \\ \llbracket \underline{\underline{\sigma}}^* \rrbracket \cdot \underline{n} = 0 \text{ sur } \Sigma_{\underline{\underline{\sigma}}^*} \end{cases}$$

$$\forall \hat{\underline{\xi}} \text{ continu, continûment différentiable par morceaux,}$$

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}^*(\underline{x}) : \hat{\underline{\xi}}(\underline{x}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \rho(\underline{x}) \underline{F}(\underline{x}) \cdot \hat{\underline{\xi}}(\underline{x}) \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} \hat{\underline{\xi}}(\underline{x}) \cdot \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) \, da = 0 .$$

Cette hypothèse permet aussi la linéarisation de la loi de comportement thermoélastique qui dérive d'un potentiel quadratique, fonction *convexe* des déformations linéarisées, ou de son potentiel conjugué, fonction *convexe* du tenseur des contraintes de Cauchy :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \rho \frac{\partial \psi(\tau, \underline{\underline{\varepsilon}})}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}$$

$$\rho \psi^*(\tau, \underline{\underline{\psi}}) = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} - \rho \psi(\tau, \underline{\underline{\varepsilon}})$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \rho \frac{\partial \psi(\tau, \underline{\underline{\sigma}})}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}$$

■ Ces deux arguments sont les fondements des principes variationnels, qui caractérisent les champs de déplacement et le champ de contrainte solutions du problème d'équilibre thermoélastique linéarisé par une propriété de *minimum d'une fonctionnelle convexe* respectivement sur l'ensemble des champs cinématiquement admissibles et sur l'ensemble des champs statiquement admissibles.

• Tout champ de déplacement solution rend minimale la fonctionnelle « *Énergie potentielle* » sur l'ensemble des champs cinématiquement admissibles avec les données du problème :

$$W(\underline{\tau}, \underline{\xi}') = \int_{\Omega} \rho \psi(\underline{\tau}, \underline{\xi}') \, d\Omega, \quad \Phi(\underline{\xi}') = \int_{\Omega} \rho \underline{F} \cdot \underline{\xi}' \, d\Omega + \sum_i \int_{S_{T_i}} T_i^d \xi'_i \, da$$

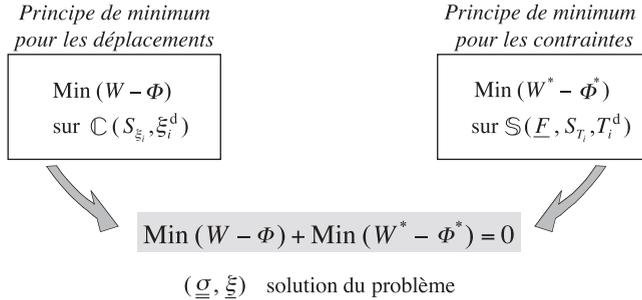
$$(W - \Phi) \quad \text{minimale sur} \quad \mathbb{C}(S_{\xi_i}, \xi_i^d).$$

• Le champ de contrainte solution rend minimale la fonctionnelle « *Énergie complémentaire* » sur l'ensemble des champs statiquement admissibles avec les données du problème :

$$W^*(\underline{\tau}, \underline{\sigma}') = \int_{\Omega} \rho \psi^*(\underline{\tau}, \underline{\sigma}') \, d\Omega, \quad \Phi^*(\underline{\sigma}') = \sum_i \int_{S_{\xi_i}} \xi_i^d \sigma'_{ij} n_j \, da$$

$$(W^* - \Phi^*) \quad \text{minimale sur} \quad \mathbb{S}(\underline{F}, S_{T_i}, T_i^d).$$

■ Il s'agit de deux principes variationnels duals ; les valeurs minimales des deux fonctionnelles, atteintes pour la solution du problème, sont opposées.



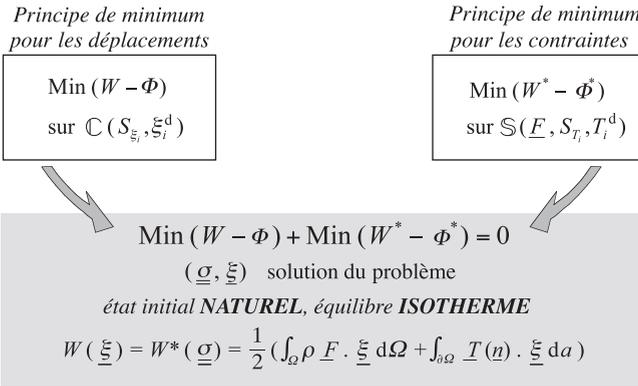
La mise en œuvre simultanée des principes variationnels sur les déplacements et sur les contraintes permet d'aboutir à un encadrement énergétique de la solution $(\underline{\sigma}, \underline{\xi})$:

$$\forall \underline{\xi}' \in \mathbb{C}(S_{\xi_i}, \xi_i^d), \forall \underline{\sigma}' \in \mathbb{S}(\underline{F}, S_{T_i}, T_i^d) :$$

$$-W^*(\underline{\tau}, \underline{\sigma}') + \Phi^*(\underline{\sigma}') \leq -W^*(\underline{\tau}, \underline{\sigma}) + \Phi^*(\underline{\sigma}) = W(\underline{\tau}, \underline{\xi}) - \Phi(\underline{\xi}) \leq W(\underline{\tau}, \underline{\xi}') - \Phi(\underline{\xi}').$$

