

Troisième partie

**Milieux continus sans dissipation
intrinsèque
(Milieux élastiques)**

Chapitre 1

Milieux élastiques

Les milieux élastiques sont une classe de milieux continus destinés à modéliser des solides déformables dont les hypothèses sont les suivantes :

Existence d'un état naturel: Dans un milieu élastique, on suppose qu'il existe pour chaque particule un état privilégié appelé *état naturel*, dans lequel le tenseur des contraintes de Cauchy est nul et la température est à une valeur de référence T_0 . Dans cet état, la particule n'est soumise à aucune sollicitation mécanique de la part de son milieu extérieur. Cet état naturel est l'état à partir duquel on mesure les déformations, les énergies internes massiques et les entropies massiques.

Choix des variables d'état: Un milieu élastique est modélisé par les variables d'état suivantes:

- la température actuelle T (imposée par le second principe de la thermodynamique).
- un tenseur de déformation actuel \mathbf{X}^1 mesurant la déformation de l'état actuel par rapport à l'état naturel. L'existence d'un état naturel, à partir duquel on peut mesurer des déformations est caractéristique des milieux continus solides déformables².
- des directions d'anisotropie actuelles éventuelles $\mathbf{n}_t^{(i)}$ si on veut distinguer deux états qui auraient «la même déformation» mais «orientée» différemment par rapport à certaines directions de la matière.

La dissipation intrinsèque est nulle: C'est l'hypothèse simplificatrice essentielle des milieux élastiques. De l'équation (4.9) page 95, on tire la relation caractéristique des milieux élastiques :

$$\boxed{\rho (T \dot{s} - \dot{u}) + \boldsymbol{\sigma} \otimes \overline{\mathbf{D}} = 0} \quad (1.1)$$

pour tout état et toute évolution thermo-mécanique autour de cet état

Cette condition va imposer des restrictions sur les expressions possibles de l'énergie interne, de l'entropie massique et du tenseur des contraintes.

Remarque: La définition de l'élasticité donnée ici est souvent aussi appelée *hyperélasticité*³.

1. On peut choisir un tenseur de déformation quelconque, par exemple parmi ceux proposés en section 5.6 page 51, mais on a montré en 3.2.5 page 83 l'avantage de choisir des variables d'état objectives.

2. Pour les milieux fluides, les positions relatives des «molécules» sont repérées moins finement par une simple masse volumique.

3. Mais alors qu'est-ce que l'élasticité? Elle ne serait pas réversible? On verra plus loin que la forme générale de la loi de comportement des milieux à dissipation intrinsèque nulle contient les lois communément appelées «élastiques».

Chapitre 2

Élasticité isotrope en évolution isotherme

2.1 Définition

- **Le milieu est un milieu élastique**: chaque particule a donc un état naturel. Dans les calculs pratiques, on suppose que dans la configuration initiale du corps étudié, *toutes les particules* sont dans leur état naturel, c'est-à-dire que le tenseur des contraintes de Cauchy \mathbf{y} est partout nul et la température est T_0 . C'est une *hypothèse simplificatrice* qui masque notre ignorance de l'état réel de chaque particule du corps dans la configuration initiale.

On prend cet état naturel global comme origine des énergies internes massiques et comme configuration initiale pour mesurer les déformations

Pour mesurer les déformations depuis l'état naturel, on peut prendre *a priori* n'importe lequel des tenseurs de déformation cité en section 5.6 page 51, puisqu'ils expriment tous la même information et s'expriment tous les uns en fonction des autres. Cependant, on verra un peu plus loin les avantages des tenseurs de déformation objectifs. Tant qu'on ne l'aura pas choisi, ce tenseur est noté \mathbf{X} .

Enfin, la dissipation intrinsèque des milieux élastiques est nulle en tout point d'une évolution.

- **Le milieu est isotrope**: Les seules variables d'état sont la température T et un tenseur de déformation \mathbf{X} , sans référence à l'orientation de ce tenseur par rapport à la matière. On considère donc que deux particules subissant deux tenseurs de déformation «identiques», mais «d'orientation» différente par rapport à la matière¹ sont dans le même état.
- **Les évolutions sont isothermes** ($\dot{T} = 0$). Cette hypothèse simplificatrice n'est pas à proprement parler une hypothèse sur le milieu, mais plutôt une restriction sur les transformations thermodynamiques qu'on veut envisager. Dans la pratique, cette hypothèse est souvent acceptable².

Si le milieu est à la température uniforme T_0 à l'état initial, il reste donc à cette température uniforme et constante pendant toute la transformation. La température ne joue plus aucun

1. si on choisit un tenseur de déformation \mathbf{X} symétrique, ces tenseurs ont mêmes valeurs propres, mais des directions propres (orthogonales) différentes. les deux tenseurs de déformation \mathbf{X} et \mathbf{X}' définissent le même état si $\mathbf{X}' = \mathbf{Q}^T \mathbf{X} \mathbf{Q} \quad \forall \mathbf{Q}$ orthogonal.

2. La levée de cette hypothèse viendra dans un chapitre ultérieur: la thermo-élasticité.

rôle. La seule variable d'état des milieux élastiques isotropes isothermes est donc le tenseur de déformation \mathbf{X} .

De plus, la température étant uniforme à l'instant initial et le restant pendant toute transformation, on a $\mathbf{grad}_E T = \mathbf{0}$ à tout instant, et la dissipation thermique est donc toujours nulle. Les transformations sont donc totalement réversibles (intrinsèquement et thermiquement). La variation d'entropie ne peut donc être due qu'aux sources de chaleur externes (conduction à la frontière et rayonnement). Comme on n'envisage pas d'évolutions dans laquelle une particule puisse échanger de la chaleur avec son extérieur à température constante³, on a nécessairement $r = 0$ et $\mathbf{q} = \mathbf{0}$.

Les évolutions envisagées dans ce chapitre sont donc *isentropiques* : $\dot{s} = 0$.

En élasticité isotrope isotherme, l'entropie massique est nulle⁴.

En élasticité isotrope isotherme, la condition de réversibilité intrinsèque (1.1) page 101 se réduit donc à :

$$\boxed{-\rho \dot{u} + \boldsymbol{\sigma} \otimes \overline{\mathbf{D}} = 0} \quad (2.1)$$

On va donc rechercher les conditions sur l'expression de l'énergie interne massique en fonction de la seule variable d'état \mathbf{X} , et sur le tenseur des contraintes pour que cette équation soit vraie *pour toute évolution*. Ces conditions nous fourniront le cadre général de l'élasticité isotrope en évolution isotherme.

2.2 Réduction de la dimension de l'espace des états

Dans cette section, on va montrer que l'universalité de la définition de l'énergie interne massique, ainsi que l'objectivité de cette grandeur impliquent une diminution de la dimension de l'espace des états.

Bien que la température ne soit pas véritablement une variable d'état pour les milieux élastiques isotropes isothermes, on la conserve dans cette section pour une utilisation ultérieure en thermo-élasticité.

Soit \mathbf{X} un tenseur de déformation objectif⁵ mesurant la déformation entre l'état naturel et un état actuel.

Dans la suite, on se limite aux seuls tenseurs de déformation symétriques.

L'universalité de la définition de l'énergie interne implique que

$$u = g_{\mathbf{X}}(T, \mathbf{X}) \quad \text{et} \quad \tilde{u} = g_{\mathbf{X}}(\tilde{T}, \tilde{\mathbf{X}})$$

Bien noter que pour tous les observateurs, il s'agit de la même fonction $g_{\mathbf{X}}$: c'est une définition et donc une loi universelle.

L'énergie interne massique est une grandeur scalaire objective. On a donc $u = \tilde{u}$. De même, la température est une grandeur scalaire objective et donc $T = \tilde{T}$. L'universalité de la définition de l'énergie interne s'écrit donc :

$$g_{\mathbf{X}}(T, \mathbf{X}) = g_{\mathbf{X}}(\tilde{T}, \tilde{\mathbf{X}})$$

3. telles que fusion, solidification ou réaction chimique...

4. en prenant l'état naturel comme référence pour les entropies.

5. ou dont la formule de changement d'observateur est une rotation de tenseur. C'est le cas de tous les tenseurs de déformation donnés en section 5.6 page 51 sauf \mathbf{F} . Tant que la déformation est la seule variable d'état, on peut se permettre de prendre un tenseur non objectif. Mais on verra plus loin que ce n'est plus possible pour des milieux continus plus complexes, car pour bénéficier des résultats de la théorie des fonctions isotropes, il faut que toutes les variables d'état aient les mêmes tenseurs de changement d'observateur. Enfin, on constatera que même en élasticité isotrope, les lois de comportement $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}(\mathbf{X})$ sont plus compliquées avec des tenseurs de déformation non objectifs.

Si la formule de changement d'observateur de la grandeur tensorielle \mathbf{X} est de la forme

$$\widetilde{\mathbf{X}} = \mathbf{Q} \otimes \mathbf{X} \otimes \mathbf{Q}^T \quad \forall \mathbf{Q} \text{ orthogonal} \quad (2.2)$$

la fonction $g_{\mathbf{X}}$ doit donc être telle que :

$$g_{\mathbf{X}}(T, \mathbf{X}) = g_{\mathbf{X}}(T, \mathbf{Q} \otimes \mathbf{X} \otimes \mathbf{Q}^T) \quad \forall \mathbf{Q} \text{ orthogonal}$$

La fonction $g_{\mathbf{X}}$ est donc *une fonction isotrope*⁶ de son argument tensoriel \mathbf{X} .

La théorie des fonctions isotropes montre que l'énergie interne est nécessairement une fonction des invariants de \mathbf{X} (voir page 35). On a le choix entre deux systèmes d'invariants⁷ :

$$u = u_{\mathbf{X}}(T, X_I, X_{II}, X_{III}) = \bar{f}_{\mathbf{X}}(T, \bar{X}_I, \bar{X}_{II}, \bar{X}_{III})$$

avec

$$\begin{aligned} X_I &= x_1 + x_2 + x_3 = \text{Tr} \mathbf{X} & \bar{X}_I &= \text{Tr} \mathbf{X} \\ X_{II} &= x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = \frac{1}{2} [(\text{Tr} \mathbf{X})^2 - \text{Tr}(\mathbf{X}^2)] & \bar{X}_{II} &= \text{Tr}(\mathbf{X}^2) \\ X_{III} &= x_1 x_2 x_3 = \det \mathbf{X} = \frac{1}{3} \left[\text{Tr}(\mathbf{X}^3) - \frac{3}{2} \text{Tr} \mathbf{X} \text{Tr}(\mathbf{X}^2) + \frac{1}{2} (\text{Tr} \mathbf{X})^3 \right] & \bar{X}_{III} &= \text{Tr}(\mathbf{X}^3) \end{aligned}$$

où x_1, x_2 et x_3 sont les valeurs propres de \mathbf{X} .

La même conclusion vient pour l'expression de l'entropie :

$$s = s_{\mathbf{X}}(T, X_I, X_{II}, X_{III})$$

Conclusion :

La dimension de l'espace des états pour les milieux élastiques isotropes est donc 4. Les quatre variables d'état *scalaires* sont la température T et trois invariants de \mathbf{X} (pour les milieux en évolution isotherme la température disparaît.).

■

Dans la suite, on choisit⁸ d'utiliser les invariants (X_I, X_{II}, X_{III}) comme variables d'état :

$$\chi_1 = X_I \quad ; \quad \chi_2 = X_{II} \quad ; \quad \chi_3 = X_{III}$$

et l'énergie interne massique est :

$$u = u_{\mathbf{X}}(T, X_I, X_{II}, X_{III})$$

Sa dérivée particulière est donc de la forme :

$$\dot{u} = \frac{\partial u_{\mathbf{X}}}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial u_{\mathbf{X}}}{\partial X_I} \dot{X}_I + \frac{\partial u_{\mathbf{X}}}{\partial X_{II}} \dot{X}_{II} + \frac{\partial u_{\mathbf{X}}}{\partial X_{III}} \dot{X}_{III}$$

6. au sens mathématique du terme. Ne pas confondre avec l'isotropie du matériau qui affirme que la seule variable d'état est \mathbf{X} .

Exceptionnellement, puisque la déformation \mathbf{X} est la seule variable d'état, on peut prendre $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0$ ou $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_t$. Dans les deux cas, la fonction $g_{\mathbf{X}}$ est isotrope.

7. Il existe d'autres choix possibles. Notamment, quand le tenseur de déformation choisi est le tenseur de Cauchy-Green gauche \mathbf{B} , on utilise parfois $J = \det \mathbf{B} = B_{III}$, $\bar{I}_1 = \frac{\text{Tr} \mathbf{B}}{B_{III}^{1/3}}$ et $\bar{I}_2 = \frac{\text{Tr}(\mathbf{B}^{-1})}{B_{III}^{1/3}}$. Le choix d'un système d'invariants pour caractériser la déformation n'est pas essentiel, pourvu que la transformation d'un système d'invariants à l'autre soit biunivoque. Il ne s'agit que d'un simple changement de variables d'état dans l'espace des états. Les formules de transformation sont données en annexe de (A.17) à (A.23) page 193.

8. voir note 7

Pour alléger les notations on écrit :

$$\dot{u} = \partial_0 u_X \dot{T} + \partial_1 u_X \dot{X}_I + \partial_2 u_X \dot{X}_{II} + \partial_3 u_X \dot{X}_{III} \quad (2.3)$$

En utilisant les dérivées des invariants données en (B.1) page 212, on peut l'écrire sous forme tensorielle :

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \partial_0 u_X \dot{T} + \partial_1 u_X \mathbf{G} \overline{\otimes} \dot{\mathbf{X}} + \partial_2 u_X \left(X_I \mathbf{G} - \mathbf{X}^T \right) \overline{\otimes} \dot{\mathbf{X}} + \partial_3 u_X \left(X_{II} \mathbf{G} - X_I \mathbf{X}^T + \mathbf{X}^{2T} \right) \overline{\otimes} \dot{\mathbf{X}} \\ &= \partial_0 u_X \dot{T} + \underbrace{\left[(\partial_1 u_X + X_I \partial_2 u_X + X_{II} \partial_3 u_X) \mathbf{G} - (\partial_2 u_X + X_I \partial_3 u_X) \mathbf{X}^T + \partial_3 u_X \mathbf{X}^{2T} \right]}_{\frac{\partial u}{\partial \mathbf{X}}} \overline{\otimes} \dot{\mathbf{X}} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Quand \mathbf{X} est un tenseur de déformation symétrique, les transpositions disparaissent.

2.3 Loi de comportement élastique isotrope isotherme

Pour les milieux élastiques isotropes en évolution isotherme ($\partial_0 u_X = 0$), la dissipation intrinsèque est nulle :

$$\begin{aligned} -\rho \dot{u} + \boldsymbol{\sigma} \overline{\otimes} \mathbf{D} &= 0 \\ -\rho \left(\partial_1 u_X \dot{X}_I + \partial_2 u_X \dot{X}_{II} + \partial_3 u_X \dot{X}_{III} \right) + \boldsymbol{\sigma} \overline{\otimes} \mathbf{D} &= 0 \\ -\frac{\rho_0}{K_v} \left(\partial_1 u_X \dot{X}_I + \partial_2 u_X \dot{X}_{II} + \partial_3 u_X \dot{X}_{III} \right) + \boldsymbol{\sigma} \overline{\otimes} \mathbf{D} &= 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

pour tout état et pour toute évolution thermo-mécanique infinitésimale autour de cet état

Les expressions de K_v et des dérivées particulières des invariants du tenseur de déformation diffèrent suivant le tenseur de déformation choisi. Leur calcul est détaillé en annexe E. Pour tirer des conclusions de la réversibilité intrinsèque il faut choisir un tenseur de déformation.

2.3.1 Avec le tenseur de Hill gauche \mathbf{M}

\mathbf{M} est un tenseur objectif.

Les variables d'état sont les invariants M_I , M_{II} et M_{III} . On pose $u = u_M(M_I, M_{II}, M_{III})$.

La dilatation volumique est $K_v = e^{M_I}$.

L'égalité (2.5) page 106 devient :

$$-\frac{\rho_0}{e^{M_I}} \left(\partial_1 u_M \dot{M}_I + \partial_2 u_M \dot{M}_{II} + \partial_3 u_M \dot{M}_{III} \right) + \boldsymbol{\sigma} \overline{\otimes} \mathbf{D} = 0$$

pour tout état et pour toute évolution thermo-mécanique infinitésimale autour de cet état

Les dérivées des invariants sont données par (E.29), (E.30), (E.31) page 230. On obtient alors :

$$\left[\boldsymbol{\sigma} - \frac{\rho_0}{e^{M_I}} \left[(\partial_1 u_M + M_I \partial_2 u_M + M_{II} \partial_3 u_M) \mathbf{G} - (\partial_2 u_M + M_I \partial_3 u_M) \mathbf{M} + \partial_3 u_M \mathbf{M}^2 \right] \right] \overline{\otimes} \mathbf{D} = 0$$

$\forall \mathbf{D}$ symétrique

On a donc

$$\text{Sym} \left[\boldsymbol{\sigma} - \frac{\rho_0}{e^{M_I}} \left[(\partial_1 u_M + M_I \partial_2 u_M + M_{II} \partial_3 u_M) \mathbf{G} - (\partial_2 u_M + M_I \partial_3 u_M) \mathbf{M} + \partial_3 u_M \mathbf{M}^2 \right] \right] = 0$$

Les tenseurs $\boldsymbol{\sigma}$, \mathbf{M} et \mathbf{G} étant symétriques, on en déduit la forme générale des lois de comportement $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}(\mathbf{M})$ en élasticité isotrope isotherme :

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma} = \frac{\rho_0}{e_{M_I}} [(\partial_1 u_M + M_I \partial_2 u_M + M_{II} \partial_3 u_M) \mathbf{G} - (\partial_2 u_M + M_I \partial_3 u_M) \mathbf{M} + \partial_3 u_M \mathbf{M}^2]} \quad (2.6)$$

Cette loi de comportement montre que, pour un milieu élastique isotrope isotherme, les directions propres du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ sont les mêmes que celles du tenseur de déformation \mathbf{M} .

2.3.2 Avec la distorsion à gauche \mathbf{V}

\mathbf{V} est un tenseur objectif.

Les variables d'état sont les invariants V_I , V_{II} et V_{III} . On pose $u = u_V(V_I, V_{II}, V_{III})$.

La dilatation volumique est $K_v = V_{III}$.

L'égalité (2.5) page 106 devient :

$$-\frac{\rho_0}{V_{III}} \left(\partial_1 u_V \dot{V}_I + \partial_2 u_V \dot{V}_{II} + \partial_3 u_V \dot{V}_{III} \right) + \boldsymbol{\sigma} \overline{\otimes} \mathbf{D} = 0$$

pour tout état et pour toute évolution thermo-mécanique infinitésimale autour de cet état

Les dérivées des invariants sont données par (E.17), (E.18), (E.19) page 229. On obtient alors :

$$0 = \left[\boldsymbol{\sigma} - \frac{\rho_0}{V_{III}} [(\partial_1 u_V + V_I \partial_2 u_V + V_{II} \partial_3 u_V) \mathbf{V} - (\partial_2 u_V + V_I \partial_3 u_V) \mathbf{V}^2 + \partial_3 u_V \mathbf{V}^3] \right] \overline{\otimes} \mathbf{D} \quad \forall \mathbf{D}$$

On en déduit la forme générale des lois de comportement $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}(\mathbf{V})$ en élasticité isotrope isotherme :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\rho_0}{V_{III}} [(\partial_1 u_V + V_I \partial_2 u_V + V_{II} \partial_3 u_V) \mathbf{V} - (\partial_2 u_V + V_I \partial_3 u_V) \mathbf{V}^2 + \partial_3 u_V \mathbf{V}^3]$$

En utilisant l'identité de Cayley-Hamilton (A.16) page 193, on abaisse le degré en \mathbf{V} :

$$\mathbf{V}^3 = V_I \mathbf{V}^2 - V_{II} \mathbf{V} + V_{III} \mathbf{G}$$

La loi de comportement devient :

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma} = \frac{\rho_0}{V_{III}} [V_{III} \partial_3 u_V \mathbf{G} + (\partial_1 u_V + V_I \partial_2 u_V) \mathbf{V} - \partial_2 u_V \mathbf{V}^2]} \quad (2.7)$$

Les directions propres du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ sont les mêmes que celles du tenseur de déformation \mathbf{V} ⁹.

2.3.3 Avec le tenseur de Cauchy-Green gauche \mathbf{B}

\mathbf{B} est un tenseur objectif.

Les variables d'état sont B_I , B_{II} et B_{III} . On pose $u = u_B(B_I, B_{II}, B_{III})$.

La dilatation volumique est $K_v = B_{III}^{\frac{1}{2}}$

L'égalité (2.5) page 106 devient :

$$-\frac{\rho_0}{B_{III}^{\frac{1}{2}}} \left(\partial_1 u_B \dot{B}_I + \partial_2 u_B \dot{B}_{II} + \partial_3 u_B \dot{B}_{III} \right) + \boldsymbol{\sigma} \overline{\otimes} \mathbf{D} = 0$$

pour tout état et pour toute évolution thermo-mécanique infinitésimale autour de cet état

9. Remarque: on savait déjà que par définition \mathbf{V} et $\mathbf{M} = \mathbf{L}_n \mathbf{V}$ ont les mêmes directions propres.

Les dérivées des invariants sont données par (E.4), (E.5), (E.6) page 228. On obtient alors :

$$0 = \left[\boldsymbol{\sigma} - \frac{2\rho_0}{B_{III}^{\frac{1}{2}}} [(\partial_1 u_B + B_I \partial_2 u_B + B_{II} \partial_3 u_B) \mathbf{B} - (\partial_2 u_B + B_I \partial_3 u_B) \mathbf{B}^2 + \partial_3 u_B \mathbf{B}^3] \right] \overline{\otimes} \mathbf{D} \quad \forall \mathbf{D}$$

On en déduit la forme générale des lois de comportement $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}(\mathbf{B})$ en élasticité isotrope :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2\rho_0}{B_{III}^{\frac{1}{2}}} [(\partial_1 u_B + B_I \partial_2 u_B + B_{II} \partial_3 u_B) \mathbf{B} - (\partial_2 u_B + B_I \partial_3 u_B) \mathbf{B}^2 + \partial_3 u_B \mathbf{B}^3]$$

En utilisant l'identité de Cayley-Hamilton (A.16) page 193, on abaisse le degré en \mathbf{B} :

$$\mathbf{B}^3 = B_I \mathbf{B}^2 - B_{II} \mathbf{B} + B_{III} \mathbf{G}$$

La loi de comportement devient :

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma} = \frac{2\rho_0}{B_{III}^{\frac{1}{2}}} [B_{III} \partial_3 u_B \mathbf{G} + (\partial_1 u_B + B_I \partial_2 u_B) \mathbf{B} - \partial_2 u_B \mathbf{B}^2]} \quad (2.8)$$

Les directions propres du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ sont les mêmes que celles du tenseur de déformation \mathbf{B} (ainsi que \mathbf{V} et \mathbf{M}).

Remarque : On peut retrouver la loi en \mathbf{V} à partir de la loi en \mathbf{B} par simple changement de variables. Le détail des calculs est donné en 4.4.3 page 131.

2.3.4 Avec quelques tenseurs de déformation non objectifs couramment utilisés

Comme on l'aura compris, la déduction de la forme générale des lois de comportement de l'élasticité isotrope isotherme en utilisant d'autres tenseurs de déformation, se fait de la même manière. On se contente de donner ici quelques résultats, sélectionnés pour les remarques qu'ils suggèrent.

Avec la distorsion à droite \mathbf{U}

Le tenseur \mathbf{U} n'est pas objectif¹⁰.

Les variables d'état sont U_I , U_{II} et U_{III} .

La dilatation volumique est $K_v = U_{III}$.

En utilisant (E.44) page 232 on trouve la forme générale de la loi de comportement :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\rho_0}{U_{III}} \mathbf{R} \overline{\otimes} [(\partial_1 u_U + U_I \partial_2 u_U + U_{II} \partial_3 u_U) \mathbf{U} - (\partial_2 u_U + U_I \partial_3 u_U) \mathbf{U}^2 + \partial_3 u_U \mathbf{U}^3] \overline{\otimes} \mathbf{R}^T \quad (2.9)$$

En utilisant l'identité de Cayley-Hamilton (A.16) page 193, on abaisse le degré en \mathbf{U} :

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma} = \frac{\rho_0}{U_{III}} [U_{III} \partial_3 u_U \mathbf{G} + (\partial_1 u_U + U_I \partial_2 u_U) \mathbf{R} \overline{\otimes} \mathbf{U} \overline{\otimes} \mathbf{R}^T - \partial_2 u_U \mathbf{R} \overline{\otimes} \mathbf{U}^2 \overline{\otimes} \mathbf{R}^T]} \quad (2.10)$$

On doit remarquer que cette loi fait intervenir le tenseur orthogonal \mathbf{R} de la décomposition polaire de la transformation locale \mathbf{F} .

10. Mais sa formule de changement d'observateur est $\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{Q}_0 \overline{\otimes} \mathbf{U} \overline{\otimes} \mathbf{Q}_0^T$, elle entre donc dans le cadre de la condition nécessaire (2.2) page 105 pour que l'énergie interne massique soit une fonction isotrope.

Ceci se produit chaque fois qu'on utilise un tenseur de déformation non objectif. Pour s'en convaincre, il suffit d'examiner les expressions des dérivées particulières des tenseurs non objectifs dans l'annexe E section E.2 page 231.

On voit aussi que les directions propres du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ ne sont pas les mêmes que celles du tenseur de déformation \mathbf{U} . On vérifie facilement que ce sont les directions propres de $\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{R}^T \bar{\otimes} \boldsymbol{\sigma} \bar{\otimes} \mathbf{R}$ qui sont colinéaires à celles de \mathbf{U} .

Avec le tenseur de Green-Lagrange \mathbf{E}

Sans doute pour des raisons historiques¹¹, le tenseur de déformation \mathbf{E} est le plus populaire dans les codes de calcul et dans la littérature.

\mathbf{E} est non objectif¹².

Les variables d'état sont les invariants E_I , E_{II} et E_{III} .

La dilatation volumique est $K_v = (1 + 2 E_I + 4 E_{II} + 8 E_{III})^{\frac{1}{2}}$.

En utilisant (E.39) page 231 on trouve la forme générale de la loi de comportement :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} = & \frac{\rho_0}{(1 + 2 E_I + 4 E_{II} + 8 E_{III})^{\frac{1}{2}}} [\partial_1 u_E + E_I \partial_2 u_E + E_{II} \partial_3 u_E] \mathbf{R} \bar{\otimes} (2\mathbf{E} + \mathbf{G}) \bar{\otimes} \mathbf{R}^T \\ & - \frac{\rho_0}{(1 + 2 E_I + 4 E_{II} + 8 E_{III})^{\frac{1}{2}}} [\partial_2 u_E + E_I \partial_3 u_E] \mathbf{R} \bar{\otimes} (2\mathbf{E} + \mathbf{G})^{\frac{1}{2}} \bar{\otimes} \mathbf{E} \bar{\otimes} (2\mathbf{E} + \mathbf{G})^{\frac{1}{2}} \mathbf{R}^T \\ & + \frac{\rho_0}{(1 + 2 E_I + 4 E_{II} + 8 E_{III})^{\frac{1}{2}}} [\partial_3 u_E] \mathbf{R} \bar{\otimes} (2\mathbf{E} + \mathbf{G})^{\frac{1}{2}} \bar{\otimes} \mathbf{E}^2 \bar{\otimes} (2\mathbf{E} + \mathbf{G})^{\frac{1}{2}} \mathbf{R}^T \end{aligned} \quad (2.11)$$

qu'on peut simplifier en développant et en utilisant l'identité de Cayley-Hamilton pour abaisser le degré de \mathbf{E} .

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} = & \frac{\rho_0}{(1 + 2 E_I + 4 E_{II} + 8 E_{III})^{\frac{1}{2}}} [\partial_1 u_E + E_I \partial_2 u_E + (E_{II} + 2 E_{III}) \partial_3 u_E] \mathbf{R} \bar{\otimes} \mathbf{G} \bar{\otimes} \mathbf{R}^T \\ & + \frac{\rho_0}{(1 + 2 E_I + 4 E_{II} + 8 E_{III})^{\frac{1}{2}}} [2 \partial_1 u_E + (2 E_I - 1) \partial_2 u_E - E_I \partial_3 u_E] \mathbf{R} \bar{\otimes} \mathbf{E} \bar{\otimes} \mathbf{R}^T \\ & + \frac{\rho_0}{(1 + 2 E_I + 4 E_{II} + 8 E_{III})^{\frac{1}{2}}} [-2 \partial_2 u_E + \partial_3 u_E] \mathbf{R} \bar{\otimes} \mathbf{E}^2 \bar{\otimes} \mathbf{R}^T \end{aligned} \quad (2.12)$$

Le choix de \mathbf{E} est sans doute regrettable, l'utilisation du tenseur objectif $\mathbf{K} = \frac{1}{2} (\mathbf{V}^2 - \mathbf{G})$ aurait évité l'intervention des rotations dans l'expression des contraintes de Cauchy en fonction de la déformation, et les directions principales de $\boldsymbol{\sigma}$ et \mathbf{K} auraient été communes.

Cette loi n'est généralement pas donnée sous cette forme : en multipliant (2.11) à gauche par $(2\mathbf{E} + \mathbf{G})^{-\frac{1}{2}} \bar{\otimes} \mathbf{R}^T$, et à droite par $\mathbf{R} \bar{\otimes} (2\mathbf{E} + \mathbf{G})^{-\frac{1}{2}}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{(1 + 2 E_I + 4 E_{II} + 8 E_{III})^{\frac{1}{2}}}{\rho_0} (2\mathbf{E} + \mathbf{G})^{-\frac{1}{2}} \bar{\otimes} \mathbf{R}^T \bar{\otimes} \boldsymbol{\sigma} \bar{\otimes} \mathbf{R} \bar{\otimes} (2\mathbf{E} + \mathbf{G})^{-\frac{1}{2}} = \\ (\partial_1 u_E + E_I \partial_2 u_E + E_{II} \partial_3 u_E) \mathbf{G} - (\partial_2 u_E + E_I \partial_3 u_E) \mathbf{E} + \partial_3 u_E \mathbf{E}^2 \end{aligned} \quad (2.13)$$

11. l'habitude de manipuler des allongements relatifs plutôt que des dilatations linéiques et aussi une «objectivité» mal définie.

12. Mais sa formule de changement d'observateur est $\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{Q}_0 \bar{\otimes} \mathbf{E} \bar{\otimes} \mathbf{Q}_0^T$, elle entre donc dans le cadre de la condition nécessaire (2.2) page 105 pour que l'énergie interne massique soit une fonction isotrope.

Le terme de gauche de (2.13) est le second «tenseur des contraintes» de Piola-Kirchhoff \mathbf{S} introduit en 7.3.2 page 65, divisé par ρ_0 . En effet :

$$\begin{aligned} K_v &= (1 + 2 E_I + 4 E_{II} + 8 E_{III})^{\frac{1}{2}} = \det \mathbf{F} \\ \det \mathbf{F} (2 \mathbf{E} + \mathbf{G})^{-\frac{1}{2}} \otimes \mathbf{R}^T \otimes \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{R} \otimes (2 \mathbf{E} + \mathbf{G})^{-\frac{1}{2}} &= \det \mathbf{F} \mathbf{U}^{-1} \otimes \mathbf{R}^T \otimes \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{R} \otimes \mathbf{U}^{-1} \\ &= \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \otimes \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{F}^{-T} \\ &= \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \otimes \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{F}^{-T} \\ &= \mathbf{S} \end{aligned}$$

Par l'introduction de \mathbf{S} , l'écriture de la loi se trouve «simplifiée» : l'équation (2.13) devient

$$\frac{\mathbf{S}}{\rho_0} = (\partial_1 u_E + E_I \partial_2 u_E + E_{II} \partial_3 u_E) \mathbf{G} - (\partial_2 u_E + E_I \partial_3 u_E) \mathbf{E} + \partial_3 u_E \mathbf{E}^2 \quad (2.14)$$

mais l'expression des contraintes de Cauchy¹³ en fonction de la déformation \mathbf{E} reste celle donnée en (2.11).

En comparant le terme de droite de (2.14) avec l'équation (2.4) page 106, on constate que $\frac{\mathbf{S}}{\rho_0}$ n'est autre que le terme $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{E}}$ ