

Statique des solides élastiques
en petites déformations

Jean GARRIGUES
Jean.Garrigues@esm2.imt-mrs.fr

Novembre 2001



Avertissement :

Ce cours fait suite au cours de mécanique des milieux continus, dont la connaissance préalable est indispensable.

Les résultats donnés dans ce cours sont tous donnés sous forme tensorielle. Il sont donc valables dans tout système de coordonnées.

Les étudiants sont informés qu'ils ont à leur disposition dans le logiciel de calcul formel «Maple», une bibliothèque maison, nommée «tens3d», destinée à leur faciliter le travail pour l'écriture des équations de la mécanique des milieux continus dans un système de coordonnées quelconque en base naturelle ou en base naturelle normée. Ils sont vivement encouragés à l'utiliser pour la résolution des travaux dirigés.



Chapitre 1

Introduction

L'élasticité classique est l'étude du comportement des solides *déformables, élastiques*¹, *isotropes, en petites déformations, avec une loi de comportement linéaire*². On y ajoute une hypothèse simplificatrice supplémentaire : les déplacements sont petits. Le couple d'hypothèses «petits déplacements» et «petites déformations»³ est souvent appelé *Hypothèse des petites perturbations* souvent abrégée par HPP. On verra plus loin que toutes ces hypothèses ont pour conséquence de rendre linéaires les équations différentielles de l'élasticité. L'élasticité classique est donc souvent appelée aussi *élasticité linéaire*.

Contrairement à la mécanique des fluides, on ne s'intéressera pas ici à la description du mouvement du solide pendant la déformation⁴, mais seulement à l'état final du corps, lorsque l'application du chargement est terminée et que le solide a atteint son état d'équilibre sous la charge. Ce cours est donc un cours de *statique des corps élastiques*.

On se donne un corps de forme initiale connue⁵, et dont la loi de comportement ci-dessus est supposée refléter correctement le comportement du matériau⁶. On le soumet à un chargement mécanique (efforts appliqués sur le corps ou déplacements imposés) ou thermique (une variation de température), et on se pose les questions suivantes :

1. Sous quels chargements⁷ faut-il calculer l'objet⁸?
2. Quelles sont les contraintes, les déformations et les déplacements engendrés par ces chargements?
3. Ces chargements sont-ils supportables par le matériau?
4. Les valeurs trouvées sont-elles acceptables⁹?

Comme on le voit, ces questions sont en rapport direct avec les préoccupations d'un ingénieur qui doit concevoir un objet ou un assemblage d'objets. La statique des corps élastiques ne permettra de répondre qu'aux questions 2 et 3 !

1. au sens qui a été défini dans le cours de mécanique des milieux continus.

2. Cette dernière précision est un pléonasme : en petites déformations, la loi de comportement est la linéarisation au voisinage de l'origine, d'une loi élastique (linéaire ou non) en grandes déformations.

3. Ces deux hypothèses sont indépendantes : aucune n'entraîne l'autre.

4. Cette étude sera abordée plus tard en dynamique des structures/vibrations

5. Si on recherche la forme optimale d'un objet, il faut en essayer plusieurs jusqu'à en trouver de satisfaisantes. La mécanique ne permet de faire que des *vérifications* sur un objet dont on connaît la forme!

6. C'est sans doute la première question à se poser avant de se lancer dans un calcul d'élasticité!

7. on dit aussi : cas de charge.

8. Autrement dit, quels problèmes de mécanique faut-il résoudre pour satisfaire le client ?

9. Autrement dit, la solution proposée satisfait-elle les exigences du client ?

Les réponses aux questions 1 et 4 sont sous l'entière responsabilité de l'ingénieur. Il peut parfois être guidé dans cette tâche par des normes ou des règlements.

Un aperçu du comportement des matériaux réels :

Si on fait une expérience de traction sur un matériau (l'acier par exemple), on constate que, tant que les efforts de traction ne dépassent pas une certaine limite, la relation contrainte-déformation reste linéaire. Cependant au delà du seuil, on constate que la linéarité et la mémoire de la configuration initiale sont perdues : le matériau a une loi de comportement différente. La courbe de la

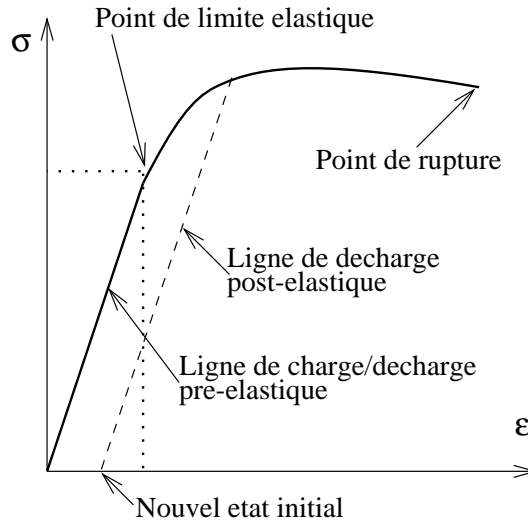


FIG. 1.1 – Courbe $\sigma_{11} = f(\epsilon_{11})$ dans un essai de traction

figure 1.1 montre l'allure du comportement d'un acier dans un essai de traction sur une éprouvette, dans un plan déformation-contrainte. On y constate clairement deux comportements :

- Tant qu'on reste en dessous du point de limite élastique, le comportement reste élastique, c'est à dire que la courbe de décharge est confondue avec la courbe de charge. Quand le chargement redevient nul, l'éprouvette retrouve donc sa forme initiale.
- Par contre, si le chargement dépasse la limite élastique, et si on décharge ensuite l'éprouvette, on constate qu'on revient à un autre état : le matériau a perdu la mémoire de son état initial et se comporte comme si l'état initial était changé.

■

Ainsi, la loi de comportement élastique linéaire présentée dans le cours de mécanique des milieux continus a un domaine d'application limité par deux conditions indépendantes :

1. Les déformations doivent être petites car on utilise le tenseur des petites déformations ϵ et non un tenseur de déformation exact.
2. La loi de comportement élastique linéaire n'est valide que tant qu'on reste en dessous d'un certain seuil de limite élastique¹⁰.

Dans la pratique on peut considérer qu'une déformation est petite lorsqu'elle est inférieure à 10^{-2} ou 10^{-3} .

Pour beaucoup de matériaux métalliques¹¹, le seuil de limite élastique est dans le domaine des

10. Le seuil observé dans l'essai de traction précédent n'est qu'un cas particulier: c'est le seuil lorsque que le tenseur des contraintes est uniaxial (Il n'a donc qu'une seule valeur propre non nulle). La notion de limite élastique pour des sollicitations plus générales qu'un simple essai de traction sera précisée dans le dernier chapitre.

11. les aciers par exemple.

petites déformations. Si bien que, dans ce cas, on peut confondre les deux limitations : Si on est en dessous du seuil de limite élastique, on est dans le domaine des petites déformations.

Mais pour d'autres matériaux, on peut avoir des comportements élastiques avec de grandes déformations¹², et le comportement élastique peut être non linéaire. Pour de tels matériaux, on peut utiliser l'élasticité linéaire à condition de rester dans le domaine des petites déformations¹³.

Dans tous les cas, la vérification de la validité de ces deux conditions (HPP et limite élastique) ne peut se faire qu'a posteriori, en analysant la solution numérique complète du problème !

Il ne faut pas conclure de cette discussion qu'il faille éviter de construire des objets travaillant au delà de la limite élastique¹⁴. En construction mécanique, on désire souvent qu'une pièce reprenne sa forme initiale lorsque le chargement a cessé. On doit donc rester dans le domaine élastique, et l'élasticité classique est une théorie satisfaisante.

Mais il existe un grand nombre de problèmes pratiques où elle n'est d'aucun secours :

- Dans le bâtiment, on admet parfois de dépasser la limite élastique (sans aller jusqu'à la rupture !).
- Dans les procédés de formage (pliage, emboutissage, forgeage, etc), il est évident qu'on ne souhaite pas le retour à la forme initiale et qu'on doit s'intéresser au comportement non élastique au delà de la limite élastique.
- Un grand nombre de matériaux nouveaux ont des lois de comportements non linéaires (les élastomères par exemple) ou non isotropes (les matériaux composites par exemple). Là encore, il faut utiliser des théories plus complexes.

On voit donc que, bien qu'elle soit populaire et simple, la théorie de l'élasticité classique ne peut satisfaire tous les besoins.

C'est l'ingénieur qui a la responsabilité de choisir la théorie à utiliser pour résoudre son problème et la responsabilité de vérifier *a posteriori* que la solution trouvée est bien dans les limites d'application de la théorie choisie.

12. les caoutchoucs par exemple

13. Au voisinage de l'origine, on remplace la courbe non linéaire par sa tangente.

14. Historiquement, c'est pourtant ce que les ingénieurs ont souvent fait, parce que leurs capacités de calcul ne leur permettait pas de faire autrement. Leurs constructions étaient donc souvent surdimensionnées. Aujourd'hui, le développement des calculateurs a beaucoup fait évoluer les choses.

Chapitre 2

Equations générales de l'élasticité

Ces équations générales ne sont que l'application directe des équations générales de la mécanique des milieux continus. Il n'y a aucun principe fondamental nouveau. On va simplement les adapter¹ à la statique des solides élastiques en petites perturbations.

2.1 Hypothèse des petites perturbations

L'hypothèse des *petites perturbations* (HPP) contient deux suppositions: les *déformations* sont petites et les *déplacements* sont petits.

2.1.1 Petites déformations

En mécanique des milieux continus, on a introduit *l'hypothèse des petites déformations* qui a permis d'introduire un tenseur de déformations approché.

Cette hypothèse permet de faire quelques approximations:

Soit \mathcal{A} une grandeur dont la description d'Euler est $\mathcal{A}_E(M, t)$ et dont la description de Lagrange est $\mathcal{A}_L(M_0, t)$

Conséquence 1 : Une intégrale sur Ω_t de la quantité \mathcal{A} peut être approximée :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t} \mathcal{A}_E(M, t) dv_t &= \int_{\Omega_0} \mathcal{A}_L(M_0, t) \det \mathbf{F} dv_0 \quad (\text{Changement de variables rigoureux}) \\ \int_{\Omega_t} \mathcal{A}_E(M, t) dv_t &\simeq \int_{\Omega_0} \mathcal{A}_L(M_0, t) dv_0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

(la dilatation volumique est $\det \mathbf{F} \simeq 1 + \text{Tr} \epsilon$. On néglige le produit $\mathcal{A}_L(M_0, t) \text{Tr} \epsilon$ devant $\mathcal{A}_L(M_0, t)$. Ce produit est du second ordre si $\mathcal{A}_L(M_0, t)$ est «petit». Cette approximation revient à dire que la dilatation volumique est approximée à 1.)

Conséquence 2 : La dérivée temporelle d'une intégrale sur Ω_t de la quantité \mathcal{A} peut être approxi-

1. peut-être devrait-on dire «dégrader»...

mée :

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_t} \mathcal{A}_E(M, t) dv_t &\simeq \int_{\Omega_0} \mathcal{A}_L(M_0, t) dv_0 \\
 \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \mathcal{A}_E(M, t) dv_t &\simeq \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} \mathcal{A}_L(M_0, t) dv_0 \\
 &\simeq \int_{\Omega_0} \frac{D\mathcal{A}_L(M_0, t)}{Dt} dv_0 \quad (\text{car } \Omega_0 \text{ est fixe}) \\
 &\simeq \int_{\Omega_0} \frac{\partial \mathcal{A}_L(M_0, t)}{\partial t} dv_0 \quad (\text{Dérivée particulière d'une description de Lagrange})
 \end{aligned}$$

2.1.2 Petits déplacements

Dans ce cours, on introduit une hypothèse supplémentaire : *On suppose que les déplacements sont «petits»*.

La notion de «petit» est plus difficile à préciser pour les déplacements que pour les déformations². L'objectif de cette hypothèse est de pouvoir dire que le domaine déformé Ω_t est peu différent du domaine initial Ω_0 . On dira donc qu'un déplacement est petit si

$$\|\xi_L(M_0, t)\| \ll d \quad \forall M_0 \in \Omega_0$$

où ξ_L est la description de Lagrange du champ des déplacements et d est une dimension caractéristique³ de Ω_0 .

Conséquence 1 : Si on écrit l'équilibre global d'un corps déformable sous des actions extérieures, on écrit que le torseur résultant est nul *lorsque les forces sont appliquées*, c'est à dire à l'instant t sur la configuration déformée.

Si les déplacements sont petits, on ne fait pas une grande erreur en disant que les efforts extérieurs à (l'instant t) sont aussi en équilibre si on les applique sur les particules à leur position initiale au lieu de leur position actuelle. Autrement dit, on admet que le petit déplacement sous la charge ne perturbe pas trop les équations d'équilibre.

En particulier, les conditions aux limites, normalement écrites sur la configuration déformée (inconnue), pourront être écrites sur la configuration initiale (connue). Cette simplification est essentielle pour rendre linéaires les problèmes délasticité.

Conséquence 2 : on peut confondre le gradient de la description d'Euler et le gradient de la description de Lagrange :

$$\begin{aligned}
 d\mathcal{A} &= \mathbf{grad}\mathcal{A}_L \overline{\otimes} dm_0 = \mathbf{grad}\mathcal{A}_E \overline{\otimes} dm_t \\
 \mathbf{grad}\mathcal{A}_L \overline{\otimes} dm_0 &= \mathbf{grad}\mathcal{A}_E \overline{\otimes} \mathbf{F} \overline{\otimes} dm_0 \quad \forall dm_0 \\
 \mathbf{grad}\mathcal{A}_L &= \mathbf{grad}\mathcal{A}_E \overline{\otimes} \mathbf{F} \\
 \mathbf{grad}\mathcal{A}_L &= \mathbf{grad}\mathcal{A}_E \overline{\otimes} (2\mathbf{L} + \mathbf{G}) \\
 \mathbf{grad}\mathcal{A}_L &\simeq \mathbf{grad}\mathcal{A}_E \overline{\otimes} (2\epsilon + \mathbf{G}) \\
 \mathbf{grad}\mathcal{A}_L &\simeq \mathbf{grad}\mathcal{A}_E
 \end{aligned}$$

(Si $\mathbf{grad}\mathcal{A}_E$ est «petit», $\mathbf{grad}\mathcal{A}_E \overline{\otimes} \epsilon$ est du second ordre).

On en déduit que $\text{div}\sigma_E(M, t) \simeq \text{div}\sigma_L(M_0, t)$, et donc que l'équation de mouvement dont l'expression exacte est :

$$\frac{D\mathbf{V}_E}{Dt} = \text{div}\sigma_E + \mathbf{f}_E$$

2. On rappelle que les déformations sont des nombres adimensionnels qu'on compare donc à 1.

3. par exemple: la plus grande distance entre deux points de Ω_0 .

peut s'écrire en petites déformations et petits déplacements :

$$\boxed{\frac{D\mathbf{V}_L}{Dt} = \text{div}\boldsymbol{\sigma}_L + \mathbf{f}_L}$$

Conséquence 3 : Le tenseur des vitesses de déformation \mathbf{D} , dont l'expression exacte est

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \frac{1}{2} \left(\text{grad}\mathbf{V}_E + \text{grad}^T\mathbf{V}_E \right) \\ &\simeq \frac{1}{2} \left(\text{grad}\mathbf{V}_L + \text{grad}^T\mathbf{V}_L \right) \\ &\simeq \frac{1}{2} \left(\text{grad}\frac{D\xi_L}{Dt} + \text{grad}^T\frac{D\xi_L}{Dt} \right) \\ &\simeq \frac{1}{2} \frac{D}{Dt} \left(\text{grad}\xi_L + \text{grad}^T\xi_L \right) \end{aligned}$$

et donc, dans le cas HPP :

$$\boxed{\mathbf{D} = \frac{D\boldsymbol{\epsilon}}{Dt}} \quad (2.2)$$

2.1.3 Conclusion

L'hypothèse HPP permet donc en fait de confondre les descriptions d'Euler et de Lagrange. Les équations établies en variables d'Euler en mécanique des milieux continus sont donc formellement conservées. Cette hypothèse nous dispense donc de réécrire les principes fondamentaux en variables de Lagrange. Il va de soi que si l'une des deux hypothèses n'est pas acceptable, ces confusions ne sont plus possibles.

Dans tous le cours d'élasticité en HPP, on omettra donc les indices L : toutes les descriptions de grandeurs sont des descriptions de Lagrange.

2.2 Loi de comportement

On rappelle que la loi de comportement élastique linéaire en petites déformations et en évolution isotherme est :

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{1+\nu} \left(\boldsymbol{\epsilon} + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{Tr}\boldsymbol{\epsilon} \mathbf{G} \right) \iff \boldsymbol{\epsilon} = \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{Tr}\boldsymbol{\sigma} \mathbf{G}}$$

Si on veut prendre en compte les effets dus à la dilatation thermique, on ajoute la déformation thermique isotrope⁴ $\alpha(T - T_0)\mathbf{G}$ dues à la variation $(T - T_0)$ de température aux déformations dues aux contraintes. La loi de comportement devient :

$$\boxed{\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{Tr}\boldsymbol{\sigma} \mathbf{G} + \alpha(T - T_0)\mathbf{G} \iff \boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{1+\nu} \left(\boldsymbol{\epsilon} + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{Tr}\boldsymbol{\epsilon} \mathbf{G} \right) - \frac{E}{1-2\nu} \alpha(T - T_0)\mathbf{G}}$$

où α est le *coefficient de dilatation linéaire*.

4. En général, les milieux élastiquement isotropes sont aussi thermiquement isotropes.

2.2.1 Interprétations physiques de E et ν

En élasticité HPP, on préfère utiliser le module d'Young E et le coefficient de Poisson ν à la place des coefficients de Lamé λ et μ proposés en mécanique des milieux continus, car ils ont une interprétation physique *dans l'essai de traction*.

Supposons que la température du matériau soit la même à l'état initial et à l'état final. On a donc $T - T_0 = 0$.

Dans la zone centrale d'une éprouvette en traction⁵, le tenseur des contraintes est sensiblement *uniaxial* et *uniforme*⁶, c'est à dire que :

$$\boldsymbol{\sigma} = s \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$$

où \mathbf{u} est un vecteur unitaire dans la direction de la traction, et s un scalaire constant dans la zone centrale.

Dans une base orthonormée dont le premier vecteur de base est \mathbf{u} , les composantes de $\boldsymbol{\sigma}$ sont :

$$[\boldsymbol{\sigma}_{\bullet\bullet}] = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

La contrainte dans la direction \mathbf{u} est $\mathbf{C}_u = \boldsymbol{\sigma} \overline{\otimes} \mathbf{u} = s \mathbf{u}$. Elle est colinéaire à \mathbf{u} . Il s'agit donc d'une contrainte uniquement normale⁷. La contrainte normale dans la direction \mathbf{u} est donc :

$$\mathbf{u} \overline{\otimes} \mathbf{C}_u = \mathbf{u} \overline{\otimes} \boldsymbol{\sigma} \overline{\otimes} \mathbf{u} = s$$

Le tenseur des petites déformation est obtenu avec la loi de comportement :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1 + \nu}{E} s \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - \frac{\nu}{E} s \mathbf{G}$$

Les composantes de $\boldsymbol{\epsilon}$ dans la même base sont donc :

$$[\boldsymbol{\epsilon}_{\bullet\bullet}] = \begin{bmatrix} \frac{s}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\nu \frac{s}{E} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \frac{s}{E} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

L'allongement relatif dans la direction \mathbf{u} est : $\mathbf{u} \overline{\otimes} \boldsymbol{\epsilon} \overline{\otimes} \mathbf{u} = \frac{s}{E}$

L'allongement relatif dans toute direction \mathbf{v} orthogonale à \mathbf{u} est : $\mathbf{v} \overline{\otimes} \boldsymbol{\epsilon} \overline{\otimes} \mathbf{v} = -\nu \frac{s}{E}$

Le module d'Young E est donc le coefficient de proportionnalité entre la contrainte normale dans la direction de traction \mathbf{u} et l'allongement relatif dans cette même direction.

$$\mathbf{u} \overline{\otimes} \boldsymbol{\sigma} \overline{\otimes} \mathbf{u} = E \mathbf{u} \overline{\otimes} \boldsymbol{\epsilon} \overline{\otimes} \mathbf{u}$$

Le coefficient de Poisson ν traduit le rapport entre l'allongement relatif transversal (direction \mathbf{v}) et l'allongement relatif longitudinal (dans la direction \mathbf{u}) :

$$\mathbf{v} \overline{\otimes} \boldsymbol{\epsilon} \overline{\otimes} \mathbf{v} = -\nu \mathbf{u} \overline{\otimes} \boldsymbol{\epsilon} \overline{\otimes} \mathbf{u}$$

On verra plus loin que le coefficient de Poisson ν est positif. Si l'allongement relatif dans la direction \mathbf{u} est > 0 (extension), alors l'allongement relatif dans la direction \mathbf{v} est < 0 (contraction) ; et inversement⁸.

5. c'est à dire loin des mors de fixation sur la machine de traction.

6. Voir TD de MMC

7. Attention : les contraintes pour des directions autres que \mathbf{u} ont des parties tangentielles!

8. Toutefois, la transformation n'est pas isovolume, car $\text{Tr} \boldsymbol{\epsilon} \neq 0$.

Dans un essai de traction, $s = \frac{F}{S}$ où F est l'effort de traction (indiqué par un dynamomètre sur la machine) et S est la section de l'éprouvette. On connaît donc facilement la contrainte s . Les allongements relatifs dans les directions \mathbf{u} et \mathbf{v} sont mesurés avec des extensomètres placés dans les bonnes directions.

On peut donc tracer la courbe de $s = \mathbf{u} \otimes \overline{\sigma} \otimes \mathbf{u}$ en fonction de l'allongement relatif $e = \mathbf{u} \otimes \overline{\epsilon} \otimes \mathbf{u}$ dans la direction \mathbf{u} ⁹. On obtient une droite de pente E (tant qu'on reste dans le domaine élastique). Voir figure 1.1 page 6.

La pente de la courbe de l'allongement relatif dans la direction \mathbf{v} en fonction de l'allongement relatif dans la direction \mathbf{u} donne le coefficient de Poisson.

2.3 Conservation de la masse

La masse d'une particule de masse dm ne change pas. On a donc :

$$\rho_0 dv_0 = \rho_t dv_t \implies \frac{\rho_0}{\rho_t} = \frac{dv_t}{dv_0} = 1 + \text{Tr } \epsilon$$

Cette équation donne la variation de la masse volumique en fonction du tenseur des petites déformations. Elle est de peu d'intérêt pratique en élasticité, car la variation de la masse volumique d'un solide déformable est une information secondaire¹⁰.

2.4 Principe fondamental de la mécanique

2.4.1 Equations d'équilibre

En statique des solides élastiques, on ne s'intéresse pas au mouvement que prend le solide pendant l'application du chargement pour atteindre la position d'équilibre final¹¹. On ne s'intéresse qu'à l'état d'équilibre final.

Dans l'état d'équilibre final, l'équation de mouvement devient l'équation d'équilibre :

$$\mathbf{0} = \text{div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_v$$

où \mathbf{f}_v est le champ des forces volumiques extérieures ($\mathbf{f}_v = \rho \mathbf{f}$) s'exerçant sur l'état final¹² et où $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur des contraintes à l'état final.

Le terme $\rho \frac{D\mathbf{V}}{dt}$ est nul car l'état final est à l'équilibre. Puisque nous sommes dans le cadre HPP tous les termes de cette équation peuvent être considérés comme des descriptions de Lagrange. L'équation d'équilibre est une équation différentielle vectorielle dont les inconnues sont le tenseur des contraintes.

En utilisant la loi de comportement, puis la définition de ϵ en fonction du déplacement $\boldsymbol{\xi}$, l'équation d'équilibre devient l'équation de Navier. Après calcul on trouve :

$$\mathbf{0} = \frac{E}{2(1+\nu)} \Delta \boldsymbol{\xi} + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \text{grad div } \boldsymbol{\xi} + \mathbf{f}_v - \frac{E\alpha}{1-2\nu} \text{grad}(T - T_0)$$

9. Cette courbe est appelée *courbe de traction*

10. D'ailleurs, dans certaines approximations on prend une dilatation volumique unité (voir (2.1) page 9

11. L'étude du mouvement pendant l'application du chargement est l'objet du cours de dynamique des structures.

12. L'usage en élasticité classique est d'utiliser les forces volumiques \mathbf{f}_v (en N/m^3) à la place des forces massiques \mathbf{f} (en $N/Kg = m/s^2$) pour représenter les forces extérieures à distance. On dit dans la plupart des applications sous l'effet de la pesanteur, que les forces volumiques sont constantes, alors que ce sont les forces massiques qui le sont. Là encore, cette approximation revient à dire que la dilatation volumique est approximée à 1.

Cette équation différentielle vectorielle n'est qu'une autre écriture de l'équation d'équilibre, mais pour un solide élastique à loi linéaire isotrope en petites déformations. Les inconnues de cette équation sont les déplacements.

2.4.2 Théorème de l'énergie cinétique

En mécanique des milieux continus, on a énoncé le théorème de la *puissance cinétique* :
La dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique est égale à la somme de la puissance mécanique des efforts intérieurs et de la puissance mécanique des efforts extérieurs.

$$\frac{DE_c}{Dt} = \mathcal{P}_{mec\ ext} + \mathcal{P}_{mec\ int}$$

Comme on ne s'intéresse qu'aux deux états initial et final, on l'intègre entre t_0 et t . Il devient le théorème de l'énergie cinétique:

$$E_c - E_{c0} = [\mathcal{W}_{ext}]_{t_0}^t + [\mathcal{W}_{mec\ int}]_{t_0}^t$$

où :

E_c est l'énergie cinétique finale,

E_{c0} est l'énergie cinétique initiale,

$[\mathcal{W}_{ext}]_{t_0}^t = \int_{t_0}^t \mathcal{P}_{mec\ ext} dt$ est le travail des efforts extérieurs entre les instants t_0 et t ,

$[\mathcal{W}_{mec\ int}]_{t_0}^t = \int_{t_0}^t \mathcal{P}_{mec\ int} dt$ est le travail des efforts intérieurs entre les instants t_0 et t .

Or, l'état initial et l'état final sont des états d'équilibre. Leurs énergies cinétiques sont nulles. Le théorème devient donc

$$0 = [\mathcal{W}_{ext}]_{t_0}^t + [\mathcal{W}_{mec\ int}]_{t_0}^t$$

Entre deux états d'équilibre, la somme du travail des forces intérieures et du travail des forces extérieures est nulle.

Expression du travail des efforts extérieurs :

Le travail des efforts extérieurs entre les instants t_0 et t est l'intégrale de la puissance des efforts extérieurs entre ces deux instants :

$$\begin{aligned} [\mathcal{W}_{ext}]_{t_0}^t &= \int_{t_0}^t \left(\int_{\partial\Omega_t} \mathbf{V} \otimes \overline{\boldsymbol{\sigma}} \otimes \overline{\mathbf{n}} ds + \int_{\Omega_t} \mathbf{V} \otimes \overline{\mathbf{f}}_v dv \right) dt \\ &\simeq \int_{t_0}^t \left(\int_{\partial\Omega_0} \mathbf{V} \otimes \overline{\boldsymbol{\sigma}} \otimes \overline{\mathbf{n}} ds + \int_{\Omega_0} \mathbf{V} \otimes \overline{\mathbf{f}}_v dv \right) dt \quad (\text{HPP} \Rightarrow \Omega_t \simeq \Omega_0) \\ &\simeq \int_{\partial\Omega_0} \int_{t_0}^t \mathbf{V} \otimes \overline{\boldsymbol{\sigma}} \otimes \overline{\mathbf{n}} dt ds + \int_{\Omega_0} \int_{t_0}^t \mathbf{V} \otimes \overline{\mathbf{f}}_v dt dv \quad (\Omega_0 \text{ est fixe}) \end{aligned}$$

Le premier terme est le *travail des efforts extérieurs de surface* entre les instants t_0 et t ,

et le second terme est le *travail des efforts extérieurs de volume* entre les instants t_0 et t .