■ Ces résultats conduisent aux *méthodes variationnelles* de résolution : on explore l'un ou l'autre des ensembles des champs de déplacement cinématiquement admissibles ou des champs de contrainte statiquement admissibles et l'on y minimise la fonctionnelle appropriée. Les méthodes variationnelles permettent d'introduire le concept de *solution approchée*. Elles sont exploitées analytiquement ou *numériquement*.

■ Dans le cas particulier de l'équilibre *isotherme* à partir de l'état *initial naturel*, les valeurs de l'énergie élastique de déformation et de l'énergie élastique de contrainte du système dans son état d'équilibre actuel sont égales entre elles et égales, par la *formule de Clapeyron*, à la moitié du travail de tous les efforts extérieurs dans le champ de déplacement solution.



Les expressions du potentiel élastique $\rho\psi(\underline{\underline{\epsilon}}')$ et du potentiel conjugué $\rho\psi^*(\underline{\underline{\sigma}}')$ sont alors des formes quadratiques homogènes. Ainsi, pour le matériau isotrope :

$$\begin{aligned}
 W(\underline{\underline{\epsilon}}') &= \int_{\Omega} \left[\frac{\lambda}{2} (\text{tr } \underline{\underline{\epsilon}}')^2 + \mu \text{tr}(\underline{\underline{\epsilon}}')^2 \right] d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\frac{\nu}{1-2\nu} (\text{tr } \underline{\underline{\epsilon}}')^2 + \text{tr}(\underline{\underline{\epsilon}}')^2 \right] d\Omega \\
 W^*(\underline{\underline{\sigma}}') &= \int_{\Omega} \left[\frac{1+\nu}{2E} \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}')^2 - \frac{\nu}{2E} (\text{tr } \underline{\underline{\sigma}}')^2 \right] d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} \frac{1}{4\mu} \left[\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}')^2 - \frac{\lambda}{(3\lambda + 2\mu)} (\text{tr } \underline{\underline{\sigma}}')^2 \right] d\Omega
 \end{aligned}$$

■ Dans le même cadre d'hypothèses que pour la formule de Clapeyron, le **théorème de réciprocité** de Maxwell-Betti exprime la symétrie qui existe entre deux états d'équilibre distincts pour un même système :

$$\int_{\Omega} \rho \underline{F}^1 \cdot \underline{\xi}^2 \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \underline{T}^1(\underline{n}) \cdot \underline{\xi}^2 \, da = \int_{\Omega} \rho \underline{F}^2 \cdot \underline{\xi}^1 \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \underline{T}^2(\underline{n}) \cdot \underline{\xi}^1 \, da .$$

■ Les **champs d'autocontrainte** pour le problème sont les champs statiquement admissibles avec des **données statiques nulles**. Ils forment l'espace vectoriel :

$$\mathbb{A}(S_{T_i}) = \mathbb{S}(0, S_{T_i}, 0) .$$

Cet espace vectoriel est l'espace vectoriel associé de l'espace affine des champs de contrainte statiquement admissibles pour le problème avec un jeu de données statiques non nulles. La dimension de cet espace vectoriel définit le **degré d'hyperstaticité** du problème.

Le développement des champs d'autocontrainte sur une base définit un système d'**inconnues hyperstatiques**.

■ On peut considérer, dans l'hypothèse des petites perturbations, la famille des problèmes d'équilibre qui dépendent linéairement des paramètres Q_j , ($j = 1, \dots, m$), pour les données statiques et q_j , ($j = m+1, \dots, n$), pour les données cinématiques complémentaires, pour un même système. On définit les ensembles \mathbb{S} et \mathbb{C} des champs de contrainte statiquement admissibles et des champs de déplacement

cinématiquement admissibles pour le problème ainsi paramétré; le théorème des travaux virtuels s'énonce :

$$\forall \underline{\sigma}^* \in \mathbb{S}, \forall \hat{\underline{\xi}} \in \mathbb{C}, \int_{\Omega} \underline{\sigma}^* : \hat{\underline{\xi}} \, d\Omega = \sum_{j=1}^n Q_j^* \hat{q}_j = \underline{Q}^* \cdot \hat{\underline{q}},$$

qui définit les paramètres complémentaires Q_j^* , ($m+1, \dots, n$) et \hat{q}_j , ($1, \dots, m$), et où les correspondances

$$\underline{\sigma}^* \in \mathbb{S} \longrightarrow \underline{Q}^* = \underline{Q}(\underline{\sigma}^*) \in \mathbb{R}^n$$

$$\hat{\underline{\xi}} \in \mathbb{C} \longrightarrow \hat{\underline{q}} = \underline{q}(\hat{\underline{\xi}}) \in \mathbb{R}^n$$

sont linéaires. Les vecteurs \underline{Q} et \underline{q} sont respectivement les *paramètres de chargement et les paramètres cinématiques du système* dans la famille de problèmes considérés.

■ Dans ces circonstances, si le système est constitué d'un matériau thermoélastique, le *théorème de Castigliano* fournit l'expression de la loi de comportement thermoélastique globale du système qui relie les paramètres \underline{Q} et \underline{q} . Elle s'écrit, de façon analogue à la loi de comportement thermoélastique locale du matériau constitutif, au moyen du potentiel global $\mathcal{W}^*(\tau, \underline{Q})$, fonction convexe de \underline{Q} , dont la valeur est égale à l'énergie élastique de contrainte du système dans son état d'équilibre thermoélastique sous le chargement \underline{Q} :

$$\underline{q}^{\text{el}}(\underline{Q}) = \frac{\partial \mathcal{W}^*(\tau, \underline{Q})}{\partial \underline{Q}}.$$

■ Le théorème de Castigliano suppose connu $\mathcal{W}^*(\tau, \underline{Q}')$, c'est-à-dire le problème d'équilibre thermoélastique sous le chargement \underline{Q}' résolu. Le *théorème du potentiel minimum* permet la détermination de cette solution lorsque les données cinématiques sont nulles et que l'espace vectoriel des champs d'autocontrainte pour le problème paramétré est de dimension finie. L'énergie élastique de contrainte du système est une fonction convexe connue des inconnues hyperstatiques \underline{X}' et du chargement \underline{Q}' : $\mathcal{W}^*(\tau, \underline{Q}', \underline{X}')$.

L'état d'équilibre thermoélastique du système est obtenu par :

$$\frac{\partial \mathcal{W}^*[\tau, \underline{Q}, \underline{X}^{\text{el}}(\underline{Q})]}{\partial \underline{X}'} = 0$$

qui détermine $\underline{X}^{\text{el}}(\underline{Q})$, puis

$$\underline{q}^{\text{el}}(\underline{Q}) = \frac{\partial \mathcal{W}^*[\tau, \underline{Q}, \underline{X}^{\text{el}}(\underline{Q})]}{\partial \underline{Q}'};$$

et l'on a :

$$\mathcal{W}^*(\tau, \underline{Q}) = \mathcal{W}^*[\tau, \underline{Q}, \underline{X}^{\text{el}}(\underline{Q})].$$

Les inconnues hyperstatiques peuvent s'interpréter comme des paramètres de chargement supplémentaires dont les paramètres cinématiques associés doivent être nuls dans l'état d'équilibre thermoélastique.

Formulaire en coordonnées cylindriques

(base $\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z$ orthonormée)

Cinématique

$$\underline{U} = U_r \underline{e}_r + U_\theta \underline{e}_\theta + U_z \underline{e}_z$$

$$d_{rr} = \frac{\partial U_r}{\partial r}, \quad d_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{U_r}{r}, \quad d_{zz} = \frac{\partial U_z}{\partial z}$$

$$d_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{U_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} \right)$$

$$d_{\theta z} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U_z}{\partial \theta} + \frac{\partial U_\theta}{\partial z} \right), \quad d_{zr} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial r} \right)$$

$$\text{tr } \underline{\underline{d}} = \text{div } \underline{U} = \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{U_r}{r} + \frac{\partial U_z}{\partial z}$$

Équations de la dynamique

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \rho(F_r - a_r) = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} + \rho(F_\theta - a_\theta) = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr}}{r} + \rho(F_z - a_z) = 0$$

Formulaire en coordonnées sphériques

(base $\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_\varphi$ orthonormée)

Cinématique

$$\underline{U} = U_r \underline{e}_r + U_\theta \underline{e}_\theta + U_\varphi \underline{e}_\varphi$$

$$d_{rr} = \frac{\partial U_r}{\partial r}, \quad d_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{U_r}{r}, \quad d_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{U_\theta}{r} \cot \theta + \frac{U_r}{r}$$

$$d_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} + \frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{U_\theta}{r} \right)$$

$$d_{\theta\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U_\theta}{\partial \varphi} - \frac{\cot \theta}{r} U_\varphi \right)$$

$$d_{\varphi r} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial U_\varphi}{\partial r} - \frac{U_\varphi}{r} \right)$$

$$\text{tr } \underline{d} = \text{div } \underline{U} = \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{U_\theta}{r} \cot \theta + 2 \frac{U_r}{r}$$

Équations de la dynamique

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{r\theta} \cot \theta) + \rho(F_r - a_r) = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} ((\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}) \cot \theta + 3\sigma_{r\theta}) + \rho(F_\theta - a_\theta) = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (3\sigma_{\varphi r} + 2\sigma_{\varphi\theta} \cot \theta) + \rho(F_\varphi - a_\varphi) = 0$$