Si on considère les forces de volume comme constantes pendant le mouvement¹³, on peut simplifier le travail des efforts extérieurs de volume :

$$\int_{\Omega_0} \left(\int_{t_0}^t \mathbf{V} \otimes \overline{\mathbf{f}}_v dt \right) dv = \int_{\Omega_0} \left(\int_{t_0}^t \mathbf{V} dt \right) \otimes \overline{\mathbf{f}}_v dv = \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\xi} \otimes \overline{\mathbf{f}}_v dv$$

On ne peut pas faire la même simplification pour les efforts de surface, car le produit $\boldsymbol{\sigma} \otimes \overline{\mathbf{n}}$ n'est jamais constant pendant le mouvement.

^{13.} voir note 12

Expression du travail des efforts intérieurs :

De même, le travail des efforts intérieurs entre les instants t_0 et t est l'intégrale de t_0 à t de la puissance des efforts intérieurs entre ces deux instants :

$$\begin{aligned} [\mathcal{W}_{mec\ int}]_{t_0}^t &= - \int_{t_0}^t \int_{\partial\Omega_t} \boldsymbol{\sigma} \overline{\otimes} \mathbf{D} \, dv \, dt \\ &\simeq - \int_{t_0}^t \int_{\partial\Omega_0} \boldsymbol{\sigma} \overline{\otimes} \mathbf{D} \, dv \, dt \\ &\simeq - \int_{\partial\Omega_0} \int_{t_0}^t \boldsymbol{\sigma} \overline{\otimes} \mathbf{D} \, dt \, dv \end{aligned}$$

En utilisant la loi de comportement *sans dilatation*, le terme $\boldsymbol{\sigma} \overline{\otimes} \mathbf{D}$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \overline{\otimes} \mathbf{D} &= \frac{E}{1+\nu} \boldsymbol{\epsilon} \overline{\otimes} \mathbf{D} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{Tr}\boldsymbol{\epsilon} \overline{\otimes} \mathbf{D} \\ &= \frac{E}{1+\nu} \boldsymbol{\epsilon} \overline{\otimes} \frac{D}{Dt} \boldsymbol{\epsilon} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{Tr}\boldsymbol{\epsilon} \frac{D}{Dt} \text{Tr}\boldsymbol{\epsilon} \\ &= \frac{D}{Dt} \left(\frac{E}{2(1+\nu)} \boldsymbol{\epsilon} \overline{\otimes} \boldsymbol{\epsilon} + \frac{E\nu}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \text{Tr}\boldsymbol{\epsilon} \text{Tr}\boldsymbol{\epsilon} \right) \\ &= \frac{D}{Dt} \left(\left(\frac{E}{2(1+\nu)} \boldsymbol{\epsilon} + \frac{E\nu}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \text{Tr}\boldsymbol{\epsilon} \mathbf{G} \right) \overline{\otimes} \boldsymbol{\epsilon} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{D}{Dt} \left(\frac{E}{1+\nu} \left(\boldsymbol{\epsilon} + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{Tr}\boldsymbol{\epsilon} \mathbf{G} \right) \right) \end{aligned}$$

finalement :

$$\boldsymbol{\sigma} \overline{\otimes} \mathbf{D} = \frac{1}{2} \frac{D}{Dt} \left(\boldsymbol{\sigma} \overline{\otimes} \boldsymbol{\epsilon} \right)$$

Dans ces conditions (c'est à dire en HPP et en l'absence de chargement thermique), le travail des efforts intérieurs entre les instants t_0 et t est :

$$\boxed{[\mathcal{W}_{mec\ int}]_{t_0}^t = \int_{\mathcal{D}_0} -\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \overline{\otimes} \boldsymbol{\epsilon} \, dv} \quad (2.5)$$

On peut alors définir un *travail volumique des efforts intérieurs* entre les instants t_0 et t

$$\boxed{[\mathcal{W}_{mec\ int/vol}]_{t_0}^t = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \overline{\otimes} \boldsymbol{\epsilon}}$$

2.5 Premier principe de la thermodynamique

Le premier principe de la thermodynamique postule la conservation de l'énergie. Pour une transformation infinitésimale d'un domaine élastique fini, elle s'écrit :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{dE_c}{dt} + \frac{dU}{dt} = \mathcal{P}_{mec\ ext} + \mathcal{P}_{cal\ ext}$$

Pour une transformation finie entre deux états d'équilibre (les énergies cinétiques initiale et finale sont donc nulles), il devient :

$$U_t - U_{t_0} = [\mathcal{W}_{ext}]_{t_0}^t + [\mathcal{Q}_{ext}]_{t_0}^t$$

où $[\mathcal{W}_{ext}]_{t_0}^t$ est le travail mécanique reçu de l'extérieur pendant la transformation entre l'état initial t_0 et l'état final t ,

et $[\mathcal{Q}_{ext}]_{t_0}^t$ est la chaleur reçue de l'extérieur pendant la transformation entre l'état initial t_0 et l'état final t .

En utilisant le théorème de l'énergie cinétique :

$$U_t - U_{t_0} = [\mathcal{W}_{mec ext}]_{t_0}^t + [\mathcal{Q}_{cal ext}]_{t_0}^t = -[\mathcal{W}_{mec int}]_{t_0}^t + [\mathcal{Q}_{cal ext}]_{t_0}^t$$

Dans le cas d'une évolution isotherme, $\mathcal{Q}_{cal ext} = 0$ et $\mathcal{W}_{mec int}$ est donné par (2.5) page 15. Le premier principe devient :

$$U_t - U_{t_0} = \int_{\mathcal{D}_0} \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \overline{\otimes} \boldsymbol{\epsilon} dv$$

Dans ce cas, l'énergie interne U change de nom : on l'appelle *potentiel élastique* ou encore *énergie de déformation*.

Il est d'usage de définir le zéro de l'énergie interne à l'état initial : $U_{t_0} = 0$. Dans la suite, les travaux sont sous entendus entre l'instant initial t_0 et l'instant final t . On notera donc plus simplement :

$$U = \mathcal{W}_{mec ext} = -\mathcal{W}_{mec int} = \int_{\mathcal{D}_0} \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \overline{\otimes} \boldsymbol{\epsilon} dv$$

et on définit l'énergie de déformation (isotherme) par unité de volume :

$$u_v = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \overline{\otimes} \boldsymbol{\epsilon} \quad (2.6)$$

Conséquences :

Considérons une déformation isotherme ($\mathcal{Q}_{ext} = 0$) à partir de l'état initial. À l'état initial, l'énergie interne est nulle et est à son minimum¹⁴. dans une telle évolution, la variation d'énergie interne ne peut être que positive. On en déduit que

$$\int_{\mathcal{D}_0} \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \overline{\otimes} \boldsymbol{\epsilon} dv > 0 \quad \forall \mathcal{D}_0$$

Cette inégalité étant vraie pour tout domaine \mathcal{D}_0 , on en déduit que

$$\boldsymbol{\sigma} \overline{\otimes} \boldsymbol{\epsilon} > 0$$

Cette inégalité doit être vraie pour toute transformation.

En particulier, le lecteur pourra montrer facilement que

- si $\boldsymbol{\sigma}$ est un tenseur uniaxial $\boldsymbol{\sigma} = \sigma \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$; $\sigma \in \mathbb{R}$ (essai de traction, voir (2.3) et (2.4) page 12), alors

$$\boldsymbol{\sigma} \overline{\otimes} \boldsymbol{\epsilon} = \frac{\sigma^2}{E} \geq 0 \Rightarrow E \geq 0$$

Le module d'Young E est donc nécessairement positif.

- si $\boldsymbol{\sigma}$ est un tenseur sphérique $\boldsymbol{\sigma} = \sigma \mathbf{G}$; $\sigma \in \mathbb{R}$ (compression ou traction sphérique), alors

$$\boldsymbol{\sigma} \overline{\otimes} \boldsymbol{\epsilon} = 3 \sigma^2 \frac{1 - 2\nu}{E} \geq 0 \Rightarrow \nu \leq \frac{1}{2}$$

14. On admet qu'un corps élastique ne peut fournir de l'énergie au milieu extérieur quand il est à son état naturel.

Le coefficient de Poisson est inférieur à $\frac{1}{2}$.

Le cas $\nu = \frac{1}{2}$ est un cas limite: L'énergie de déformation est nulle pour toute contrainte sphérique. Dans ce cas on a donc nécessairement $\text{Tr}\epsilon = 0$. Le milieu est incompressible. On retrouve ce résultat avec la loi de comportement $\sigma = \frac{E}{1+\nu} \left(\epsilon + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{Tr}\epsilon \mathbf{G} \right)$. Si $\nu = \frac{1}{2}$, il faut que $\text{Tr}\epsilon = 0$ pour que la contrainte soit finie, c'est à dire que la dilatation volumique relative soit nulle. Le tenseur des contraintes est alors $\sigma = \frac{E}{1+\nu} (\epsilon + K \mathbf{G})$, où K est indéterminé et ϵ est un déviateur.

Dans un milieu élastique linéaire incompressible ($\nu = \frac{1}{2}$), le tenseur des contraintes n'est défini qu'à un tenseur sphérique près.

– si σ est de diagonale nulle (essai de cisaillement ou de torsion), alors

$$\sigma \otimes \epsilon = \frac{\|(1+\nu)\sigma\|^2}{E} \geq 0 \Rightarrow \nu \geq -1$$

En fait, l'expérience montre que ν est toujours positif. On a donc

$$0 \leq \nu \leq \frac{1}{2}$$

2.6 Second principe de la thermodynamique

Les variables d'état d'un milieu thermoélastique classique sont la petite déformation ϵ et la température T . On a donc :

$$u = u(\epsilon, T) \text{ et } s = s(\epsilon, T)$$

Les dérivées particulières des fonctions d'état u et s sont donc :

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial \epsilon} \otimes \frac{D\epsilon}{Dt} + \frac{\partial u}{\partial T} \frac{DT}{Dt} \text{ et } \frac{Ds}{Dt} = \frac{\partial s}{\partial \epsilon} \frac{D\epsilon}{Dt} + \frac{\partial s}{\partial T} \frac{DT}{Dt} \quad (2.7)$$

Note : La dérivée de la fonction scalaire u (ou s) par rapport au tenseur du second ordre ϵ est le tenseur du second ordre dont les composantes dans une base fixe¹⁵ sont :

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \epsilon} \right]^{ij} = \frac{\partial u}{\partial \epsilon_{ij}}$$

On a vu en mécanique des milieux continus que le second principe s'écrit :

$$\begin{aligned} \Phi_{th} &= -\frac{\mathbf{q}}{T} \otimes \mathbf{grad}T \geq 0 \\ \Phi_{int} &= \rho \left(T \frac{Ds}{Dt} - \frac{Du}{Dt} \right) + \sigma \otimes \mathbf{D} \geq 0 \end{aligned}$$

La positivité de la dissipation thermique Φ_{th} est assurée par une loi de conduction thermique adéquate : par exemple la loi de Fourier $\mathbf{q} = -k \mathbf{grad}T$ où $k > 0$ est le *coefficient de conductibilité thermique*.

En élasticité, les transformations adiabatiques isothermes doivent être réversibles, donc isentropiques. On a donc :

$$\frac{\partial s}{\partial \epsilon} = 0$$

15. qu'on peut prendre orthonormée pour éliminer les variances

et la dissipation intrinsèque doit être nulle pour toute transformation infinitésimale :

$$\rho \left(T \frac{Ds}{Dt} - \frac{Du}{Dt} \right) + \boldsymbol{\sigma} \overline{\otimes} \mathbf{D} = 0$$

En HPP, en utilisant (2.2) page 11, et en utilisant (2.7), la dissipation intrinsèque s'écrit :

$$\begin{aligned} -\rho \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \overline{\otimes} \frac{D\boldsymbol{\epsilon}}{Dt} + \rho \left(T \frac{\partial s}{\partial T} - \frac{\partial u}{\partial T} \right) \frac{DT}{Dt} + \boldsymbol{\sigma} \overline{\otimes} \frac{D\boldsymbol{\epsilon}}{Dt} &= 0 \\ \left(\boldsymbol{\sigma} - \rho \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \right) \overline{\otimes} \frac{D\boldsymbol{\epsilon}}{Dt} + \rho \left(T \frac{\partial s}{\partial T} - \frac{\partial u}{\partial T} \right) \frac{DT}{Dt} &= 0 \end{aligned}$$

pour toute évolution infinitésimale, c'est à dire $\forall \frac{D\boldsymbol{\epsilon}}{Dt}$ et $\forall \frac{DT}{Dt}$. On en déduit les deux égalités :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \rho \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \simeq \rho_0 \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \\ \frac{\partial u}{\partial T} &= T \frac{\partial s}{\partial T} \end{aligned}$$

2.7 Equations de compatibilité

On a montré en mécanique des milieux continus, que pour qu'un tenseur symétrique puisse être un tenseur de petites déformations, il doit nécessairement vérifier la relation tensorielle :

$$\boxed{\text{grad div } \boldsymbol{\epsilon} + \text{grad}^t \text{div } \boldsymbol{\epsilon} - \text{grad grad Tr } \boldsymbol{\epsilon} - \Delta \boldsymbol{\epsilon} = 0}$$

En utilisant la loi de comportement, on obtient une condition sur les composantes du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$. Le lecteur pourra montrer qu'on obtient :

$$\boxed{\begin{aligned} \text{grad } \mathbf{f}_v + \text{grad}^t \mathbf{f}_v + \Delta \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{1+\nu} \text{grad grad Tr } \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{1+\nu} (\Delta \text{Tr } \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{G} + \\ \frac{\alpha E}{1+\nu} (\text{grad grad } (T - T_0) + (\Delta (T - T_0)) \mathbf{G}) = 0 \end{aligned}} \quad (2.8)$$

Sous cette forme, les conditions de compatibilité s'appellent les *équations de Beltrami*.

Il est à noter que si \mathbf{f}_v est constant dans l'espace¹⁶ ou nul, les termes $\text{grad } \mathbf{f}_v$ et $\text{grad}^t \mathbf{f}_v$ disparaissent¹⁷.

2.8 Représentation des tenseurs du second ordre

On peut représenter géométriquement les tenseurs du second ordre de différentes manières. Ces représentations sont principalement utilisées pour le tenseur des contraintes, mais elles sont applicables à tout tenseur du second ordre symétrique.

¹⁶. voir note 12

¹⁷. On a aussi $\Delta \boldsymbol{\sigma} = \text{grad div } \boldsymbol{\sigma} - \text{rot rot } \boldsymbol{\sigma} = -\text{grad } \mathbf{f}_v - \text{rot rot } \boldsymbol{\sigma}$. Si \mathbf{f}_v est constant ou nul, il vient $\Delta \boldsymbol{\sigma} = -\text{rot rot } \boldsymbol{\sigma}$

2.8.1 Tricercle de Mohr

Il s'agit d'une représentation incomplète, mais très maniable des tenseurs. Soit σ un tenseur symétrique, dont les composantes dans une *base principale orthonormée* sont :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Soit \mathbf{n} une direction unitaire. Dans cette base, les composantes sont :

$$[n] = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad (n_1)^2 + (n_2)^2 + (n_3)^2 = 1$$

Soit $\mathbf{T} = \sigma \otimes \mathbf{n}$ la contrainte sur une facette de direction \mathbf{n} . Les composantes de $\sigma \otimes \mathbf{n}$ dans la

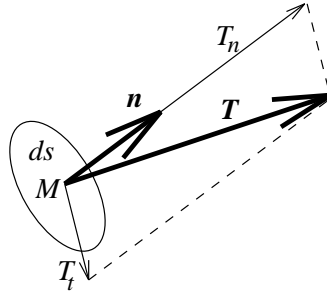


FIG. 2.1 – Contrainte normale et tangentielle sur une facette

base principale orthonormée sont :

$$[\sigma][n] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 n_1 \\ \sigma_2 n_2 \\ \sigma_3 n_3 \end{bmatrix}$$

Soit $T_n = \mathbf{n} \otimes \sigma \otimes \mathbf{n}$ la contrainte normale dans la direction \mathbf{n} .

$$T_n = \sigma_1 (n_1)^2 + \sigma_2 (n_2)^2 + \sigma_3 (n_3)^2$$

Soit $\mathbf{T}_t = \sigma \otimes \mathbf{n} - T_n \mathbf{n}$ la contrainte tangentielle dans la direction \mathbf{n} . On a :

$$\|\mathbf{T}_t\|^2 = \|\mathbf{T}\|^2 - (T_n)^2 = (\sigma_1)^2 (n_1)^2 + (\sigma_2)^2 (n_2)^2 + (\sigma_3)^2 (n_3)^2 - (T_n)^2$$

Supposons qu'on se donne un tenseur des contraintes σ , une contrainte normale T_n et une norme de contrainte tangentielle $\|\mathbf{T}_t\|$. On se propose de chercher les directions \mathbf{n} pour lesquelles ces contraintes sont possibles. Les trois nombres $\{n_1, n_2, n_3\}$ doivent être solution des 3 équations :

$$\begin{aligned} (n_1)^2 + (n_2)^2 + (n_3)^2 &= 1 \\ T_n &= \sigma_1 (n_1)^2 + \sigma_2 (n_2)^2 + \sigma_3 (n_3)^2 \\ \|\mathbf{T}_t\|^2 + (T_n)^2 &= (\sigma_1)^2 (n_1)^2 + (\sigma_2)^2 (n_2)^2 + (\sigma_3)^2 (n_3)^2 \end{aligned}$$

dont la solution est :

$$\begin{aligned} (n_1)^2 &= \frac{\|\mathbf{T}_t\|^2 + (T_n - \sigma_2)(T_n - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} \\ (n_2)^2 &= \frac{\|\mathbf{T}_t\|^2 + (T_n - \sigma_3)(T_n - \sigma_1)}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)} \\ (n_3)^2 &= \frac{\|\mathbf{T}_t\|^2 + (T_n - \sigma_1)(T_n - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)} \end{aligned}$$

En supposant que $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, une telle solution n'est possible que si

$$\begin{aligned} \|\mathbf{T}_t\|^2 + (T_n - \sigma_2)(T_n - \sigma_3) &\geq 0 \\ \|\mathbf{T}_t\|^2 + (T_n - \sigma_3)(T_n - \sigma_1) &\leq 0 \\ \|\mathbf{T}_t\|^2 + (T_n - \sigma_1)(T_n - \sigma_2) &\geq 0 \end{aligned}$$

Ces inégalités s'interprètent géométriquement dans le demi-plan $(T_n, T_t \geq 0)$: Le point (T_n, T_t) doit se trouver dans la zone délimitée par les trois cercles de la figure 2.2. On voit que pour un

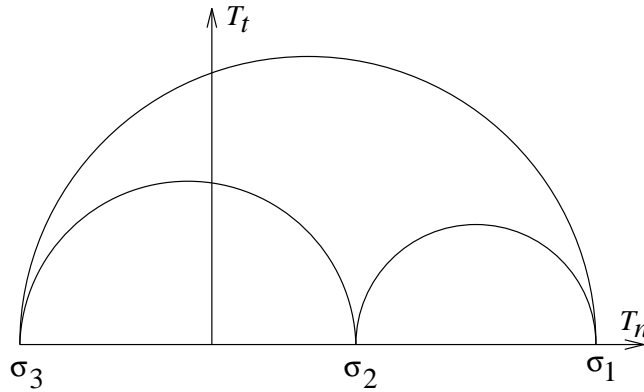


FIG. 2.2 – Tricercale de Mohr

tenseur des contraintes en un point σ donné (c'est à dire $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ donnés), pour toutes les directions \mathbf{n} autour de ce point, la contrainte normale T_n et la contrainte tangentielle \mathbf{T}_t ne être quelconques : le point (T_n, T_t) doit se trouver dans le tricercale de Mohr.

2.8.2 Représentation octaédrique

Tout tenseur symétrique du second ordre dans $\mathcal{E}_3 \otimes \mathcal{E}_3$ ayant trois valeurs propres réelles, on peut le représenter par un point de composantes $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ dans un espace tridimensionnel¹⁸. Dans cette représentation, les tenseurs sont représentés par un point (voir figure 2.3). Notamment, les

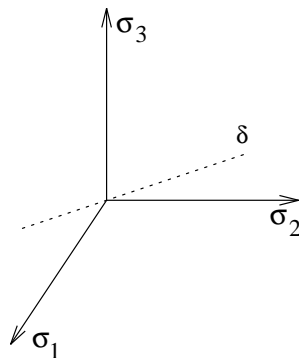


FIG. 2.3 – Représentation octaédrique des tenseurs

tenseurs sphériques ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$) sont tous représentés sur la trissectrice δ . On l'appelle la *droite octaédrique*.

18. Cet espace n'a rien de physique.

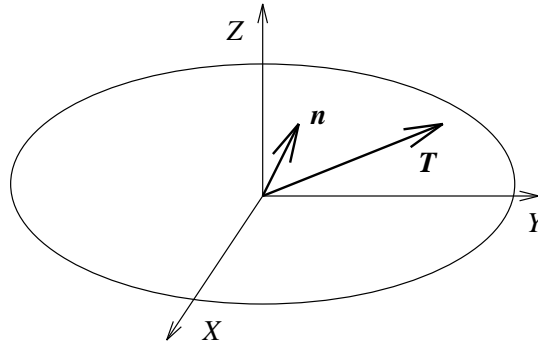


FIG. 2.4 – L'ellipsoïde de Lamé

2.8.3 Ellipsoïde de Lamé

A chaque direction \mathbf{n} le tenseur des contraintes associe la contrainte $\mathbf{T} = \boldsymbol{\sigma} \overline{\mathbf{n}}$. L'ellipsoïde de Lamé est l'ensemble des points M tels que $\mathbf{OM} = \mathbf{T}$ lorsque \mathbf{n} prend toutes les directions (voir figure 2.4).

On se place dans une base principale orthonormée de $\boldsymbol{\sigma}$ et on note $\{T_1, T_2, T_3\}$ les composantes de M et $\{n_1, n_2, n_3\}$ les composantes de \mathbf{n} dans cette base.

$$T_1 = \sigma_1 n_1 \ ; \ T_2 = \sigma_2 n_2 \ ; \ T_3 = \sigma_3 n_3$$

\mathbf{n} étant unitaire :

$$1 = (n_1)^2 + (n_2)^2 + (n_3)^2$$

Les points M , extrémités des contraintes \mathbf{T} sont donc soumis à la relation :

$$\frac{T_1^2}{(\sigma_1)^2} + \frac{T_2^2}{(\sigma_2)^2} + \frac{T_3^2}{(\sigma_3)^2} = 1$$

ce qui est l'équation d'un ellipsoïde.

L'ellipsoïde de Lamé est donc l'ensemble des extrémités des vecteurs contraintes $\mathbf{T} = \boldsymbol{\sigma} \overline{\mathbf{n}}$ lorsque \mathbf{n} prend toutes les directions.

Chapitre 3

Le problème élastique

3.1 Elasticité tridimensionnelle

Le problème élastique tridimensionnel peut se formuler ainsi :

On se donne un corps élastique dont la configuration Ω_0 à l'instant t_0 est connue. On se donne un chargement comportant :

- des forces volumiques \mathbf{f}_v (N/m^3) s'exerçant sur les particules du corps,
- des forces surfaciques \mathbf{F} (N/m^2), éventuellement nulles, s'exerçant sur certaines parties de sa frontière,
- un champ de variation de température $(T - T_0)$ sur tout le corps¹,
- certaines parties de la frontière ont des déplacements imposés (éventuellement imposés nuls²).

Trouver le champ des déplacements $\boldsymbol{\xi}(M)$ (3 fonctions inconnues), le champ de tenseur des petites déformations $\boldsymbol{\epsilon}(M)$ (6 fonctions inconnues) et le champ du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}(M)$ (6 fonctions inconnues) engendrés par le chargement, respectant les équations générales suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mathbf{div}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_v \quad (\text{Équation d'équilibre, 3 équations différentielles scalaires}) \\ \boldsymbol{\sigma} &= \frac{E}{1+\nu} \left(\boldsymbol{\epsilon} + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{Tr}\boldsymbol{\epsilon} \mathbf{G} \right) - \frac{E}{1-2\nu} \alpha(T - T_0) \mathbf{G} \quad (\text{Lois de comportement, 6 équations}) \\ \boldsymbol{\epsilon} &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{grad}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{grad}^T \boldsymbol{\xi} \right) \quad (\text{Petites déformations, 6 équations différentielles scalaires}) \end{aligned}$$

Les équations ci-dessus sont valables *pour tous les problèmes d'élasticité* et en tout point du corps élastique. Dans ces équations, seules les forces volumiques interviennent. Le reste du chargement (forces exercées sur les frontières et déplacements imposés sur les frontières) n'intervient que dans les conditions aux limites. La forme du domaine étudié n'intervient pas dans ces équations.

1. *A priori*, on peut se donner un champ de variations de températures quelconque, mais la plupart du temps, on se donnera un champ de variations de températures stationnaire ($\Delta T = 0$), généralement issu d'un calcul thermique préalable. En HPP, ce calcul peut être fait sur la configuration initiale : on cherche le champ de températures qui s'établit dans le corps avec des conditions aux limites de températures imposées ou des flux de chaleur imposés aux frontières.

2. Les déplacements imposés nuls sont souvent appelés *liaisons*.

Le problème à résoudre est précisé par les conditions aux limites portant sur la frontière $\partial\mathcal{D}^3$, en précisant le reste du chargement qui s'y exerce :

- Les efforts imposés (éventuellement nuls⁴) sur la frontière. On appelle $\partial\mathcal{D}_f$ la partie de $\partial\mathcal{D}$ soumise à des efforts surfaciques et \mathbf{n} sa normale extérieure. La condition aux limites sur $\partial\mathcal{D}_f$ est :

$$\boldsymbol{\sigma}(N) \otimes \bar{\mathbf{n}}(N) = \mathbf{F}(N) \quad \forall N \in \partial\mathcal{D}_f$$

- Les déplacements imposés (éventuellement nuls⁵). On appelle $\partial\mathcal{D}_d$ la partie de $\partial\mathcal{D}$ soumise à des déplacements imposés. La condition aux limites sur $\partial\mathcal{D}_d$ est :

$$\boldsymbol{\xi}(N) = \mathbf{d}(N) \quad \forall N \in \partial\mathcal{D}_d$$

En principe, $\partial\mathcal{D}_f \cup \partial\mathcal{D}_d = \partial\mathcal{D}$ et $\partial\mathcal{D}_f \cap \partial\mathcal{D}_d = \emptyset$, c'est à dire qu'il faut une condition aux limites d'un type ou d'un autre en chaque point de la frontière pour que la solution soit complètement déterminée⁶.

Le nombre d'équations et de fonctions inconnues (15) peut être réduit par l'élimination de certaines inconnues, ce qui aboutit aux deux formulations classiques suivantes :

3.1.1 Formulation en déplacement

En éliminant $\boldsymbol{\sigma}$ avec la loi de comportement et en éliminant $\boldsymbol{\epsilon}$ avec sa définition en fonction de $\boldsymbol{\xi}$ dans les équations d'équilibre, on obtient les équations de *Navier* dont la seule inconnue est le champ de déplacement :

$$\frac{E}{2(1+\nu)} \Delta \boldsymbol{\xi} + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \mathbf{grad}(\operatorname{div} \boldsymbol{\xi}) + \mathbf{f}_v - \frac{E\alpha}{1-2\nu} \mathbf{grad}(T - T_0) = \mathbf{0}$$

(3 équations différentielles et 3 fonctions inconnues $\boldsymbol{\xi}$)

Les conditions aux limites doivent s'exprimer sur les fonctions inconnues $\boldsymbol{\xi}$:

- Les déplacements imposés sur $\partial\mathcal{D}_d$ s'expriment naturellement sur $\boldsymbol{\xi}$:

$$\boldsymbol{\xi}(N) = \mathbf{d} \quad \forall N \in \partial\mathcal{D}_d$$

- Les efforts imposés sur $\partial\mathcal{D}_f$ sont sous une forme plus complexe (la condition $\boldsymbol{\sigma} \otimes \bar{\mathbf{n}} = \mathbf{F}$ doit être exprimée en conditions sur les déplacements) :

$$\left[\frac{E}{1+\nu} \left(\frac{1}{2} (\mathbf{grad} \boldsymbol{\xi} + \mathbf{grad}^t \boldsymbol{\xi}) + \frac{\nu \operatorname{Tr} \mathbf{grad} \boldsymbol{\xi}}{1-2\nu} \mathbf{G} \right) - \frac{E\alpha(T - T_0)}{1-2\nu} \mathbf{G} \right] \otimes \bar{\mathbf{n}} = \mathbf{F} \quad \forall N \in \partial\mathcal{D}_f$$

Elles portent sur les valeurs des dérivées premières de $\boldsymbol{\xi}$ sur la frontière $\partial\mathcal{D}_f$.

3. C'est donc seulement dans les conditions aux limites qu'on prend en compte la forme du domaine.
 4. Préciser que les efforts sont nuls sur une partie de la frontière n'est pas anodin. Cela impose des conditions au tenseur des contraintes sur cette partie de frontière: on doit avoir $\boldsymbol{\sigma} \otimes \bar{\mathbf{n}} = \mathbf{0}$ sur la frontière. Cette condition aux limites est parfois appelée *condition de bord libre*.
 5. Dans ce cas on les appelle souvent *liaisons avec le milieu extérieur*.
 6. Sauf si on fait des hypothèses *a priori* sur la solution cherchée (comme dans la plupart des problèmes académiques): dans ce cas, les hypothèses posées contraignent la solution à une certaine forme, et il se peut que certaines conditions aux limites se trouvent imposées par les hypothèses faites. On ne peut donc plus donner des conditions aux limites arbitraires, il faut qu'elles soient compatibles avec les hypothèses posées, ce qui n'est pas toujours évident. Soit les conditions aux limites posées sont compatibles avec les hypothèses posées, et alors elle sont identiquement vérifiées, soit elles ne sont pas compatibles et il n'y a pas de solution sous les hypothèses posées.

En pratique, on ne les écrit pas sous cette forme. Comme dans tout système d'équations aux dérivées partielles, la solution générale ξ des équations de Navier contient en général des fonctions indéterminées et des constantes d'intégration. Une partie de ces indéterminées est résolue par les conditions aux limites en déplacement. On calcule alors ϵ puis σ . Les conditions aux limites en effort déterminent les indéterminées qui restent.

3.1.2 Formulation en contrainte

On choisit de chercher d'abord le tenseur des contraintes σ . L'équation différentielle est

$$\operatorname{div} \sigma + \mathbf{f}_v = 0$$

(3 équations et 6 inconnues). La solution générale de ce système d'équations comporte donc en général des fonctions indéterminées.

Cependant, pour que le tenseur ϵ déduit de σ soit intégrable⁷, il faut qu'il respecte les conditions de compatibilité. On doit donc adjoindre aux équations précédentes les équations de Beltrami données en (2.8) page 18.

Les conditions aux limites doivent s'exprimer en fonction des contraintes :

- Les efforts imposés sur ∂D_f s'expriment naturellement en fonction des contraintes :

$$\sigma(N) \otimes \bar{\mathbf{n}}(N) = \mathbf{F}(N) \quad \forall N \in \partial D_f$$

- Les déplacements imposés sur ∂D_d ne s'expriment pas simplement en fonction de σ . Une fois résolu en σ le système différentiel constitué des équations d'équilibre et des conditions de Beltrami, on trouve une partie des indéterminées avec les conditions aux limites en efforts, puis on calcule ϵ puis ξ ⁸. On peut alors déterminer les indéterminées qui restent avec les conditions aux limites en déplacement.

3.1.3 Théorème de superposition

Soit un corps élastique \mathcal{D} et soient ∂D_f et ∂D_d les parties de la frontière $\partial \mathcal{D}$ sur lesquelles on exerce respectivement les conditions aux limites d'efforts imposés $\mathbf{F}(N)$ et les conditions aux limites de déplacements imposés $\mathbf{d}(N)$ où N est un point courant de la frontière.

Soit \mathcal{P}_1 un problème sur le corps \mathcal{D} avec les données \mathbf{f}_{v1} , \mathbf{F}_1 , \mathbf{d}_1 , dont la solution est σ_1 , ϵ_1 , ξ_1 . Soit \mathcal{P}_2 un problème sur le corps \mathcal{D} avec les données \mathbf{f}_{v2} , \mathbf{F}_2 , \mathbf{d}_2 , dont la solution est σ_2 , ϵ_2 , ξ_2 . Soit \mathcal{P} un problème sur le corps \mathcal{D} avec les données :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_v &= \alpha \mathbf{f}_{v1} + \beta \mathbf{f}_{v2} \\ \mathbf{F} &= \alpha \mathbf{F}_1 + \beta \mathbf{F}_2 \quad \text{sur } \mathcal{D}_f \\ \mathbf{d} &= \alpha \mathbf{d}_1 + \beta \mathbf{d}_2 \quad \text{sur } \mathcal{D}_d \end{aligned}$$

alors la solution de \mathcal{P} est :

$$\begin{aligned} \sigma &= \alpha \sigma_1 + \beta \sigma_2 \\ \epsilon &= \alpha \epsilon_1 + \beta \epsilon_2 \\ \xi &= \alpha \xi_1 + \beta \xi_2 \end{aligned}$$

7. c'est à dire qu'il soit la partie symétrique d'un gradient de vecteur.

8. L'intégration de ϵ pour obtenir ξ se fait par la méthode standard exposée dans le cours de mécanique des milieux continus. Elle introduit 6 nouvelles constantes d'intégration: en effet, ξ est toujours calculé à un champ de déplacement de solide près. Les 6 constantes représentent un champ de déplacement solide arbitraire: une petite rotation et une translation.

Ce théorème est la conséquence directe de la linéarité des équations différentielles de l'élasticité classique⁹. Il est très utile car on peut souvent considérer un problème avec un chargement complexe comme la superposition de chargements simples.

3.1.4 Techniques de résolution

Choix du système de coordonnées

On peut résoudre les problèmes d'élasticité dans n'importe quel système de coordonnées. Mais les conditions aux limites peuvent avoir une forme plus ou moins compliquée suivant ce choix. On est généralement guidé par la forme du corps élastique étudié. On choisit de préférence un système de coordonnées qui facilite l'écriture des conditions aux limites¹⁰. Pour les problèmes axisymétriques¹¹, on choisit toujours un système de coordonnées dont l'une des coordonnées est l'angle θ autour de l'axe d'axisymétrie¹².

On rappelle que les formules d'analyse du cours d'analyse tensorielle ont été établies sur la base naturelle du système de coordonnées et que celle-ci n'est généralement pas orthonormée. Pour que les composantes des résultats vectoriels et tensoriels aient une dimension physique cohérente, il convient de les exprimer ensuite sur une base normée.

Choix de la formulation

Dans certains problèmes, on peut faire des hypothèses *a priori* sur la solution recherchée. Selon que ces hypothèses portent sur les contraintes ou sur les déformations, on choisit la formulation correspondante.

Technique d'intégration

Sauf pour quelques problèmes académiques simples¹³, il est rarement possible de trouver la solution analytique d'un problème d'élasticité tridimensionnelle. On peut alors recourir à trois méthodes :

- Résoudre le problème avec des chargements plus simples et utiliser le théorème de superposition pour reconstruire le problème complet.
- Approcher la solution en simplifiant le problème, par l'introduction d'hypothèses simplificatrices¹⁴. L'une des hypothèses simplificatrices les plus courantes est de supposer que le problème est indépendant d'une des coordonnées¹⁵, on utilise alors les techniques de l'élasticité plane ou axisymétrique (voir les sections suivantes).
- Utiliser une méthode d'intégration numérique des équations différentielles (méthode des différences finies ou méthode des éléments finis). De telles méthodes ne fournissent que des résultats *numériques* et approchés. Il faut donc donner une valeur numérique à tous les paramètres avant de lancer la résolution. Pour étudier l'influence d'un paramètre¹⁶ sur la solution, il faut calculer la solution numérique pour différentes valeurs de ce paramètre.

9. On rappelle que la linéarité des équations différentielles et des conditions aux limites est due à l'hypothèse des petites perturbations.

10. c'est à dire qui facilite la définition de la forme des frontières. Par exemple, la surface latérale d'un cylindre plein est définie par $r = R$ en coordonnées cylindrique, et par $\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2} = R$ en coordonnées cartésiennes

11. Non seulement la forme du corps est axisymétrique, mais aussi le chargement et les conditions aux limites.

12. par exemple les coordonnées cylindriques, ou sphériques, ou géographiques ou tout autre faisant intervenir θ

13. dans lesquels on fait des hypothèses fortes (et donc souvent peu réalistes) qui n'ont pour but que de simplifier les calculs.

14. Le choix des hypothèses simplificatrices est toujours délicat. Elles sont souvent suggérées par les simplifications apportées par la suppression de termes "génants" dans les équations. Il faut toujours se demander si ces termes sont effectivement négligeables, sinon la solution trouvée est trop éloignée de la solution exacte du modèle. De plus, il peut arriver que certaines hypothèses posées *a priori* sur la solution recherchée soient incompatibles avec les équations; il n'y a alors pas de solution sous ces hypothèses.

15. ou même indépendant de deux coordonnées

16. par exemple un chargement ou une dimension

3.2 Elasticité plane isotherme

L'idée de départ est de supposer que la solution qu'on recherche ne varie pas dans une certaine direction \mathbf{k} , c'est à dire que si on se place dans des plans P perpendiculaires à \mathbf{k} , la solution est inchangée. La forme du corps est donc nécessairement un cylindre de génératrices parallèles à \mathbf{k} et de section droite de forme quelconque, mais constante dans les plans P . Le corps est donc défini par sa section droite et par la hauteur h du cylindre¹⁷.

Ainsi, la solution ne dépend plus que de deux variables : les coordonnées dans P . On prendra donc un système de coordonnées quelconque dans un plan P complété par la coordonnée cartésienne suivant un vecteur unitaire \mathbf{k} normal au plan.

On rappelle que la loi de comportement isotherme s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{1+\nu} \left(\boldsymbol{\epsilon} + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{Tr} \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{G} \right) \Leftrightarrow \boldsymbol{\epsilon} = \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{Tr} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{G}$$

Il existe deux manières de poser un problème d'élasticité plane :

- soit on fait l'hypothèse des contraintes planes,
- soit on fait l'hypothèse des déformations planes.

Ces deux hypothèses sont différentes et conduisent à des résultats différents.

3.2.1 Hypothèse des contraintes planes

On suppose que le champ des contraintes $\mathbf{C} = \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{n}$ est toujours parallèle au plan P pour tout \mathbf{n} et que $\boldsymbol{\sigma}$ n'est fonction que des coordonnées $\{x^1, x^2\}$ dans P ¹⁸.

Il est facile de voir que les composantes du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ dans toute base contenant \mathbf{k} comme troisième vecteur de base, sont nécessairement de la forme :

$$[\boldsymbol{\sigma}^{\bullet, \bullet}] = \begin{bmatrix} \sigma^1_1(x^1, x^2) & \sigma^1_2(x^1, x^2) & 0 \\ \sigma^2_1(x^1, x^2) & \sigma^2_2(x^1, x^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La loi de comportement conduit à un tenseur des petites déformations dont les composantes sont de la forme :

$$[\boldsymbol{\epsilon}_{\bullet, \bullet}] = \begin{bmatrix} \epsilon^1_1(x^1, x^2) & \epsilon^1_2(x^1, x^2) & 0 \\ \epsilon^2_1(x^1, x^2) & \epsilon^2_2(x^1, x^2) & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon^3_3(x^1, x^2) \end{bmatrix}$$

où

$$\epsilon^3_3 = -\frac{\nu}{E} \text{Tr} \boldsymbol{\sigma}$$

Ainsi, si on suppose que le tenseur des contraintes est plan et n'est fonction que de x^1 et x^2 , alors le tenseur des petites déformations est bien fonction aussi de x^1 et x^2 , mais il n'est pas plan.

Si on note $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$, $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$ et $\tilde{\mathbf{G}}$ les parties planes respectives de $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\epsilon}$ et \mathbf{G} (ce sont donc des tenseurs de $P \times P \rightarrow \mathbb{R}$), on a

$$\text{Tr} \boldsymbol{\sigma} = \text{Tr} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}$$

17. On verra que dans les deux cas idéaux classiques d'élasticité plane, h doit être soit très petit, soit très grand.
18. Le système de coordonnées dans P n'est pas nécessairement cartésien.

On peut alors écrire une loi de comportement réduite pour les contraintes planes :

$$\boxed{\tilde{\epsilon} = \frac{1+\nu}{E}\tilde{\sigma} - \frac{\nu}{E}\text{Tr}\tilde{\sigma}\tilde{\mathbf{G}} \quad \text{et} \quad \epsilon_3^3 = -\frac{\nu}{E}\text{Tr}\tilde{\sigma} = -\frac{\nu}{1-\nu}\text{Tr}\tilde{\epsilon}} \quad (3.1)$$

Le lecteur inversera facilement la loi¹⁹ :

$$\boxed{\tilde{\sigma} = \frac{E}{1+\nu}\left(\tilde{\epsilon} + \frac{\nu}{1-\nu}\text{Tr}\tilde{\epsilon}\tilde{\mathbf{G}}\right)}$$

Il faut remarquer que les équations d'équilibre $\text{div}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_v = \mathbf{0}$ entraînent que $\mathbf{f}_v \otimes \mathbf{k} = 0$. Dans l'hypothèse des contraintes planes, les forces de volume extérieures appliquées au solide doivent donc être parallèles au plan P . Les équations d'équilibre se réduisent donc à 2 équations scalaires :

$$\boxed{\text{div}\tilde{\sigma} + \mathbf{f}_v = \mathbf{0}}$$

car $\text{div}\tilde{\sigma}$ et \mathbf{f}_v sont des vecteurs du plan P .

La partie plane des équations de Beltrami (2.8) page 18 est :

$$\text{grad}\mathbf{f}_v + \text{grad}^T\mathbf{f}_v + \Delta\tilde{\sigma} + \frac{1}{1+\nu}\text{grad}\text{grad}\text{Tr}\tilde{\sigma} - \frac{\nu}{1+\nu}(\Delta\text{Tr}\tilde{\sigma})\tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{0}$$

et la partie non plane se réduit à la seule équation scalaire²⁰

$$\Delta\text{Tr}\tilde{\sigma} = 0$$

Finalement, les équations de Beltrami en contraintes planes sont :

$$\boxed{\text{grad}\mathbf{f}_v + \text{grad}^T\mathbf{f}_v + \Delta\tilde{\sigma} + \frac{1}{1+\nu}\text{grad}\text{grad}\text{Tr}\tilde{\sigma} = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \Delta\text{Tr}\tilde{\sigma} = 0} \quad (3.2)$$

Discussion :

L'hypothèse des contraintes planes est surtout utilisée pour modéliser des corps élastiques plans et minces (plaques) chargés dans leur plan.

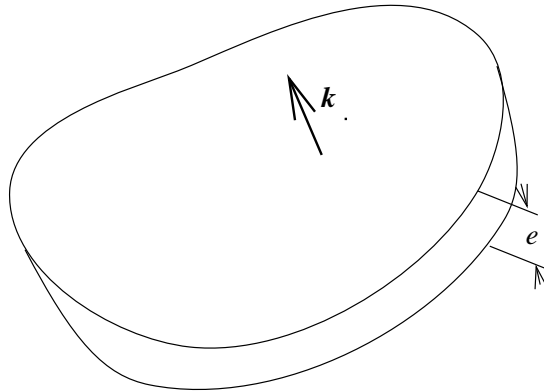


FIG. 3.1 – Cas d'application de l'hypothèse des contraintes planes.

19. suivant la méthode habituelle, mais attention: $\text{Tr}\tilde{\mathbf{G}} = 2$ alors que $\text{Tr}\mathbf{G} = 3$.

20. Le lecteur verra facilement que la seule équation non plane non identiquement vérifiée est le terme d'indice (3,3).

Pour de tels corps, traités en élasticité tridimensionnelle, la condition aux limites sur les surfaces supérieure et inférieure s'écrirait $\boldsymbol{\sigma} \otimes \bar{\mathbf{n}} = \mathbf{0}^{21}$, ce qui implique que *sur ces deux faces*, on a $\sigma^1_3 = \sigma^2_3 = \sigma^3_3 = 0$. Comme le corps est mince, il est raisonnable de supposer qu'il en est ainsi dans toute l'épaisseur. L'approximation des contraintes planes est donc acceptable pour les corps cylindriques de faible hauteur.

Les conditions aux limites ne peuvent donc porter que sur le contour dans le plan P . Les contraintes et/ou les déplacements imposés sur le contour doivent être dans le plan et invariants en x^3 .

3.2.2 Hypothèse des déformations planes

On suppose que le champ des déplacements $\boldsymbol{\xi}$ est toujours parallèle au plan P et que $\boldsymbol{\xi}$ n'est fonction que des coordonnées $\{x^1, x^2\}$ dans P .

Il est facile de voir que dans ce cas, les composantes du tenseur des petites déformations $\boldsymbol{\epsilon}$ dans toute base contenant \mathbf{k} comme troisième vecteur de base, sont nécessairement de la forme :

$$[\boldsymbol{\epsilon}^{\bullet, \bullet}] = \begin{bmatrix} \epsilon^1_1(x^1, x^2) & \epsilon^1_2(x^1, x^2) & 0 \\ \epsilon^2_1(x^1, x^2) & \epsilon^2_2(x^1, x^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les composantes du tenseur des contraintes dans la même base sont donc de la forme

$$[\boldsymbol{\sigma}^{\bullet, \bullet}] = \begin{bmatrix} \sigma^1_1(x^1, x^2) & \sigma^1_2(x^1, x^2) & 0 \\ \sigma^2_1(x^1, x^2) & \sigma^2_2(x^1, x^2) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^3_3(x^1, x^2) \end{bmatrix}$$

où

$$\sigma^3_3 = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{Tr}\boldsymbol{\epsilon}$$

Ainsi, si on suppose que le tenseur des petites déformations est plan et n'est fonction que de x^1 et x^2 , alors le tenseur des contraintes est bien aussi fonction de x^1 et x^2 , mais il n'est pas plan.

Si on note $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$, $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$ et $\tilde{\mathbf{G}}$ les parties planes respectives de $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\epsilon}$ et \mathbf{G} (ce sont donc des tenseurs de $P \times P \rightarrow \mathbb{R}$), on a

$$\text{Tr}\boldsymbol{\epsilon} = \text{Tr}\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$$

On peut alors écrire une loi de comportement réduite pour les déformations planes :

$$\boxed{\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{E}{1+\nu} \left(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}} + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{Tr}\tilde{\boldsymbol{\epsilon}} \tilde{\mathbf{G}} \right) \quad \text{et} \quad \sigma^3_3 = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{Tr}\tilde{\boldsymbol{\epsilon}} = \nu \text{Tr}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \quad (3.3)$$

Le lecteur inversera facilement la loi²² :

$$\boxed{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \left(\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \nu \text{Tr}\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \tilde{\mathbf{G}} \right)}$$

Les équations de Navier montrent que si les forces de volume existent, elles doivent être parallèles au plan P . Dans l'hypothèse des déformations planes, les équations d'équilibre se réduisent aux 2 équations scalaires :

$$\boxed{\text{div}\tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{f}_v = \mathbf{0}}$$

21. avec $\mathbf{n} = \pm \mathbf{k}$

22. voir note 19

car $\text{div} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ et \mathbf{f}_v sont des vecteurs du plan P .

Dans le cas des déformations planes, on a :

$$\text{Tr} \boldsymbol{\sigma} = \text{Tr} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \underbrace{\nu \text{Tr} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}}_{\sigma^3_s} = (1 + \nu) \text{Tr} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}$$

La partie plane des équations de Beltrami (2.8) page 18 est donc :

$$\text{grad} \mathbf{f}_v + \text{grad}^T \mathbf{f}_v + \Delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \text{grad} \text{grad} \text{Tr} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \nu (\Delta \text{Tr} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) \tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{0}$$

et la partie non plane se réduit à la seule équation scalaire²³ :

$$\Delta \text{Tr} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = 0$$

Finalement, les équations de Beltrami en déformations planes sont :

$$\boxed{\text{grad} \mathbf{f}_v + \text{grad}^T \mathbf{f}_v + \Delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \text{grad} \text{grad} \text{Tr} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{0} \text{ et } \Delta \text{Tr} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = 0} \quad (3.4)$$

Discussion :

L'hypothèse des déformations planes est surtout utilisée pour les corps élastiques cylindriques longs dans la direction \mathbf{k} , de section de forme quelconque mais constante suivant \mathbf{k} , chargés parallèlement au plan des sections de la même manière dans toutes les sections.

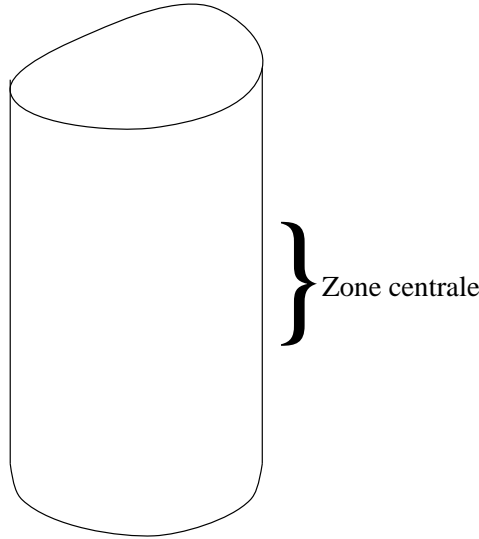


FIG. 3.2 – Cas d'application de l'hypothèse des déformations planes

On admet alors, que puisque le corps est long, les conditions aux limites sur les extrémités (pour $x^3 = \pm\infty$) ont peu d'influence sur les déplacements dans la zone centrale du cylindre. On peut donc penser qu'ils sont tous dans le plan de la section et indépendants de cette section. L'hypothèse des déformations planes est donc acceptable dans cette zone.

3.2.3 Fonction d'Airy

Que ce soit en contraintes planes ou en déformations planes, on voit que la résolution d'un problème d'élasticité plane se ramène à la détermination des parties planes $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ et $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$. Suivant les cas (de

²³. Le lecteur verra facilement que la seule équation non plane non identiquement vérifiée est le terme d'indice (3,3).

contraintes planes ou déformations planes), les parties non planes σ^3_3 et ϵ^3_3 sont soit nulles soit calculables en fonction des parties planes (voir (3.1) page 28 et (3.3) page 29).

On utilise la formulation en contraintes et on suppose que *les efforts extérieurs volumiques \mathbf{f}_v sont négligeables*. Les équations différentielles du problème sont donc l'équation d'équilibre :

$$\mathbf{div} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{0}$$

auxquelles on ajoute les équations de Beltrami pour les contraintes planes (3.2) page 28 ou pour les déformations planes (3.4) page 30 selon le cas.

Pour simplifier la démonstration, on suppose que le système de coordonnées dans P est cartésien orthonormé²⁴. x_1 et x_2 sont les coordonnées cartésiennes dans le plan P et x_3 la coordonnée perpendiculaire au plan. Les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\begin{aligned} \partial_1 \sigma^1_1 + \partial_2 \sigma^1_2 &= 0 \\ \partial_1 \sigma^2_1 + \partial_2 \sigma^2_2 &= 0 \end{aligned}$$

La première équation d'équilibre peut encore s'écrire : $\mathbf{rot} \begin{pmatrix} -\sigma^1_2 \\ \sigma^1_1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

Le vecteur de composantes $\begin{pmatrix} -\sigma^1_2 \\ \sigma^1_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est donc un gradient, et il existe un champ scalaire $\varphi(x_1, x_2)$

tel que $\mathbf{grad} \varphi = \begin{pmatrix} -\sigma^1_2 \\ \sigma^1_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, c'est à dire que σ^1_2 et σ^1_1 peuvent s'écrire sous la forme :

$$\sigma^1_2 = -\partial_1 \varphi ; \quad \sigma^1_1 = \partial_2 \varphi$$

De même, la seconde équation d'équilibre peut encore s'écrire : $\mathbf{rot} \begin{pmatrix} -\sigma^2_1 \\ \sigma^2_2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

On en déduit de la même manière l'existence d'un champ scalaire $\psi(x_1, x_2)$ tel que

$$\sigma^2_2 = -\partial_1 \psi ; \quad \sigma^2_1 = \partial_2 \psi$$

Le tenseur des contraintes étant symétrique,

$$\sigma^1_2 = \sigma^2_1 \Rightarrow \partial_1 \varphi + \partial_2 \psi = 0 \Leftrightarrow \mathbf{rot} \begin{pmatrix} -\psi \\ \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Il existe donc un champ scalaire $\chi(x_1, x_2)$ tel que :

$$\psi = -\partial_1 \chi ; \quad \varphi = \partial_2 \chi$$

Ainsi, les équations d'équilibre impliquent qu'il existe une fonction $\chi(x_1, x_2)$ telle que les composantes de $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ sont données par :

$$\boxed{\sigma^1_1 = \partial_{22} \chi ; \quad \sigma^1_2 = -\partial_{12} \chi ; \quad \sigma^2_2 = \partial_{11} \chi}$$

Au lieu de chercher les 3 fonctions $\sigma^1_1(x_1, x_2)$, $\sigma^1_2(x_1, x_2)$ et $\sigma^2_2(x_1, x_2)$, il suffit donc de chercher une seule fonction $\chi(x_1, x_2)$. Le tenseur des contraintes déduit de χ par les formules précédentes respecte automatiquement les équations d'équilibre.

²⁴. On donne un peu plus loin une expression du résultat valable dans tout système de coordonnées.

La fonction χ est appelée *fonction d'Airy*.

Si le système de coordonnées du plan P n'est pas cartésien orthonormé, le lecteur pourra vérifier que $\tilde{\sigma}$ est donné par la relation tensorielle :

$$\tilde{\sigma} = \Delta\chi \tilde{G} - \text{grad grad}\chi \quad (3.5)$$

En prenant la trace de cette expression, on trouve la relation :

$$\text{Tr}\tilde{\sigma} = \Delta\chi \quad (3.6)$$

La fonction χ doit être choisie pour respecter les conditions de Beltrami. En reportant les valeurs (3.5) et (3.6), dans les équations (3.2) page 28 et (3.4) page 30, on trouve les conditions sur χ :

- en contraintes planes²⁵ :

$$\text{grad grad}\Delta\chi = 0 \quad (3 \text{ équations})$$

- en déformations planes :

$$\Delta\Delta\chi = 0 \quad (1 \text{ équation})$$

Ainsi, la résolution d'un problème d'élasticité plane se ramène à la recherche d'une seule fonction χ respectant les conditions de Beltrami ci-dessus (équations différentielles en χ du quatrième ordre !), et satisfaisant aux conditions aux limites du problème.

Remarque 1:

La recherche de fonctions d'Airy est souvent aussi difficile que la résolution du problème d'élasticité standard. Cette méthode est donc de peu d'intérêt pratique, mais on connaît les fonctions d'Airy de quelques problèmes académiques.

Remarque 2:

La plupart des logiciels d'éléments finis proposent les options de contraintes planes et déformations planes, mais ils n'utilisent pas les fonctions d'Airy pour la résolution, ils cherchent simplement à résoudre le problème bidimensionnel posé sous sa forme standard²⁶.

3.3 Élasticité axisymétrique

On dit qu'un problème est *axisymétrique* si la forme du corps élastique est symétrique de révolution autour d'un axe, et si le chargement et les conditions aux limites sont aussi de révolution autour de cet axe.

Dans ce cas, la solution est aussi axisymétrique. Si on utilise un système de coordonnées cylindrique ou sphérique autour de l'axe d'axisymétrie, les dérivées des composantes sur la base naturelle²⁷ par rapport à θ sont nulles²⁸. On est donc ramené à un problème à deux variables (r, z) ou (r, φ) dans un plan méridien $\theta = Cte$.

Il convient de bien noter que bien que le problème soit à deux variables, *ce n'est pas un problème d'élasticité plane*, car ni le tenseur des contraintes, ni le tenseur des petites déformations ne sont des tenseurs plans en général.

25. Remarquer que la partie non plane des équations (3.4) page 30 est automatiquement respectée par la partie plane : c'est la trace de la partie plane.

26. Voir cours sur les éléments finis

27. ou sur la base naturelle normée

28. Attention : La dérivée par rapport à θ d'un champ de vecteurs axisymétrique n'est pas un vecteur nul, mais les dérivées des composantes du champ sur la base naturelle sont bien nulles.

Pour résoudre ces problèmes, on peut utiliser la formulation en contraintes ou la formulation en déplacements.

Chapitre 4

Critères de limite élastique

La théorie de l'élasticité classique utilise une loi de comportement linéaire. Pour un grand nombre de matériaux, on constate expérimentalement, que dans certaines limites, le comportement est bien élastique linéaire, mais qu'au delà il perd cette propriété.

Il convient donc de vérifier si les résultats d'un calcul d'élasticité linéaire sont bien dans ces limites.

Il faut bien distinguer la notion de *limite élastique* de la notion de *limite de rupture*. En effet, pour certaines constructions, il est parfaitement admissible de dépasser la limite élastique¹, on demande seulement de ne pas aller jusqu'à la rupture. Pour d'autres constructions, au contraire, il est impératif de rester dans les limites élastiques pour que la pièce retrouve sa forme initiale après décharge. Ce choix de la limite *admissible* est à faire par l'ingénieur : c'est la limite corrigée d'un coefficient de sécurité par rapport à la limite (élastique ou de rupture) dont la valeur est fixée, soit par les normes en vigueur, soit par le concepteur lorsque les normes font défaut.

Ce coefficient de sécurité est destiné à prendre en compte un certain nombre d'incertitudes². parmi lesquelles on peut citer :

- l'incertitude sur les caractéristiques du matériau (les valeurs de E , ν et des limites élastique ou de rupture).
- l'incertitude sur la modélisation du problème (simplification de la forme du corps, incertitude sur ses dimensions, incertitude sur la modélisation du comportement du matériau, incertitude sur les conditions aux limites).
- l'incertitude sur le chargement réel (si le calcul a été fait pour certains chargement, il n'est pas certain qu'on reste dans les limites admissibles pour d'autres). Il n'est rarement évident de connaître le cas de charge le plus défavorable. Dans certains corps de métier, comme le bâtiment, il existe des règlements qui définissent les cas de charge qu'on doit envisager. Il faut bien comprendre qu'il s'agit là plus d'une protection juridique que d'une certitude scientifique.
- l'incertitude sur la solution si la méthode de résolution est approchée ou avec des hypothèses simplificatrices, ou si elle est numérique (erreur de troncature et erreur de méthode)

Le problème de la définition d'un critère de limite élastique est aujourd'hui encore un problème non entièrement résolu. La difficulté provient du fait que la limite élastique est atteinte pour des

1. mais il faut alors utiliser une loi de comportement adéquate

2. Toutes ces incertitudes ne doivent pas décourager l'ingénieur : Si les hommes avaient attendu des certitudes scientifiques avant de réaliser leurs projets, nous en serions encore à l'âge de la pierre taillée. Il faut simplement en avoir conscience. Malgré la beauté qu'on peut trouver dans une théorie, elle reste toujours une approximation de la réalité!

raisons de micro-physique à l'échelle cristallographique³, alors qu'on souhaite disposer d'un critère macroscopique. Principalement, on trouve plusieurs idées de base :

- Des critères basés sur les valeurs des déformations. Historiquement, ce sont les premiers apparus. Ils sont abandonnés aujourd'hui. Nous ne les envisagerons pas.
- Des critères basés sur les valeurs des contraintes. Ils sont très utilisés.
- Des critères basés sur les valeurs de l'énergie de déformation. Leur traitement mathématique est assez commode, mais ce ne sont pas pas nécessairement les meilleurs vis à vis des confrontations expérimentales.
- Des critères expérimentaux⁴. Ce sont sans doute les plus fiables, dans la mesure où on ne les extrapole pas. Mais ils sont dénués de tout fondement théorique.
- Des critères réglementaires (ou normes). Ils n'ont pas toujours les fondements théoriques souhaitables, mais ils prennent en compte une certaine «expérience»⁵. Ils doivent être considérés comme des protections juridiques.

Parmi tous ces critères, divers choix sont possibles :

- La simplicité : pour les calculs de prédétermination ou d'avant-projet.
- Application des règlements (ou des normes) lorsqu'il existent et qu'ils sont applicables au cas traité. Comme ils sont en général de rédaction assez complexe, on les utilise pour les calculs de vérification d'un projet définitif.
- S'il n'y a pas de critère réglementaire, l'ingénieur fait le choix d'un (ou plusieurs) critère en fonction des habitudes locales, ou on prend un critère déjà utilisé dans un calcul similaire et qui a déjà fait ses preuves.

4.1 Les essais courants sur les matériaux

Lorsqu'on soumet une pièce à des sollicitations, il apparaît à l'intérieur un champ de tenseur des contraintes et un champ de tenseur de déformations. Si la pièce est de forme complexe, la distribution de ces champs est généralement non uniforme et il est souvent difficile de les analyser expérimentalement.

On ne dispose d'aucun dispositif pour mesurer directement des contraintes, par contre on peut mesurer des déplacements ou des allongements dans une direction. Pour déterminer des contraintes, on est donc amené à utiliser une loi de comportement à partir des déformations mesurées.

On mesure des allongements⁶ dans une direction avec des extensomètres. Il en existe deux types :

- Les extensomètres mécaniques : ils mesurent la variation de longueur entre deux points de l'éprouvette. On en déduit une *moyenne* de l'allongement entre les deux points. Si le tenseur des déformations est sensiblement uniforme entre les deux points, on mesure l'allongement dans cette région.
- Les extensomètres électriques, appelés aussi jauges de déformation. On colle très soigneusement sur l'éprouvette une jauge constituée d'un petit fil conducteur sur un support en matière plastique ou en papier.

3. le réarrangement des atomes dans les cristaux.

4. On dit aussi *empiriques*.

5. ou tradition ?

6. seulement à la surface des corps

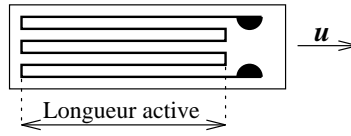


FIG. 4.1 – jauge électrique de déformation

Lorsque l'éprouvette subit des allongements, le conducteur change de longueur, et sa résistance varie. On montre que l'allongement relatif est donné par

$$\mathbf{u} \otimes \overline{\epsilon} \otimes \mathbf{u} = K \frac{\Delta R}{R}$$

où \mathbf{u} est la direction de la jauge, R est la résistance de la jauge, ΔR est la variation de résistance et K un coefficient caractéristique de la jauge, fourni par le constructeur.

Les jauges ont des longueurs actives de 5 à 100 mm. Il existe aussi des support comportant deux ou trois jauges dans des directions différentes.

4.1.1 L'essai de traction

Il consiste à tirer sur une éprouvette de section circulaire ou rectangulaire dont les extrémités sont renforcées pour s'adapter au moyen de fixation sur la machine de traction.

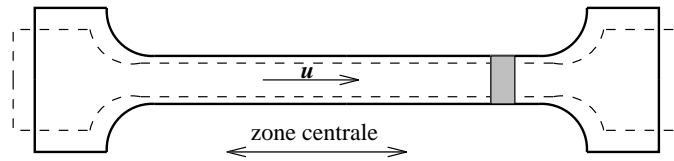


FIG. 4.2 – Éprouvette de traction

Dans la zone centrale, le tenseur des contraintes est sensiblement uniaxial dans la direction de traction \mathbf{u} et sensiblement uniforme :

$$[\sigma_{\bullet\bullet}] = \begin{bmatrix} \frac{F}{S} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

où F est l'effort de traction et S est l'aire de la section de l'éprouvette. On connaît donc le tenseur des contraintes dans la zone centrale :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{F}{S} \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$$

et les allongements dans la direction \mathbf{u} à l'aide d'un extensomètre placé sur la zone centrale.

Cet essai est très utilisé pour les mesures de E et ν :

$$E = \frac{\frac{F}{S}}{\mathbf{u} \otimes \overline{\epsilon} \otimes \mathbf{u}}$$

Pour la mesure de ν , il faut un extensomètre dans une direction \mathbf{v} perpendiculaire à \mathbf{u} :

$$\nu = -\frac{\mathbf{u} \otimes \overline{\epsilon} \otimes \mathbf{u}}{\mathbf{v} \otimes \overline{\epsilon} \otimes \mathbf{v}}$$

4.1.2 L'essai de compression

On comprime un cylindre entre deux plateaux. Pour des raisons de stabilité,⁷ la cylindre est nécessairement assez court.

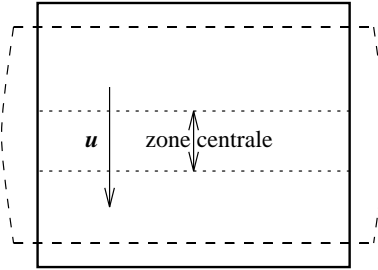


FIG. 4.3 – Éprouvette de compression (compression verticale)

Dans la zone centrale, le tenseur des contraintes est à peu près uniaxial dans la direction de compression et à peu près uniforme :

$$[\sigma_{\bullet\bullet}] = \begin{bmatrix} -\frac{F}{S} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

où F est l'effort de compression et S est l'aire de la section de l'éprouvette.

Cet essai peut aussi être utilisé pour les mesures de E et ν , mais il est moins précis : l'éprouvette étant relativement courte, la zone centrale est proche des plateaux de la machine. Elle n'est donc qu'approximativement uniaxiale et uniforme. Toutefois cet essai est utilisé pour trouver les limites en compression.

4.1.3 L'essai de torsion

On soumet à la torsion une éprouvette de section cylindrique ou en tube mince.

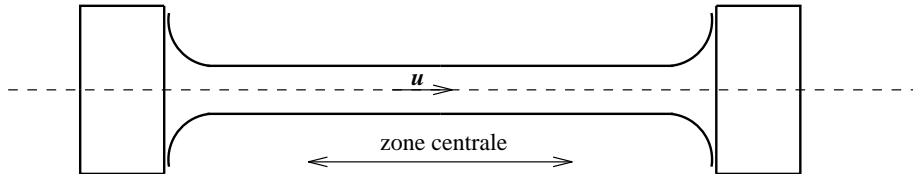


FIG. 4.4 – Éprouvette de torsion

Dans la zone centrale, le tenseur des contraintes est sensiblement invariant dans la direction \mathbf{u} . On peut montrer⁸ que le tenseur des contraintes est de la forme :

$$[\sigma_{\bullet\bullet}] = \frac{\mathcal{M}}{J} \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ -x_3 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ dans des axes orthonormés } \{\mathbf{x}_1 = \mathbf{u}, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$$

où \mathcal{M} est le moment de torsion appliqué, et J une constante dépendant des dimensions de la section droite de l'éprouvette. Dans le cas d'un tube, on a :

$$J = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4)$$

⁷. c'est à dire pour éviter le «flambage» de l'éprouvette

⁸. voir TD

où D est le diamètre extérieur et d est le diamètre intérieur.

Il est facile de vérifier que si le tube est mince, le tenseur des contraintes est pratiquement uniforme dans l'épaisseur de l'éprouvette.

4.2 Critères de limite élastique basés sur les contraintes

4.2.1 Critère de Rankine

On suppose que la limite élastique est déterminée par des valeurs limites portant sur *les contraintes normales principales*.

On fait donc un essai de traction, pour déterminer la contrainte normale maximale σ_e , et un essai de compression pour déterminer la contrainte normale minimale σ'_e . Le critère s'écrit donc :

$$\sigma'_e < \sigma_i < \sigma_e \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}$$

Dans la représentation de Mohr, ce critère revient à limiter les cercles de Mohr entre les abscisses σ'_e et σ_e .

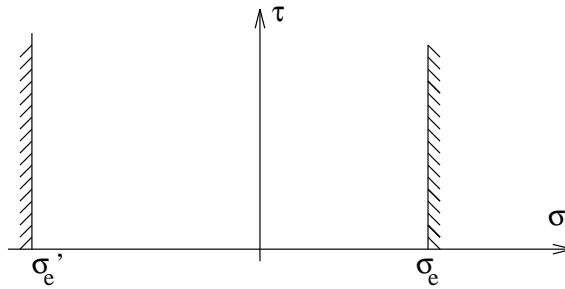


FIG. 4.5 – Le critère de Rankine, dans le plan de Mohr

Avec ce critère, la contrainte tangentielle est implicitement limitée à $\frac{1}{2}(\sigma_e - \sigma'_e)$. La contrainte principale intermédiaire σ_2 ne joue aucun rôle.

Dans la représentation octaédrique, le point représentatif des tenseurs doit être à l'intérieur d'un cube de diagonale $\{\sigma_e, \sigma_e, \sigma_e\}$, $\{\sigma'_e, \sigma'_e, \sigma'_e\}$

Ce critère peut être en contradiction avec un essai de torsion, qui donne en général une limite en contrainte tangentielle différente de $\frac{1}{2}(\sigma_e - \sigma'_e)$.

4.2.2 Critère de Tresca

On suppose que la limite élastique est déterminée par une *valeur limite portant sur le module des contraintes tangentielles*. On fait donc un essai de torsion pour trouver la contrainte tangentielle maximale τ_e . En fonction des contraintes normales principales, ce critère s'écrit donc :

$$\sup |\sigma_i - \sigma_j| \leq 2\tau_e$$

Dans la représentation de Mohr, ce critère revient à limiter les cercles de Mohr sous les ordonnées τ_e . Il est à noter que ce critère ne limite ni la traction hydrostatique, ni la compression hydrostatique⁹.

9. En effet, les tenseurs sphériques sont représentés dans le plan de Mohr par un point sur l'axe des contraintes normales.

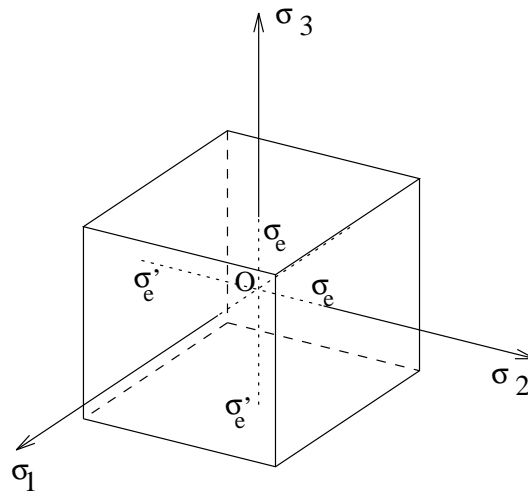


FIG. 4.6 – Le critère de Rankine, dans la représentation octaédrique

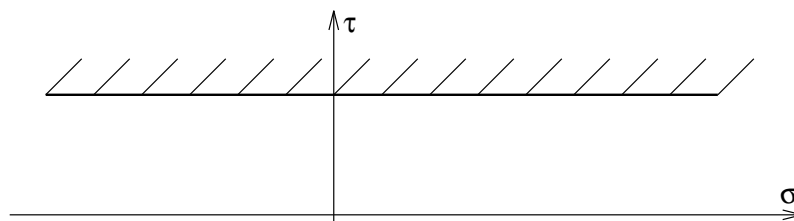


FIG. 4.7 – Le critère de Tresca, dans le plan de Mohr

Dans la représentation octaédrique, on peut montrer, avec un peu de géométrie, que le point représentatif est à l'intérieur d'un prisme de directrice δ et de base hexagonale.

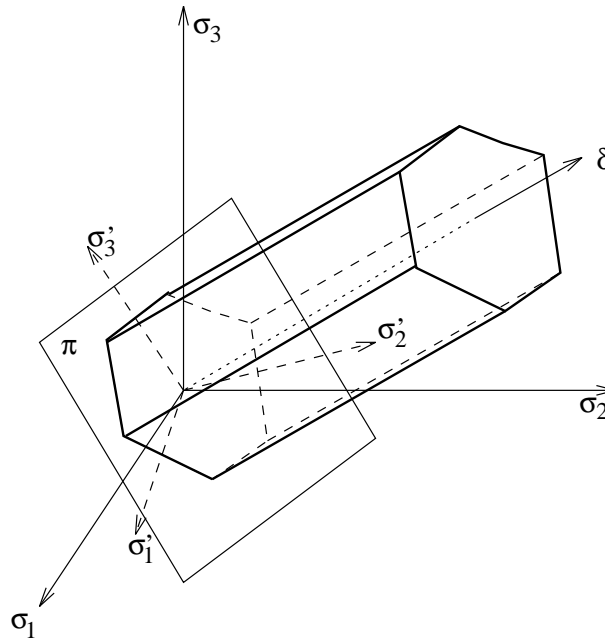


FIG. 4.8 – Le critère de Tresca, dans la représentation octaédrique

4.2.3 Critère expérimental de Caquot

A partir d'essais sur une machine combinant la traction-compression, la torsion et des pressions intérieures ou extérieures sur une éprouvette en forme de tube mince, Caquot a tracé l'enveloppe expérimentale des cercles de Mohr limites dans le plan de Mohr. On obtient une courbe dite *courbe intrinsèque de Caquot* d'allure parabolique. Il se trouve que dans ces expériences, la contrainte principale σ_{rr} est toujours négligeable devant $\sigma_{\theta\theta}$. Il n'y a donc en fait que deux des contraintes principales ($\sigma_{\theta\theta}$ et σ_{zz}) qui varient véritablement.

Il faut évidemment faire une courbe intrinsèque pour chaque matériau¹⁰.

Dans le plan de Mohr, la courbe a l'allure suivante :

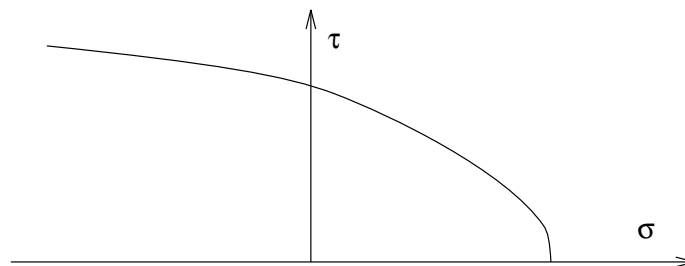


FIG. 4.9 – Le critère de Caquot, dans le plan de Mohr

On évite la représentation octaédrique pour ce critère, car l'une des contraintes étant toujours presque nulle, on ne parcourt pas tout l'espace avec les résultats expérimentaux.

10. et ces essais coûtent cher: il faut tester un grand nombre d'éprouvettes pour caractériser un matériau!

4.2.4 Critère parabolique

Les essais de Caquot étant coûteux, on se contente d'un essai de compression et d'un essai de traction, et on construit une parabole passant par les sommets S et S' des deux cercles de Mohr limites obtenus. Ce critère est surtout utilisé pour le béton.

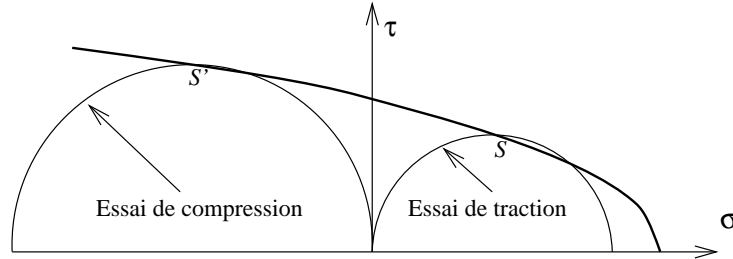


FIG. 4.10 – Le critère parabolique, dans le plan de Mohr

Un tenseur de contraintes principales $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ satisfait au critère si son sommet s , de coordonnées dans le plan de Mohr $\sigma = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \tau = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right)$ est situé sous la parabole. Le lecteur pourra montrer, par quelques calculs dans le plan de Mohr, que ce critère s'écrit :

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 - (\sigma'_e + \sigma_e)(\sigma_1 + \sigma_3) \leq -\sigma'_e \sigma_e$$

Comme le précédent, ce critère ignore la variation de la contrainte normale principale intermédiaire.

4.3 Critères de limite élastique basés sur l'énergie

Au lieu de baser la limite élastique sur la notion de contrainte, on suppose que c'est l'énergie de déformation qui doit être limitée. Cette méthode prend donc en compte les valeurs des trois contraintes normales principales.

4.3.1 Critère de Beltrami

On suppose que la limite élastique est déterminée par une valeur limite de l'énergie de déformation par unité de volume. On fait un essai de traction pour déterminer l'énergie de déformation limite.

On a vu en 2.2.1 page 12 que dans un essai de traction uniaxial, le tenseur des contraintes est $\boldsymbol{\sigma} = s \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$. On trouve facilement que, dans cet essai, l'énergie de déformation par unité de volume est $\frac{s^2}{E}$.

Le critère s'écrit donc (en élasticité linéaire isotrope)

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \otimes \boldsymbol{\sigma} \leq \frac{\sigma_e^2}{E}$$

où σ_e est la contrainte de limite élastique trouvée dans l'essai de traction.

Soit encore, en utilisant la loi de comportement, et exprimant tout en fonction des contraintes principales :

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \leq \sigma_e^2$$

Ce critère a le défaut d'imposer que les limites en traction et en compression sont opposées. De plus, il est souvent en désaccord avec les confrontations expérimentales¹¹.

11. cf Timoschenko

4.3.2 Critère de Von Mises

Si on décompose le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations en parties sphérique et déviateur, il est facile de voir que l'énergie de déformation peut s'écrire (en élasticité linéaire isotrope et petites perturbations!):

$$\frac{1}{2} \overline{\sigma} \otimes \overline{\epsilon} = \frac{1}{2} \overline{\sigma}^s \otimes \overline{\epsilon}^s + \frac{1}{2} \overline{\sigma}^d \otimes \overline{\epsilon}^d$$

On suppose que seule la partie de l'énergie de déformation calculée avec les déviateurs doit être limitée. On fait un essai de traction pour connaître cette limite. Le lecteur pourra montrer facilement que ce critère s'exprime en fonction des contraintes principales de la manière suivante :

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \leq 2\sigma_e^2$$

Il est remarquable de constater que la représentation octaédrique de la surface limite des ce critère est le cylindre enveloppant du prisme de Tresca.

Ce critère a le défaut de ne pas limiter les tractions ou les compressions hydrostatiques, et d'imposer que les limites en traction et en compression sont opposées. Malgré ces défauts, ce critère est souvent utilisé dans des calculs théoriques et dans les logiciels de calcul par éléments finis, en raison de la simplicité de son expression.

4.3.3 Autres critères

On peut construire d'autres critères tendant à améliorer les défauts des précédents : Tout critère de limite élastique devrait satisfaire aux exigences suivantes :

- Les limites en compression et en traction ne sont pas nécessairement opposées
- Satisfaire au moins aux limites trouvées en traction et en compression.
- Limiter les tractions hydrostatiques
- Pour les milieux isotropes, les rôles de σ_1 , σ_2 et σ_3 doivent être symétriques (ce qui impose que la représentation octaédrique soit invariante dans des rotations de $2\pi/3$ autour de la trissectrice δ).

On cite ici deux exemples :

Le cône de Nadai:

$$-4\sigma'_e \sigma_e (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - (3\sigma_e'^2 + 2\sigma_e' \sigma_e + 3\sigma_e^2) (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) + \dots \\ + 4(\sigma_e' + \sigma_e) (\sigma_e' - \sigma_e) (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = 4\sigma_e'^2 \sigma_e^2$$

Sa représentation octaédrique est un cône de révolution autour de la trissectrice, dont le sommet est sur la trissectrice du côté des σ positifs.

Le parabolöide de Stassi:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 2(\sigma_e' + \sigma_e) (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = 2\sigma_e' \sigma_e$$

Sa représentation octaédrique est un parabolöide de révolution autour de la trissectrice, dont le sommet est sur la trissectrice du côté des σ positifs.

Ces deux critères limitent la traction hydrostatique mais pas la compression hydrostatique¹².

Pour ces deux critères, on retrouve le critère de Von Mises si $\sigma_e = -\sigma_e'$.

12. Toutefois, on est en droit de se demander s'il existe une limite élastique en compression hydrostatique. Il semble qu'aucune expérience ne puisse en évidence.

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté quelques critères courants¹³ de limite élastique sans chercher à en justifier un plus que l'autre. Chacun a sa manière propre de limiter les tenseurs de contraintes. En l'absence de règlements ou de normes, il est sans doute prudent d'en combiner plusieurs par sécurité.

Notamment, les critères de Tresca et de Von Mises (très populaires dans les codes de calcul) ne limitent pas les tenseurs sphériques. Si on se limite à ne regarder que l'un ou l'autre de ces critères, on prend le risque de déclarer admissibles des tractions sphériques¹⁴ très importantes. On devrait prudemment le combiner avec le critère de Rankine.

13. Mais la liste n'est pas exhaustive!

14. ou presque sphériques

Table des matières

1	Introduction	5
2	Equations générales de l'élasticité	9
2.1	Hypothèse des petites perturbations	9
2.1.1	Petites déformations	9
2.1.2	Petits déplacements	10
2.1.3	Conclusion	11
2.2	Loi de comportement	11
2.2.1	Interprétations physiques de E et ν	12
2.3	Conservation de la masse	13
2.4	Principe fondamental de la mécanique	13
2.4.1	Equations d'équilibre	13
2.4.2	Théorème de l'énergie cinétique	14
2.5	Premier principe de la thermodynamique	15
2.6	Second principe de la thermodynamique	17
2.7	Equations de compatibilité	18
2.8	Représentation des tenseurs du second ordre	18
2.8.1	Tricercle de Mohr	19
2.8.2	Représentation octaédrique	20
2.8.3	Ellipsoïde de Lamé	21
3	Le problème élastique	23
3.1	Elasticité tridimensionnelle	23
3.1.1	Formulation en déplacement	24
3.1.2	Formulation en contrainte	25
3.1.3	Théorème de superposition	25
3.1.4	Techniques de résolution	26
3.2	Elasticité plane isotherme	27

3.2.1	Hypothèse des contraintes planes	27
3.2.2	Hypothèse des déformations planes	29
3.2.3	Fonction d'Airy	30
3.3	Élasticité axisymétrique	32
4	Critères de limite élastique	35
4.1	Les essais courants sur les matériaux	36
4.1.1	L'essai de traction	37
4.1.2	L'essai de compression	38
4.1.3	L'essai de torsion	38
4.2	Critères de limite élastique basés sur les contraintes	39
4.2.1	Critère de Rankine	39
4.2.2	Critère de Tresca	39
4.2.3	Critère expérimental de Caquot	41
4.2.4	Critère parabolique	42
4.3	Critères de limite élastique basés sur l'énergie	42
4.3.1	Critère de Beltrami	42
4.3.2	Critère de Von Mises	43
4.3.3	Autres critères	43
4.4	Conclusion	44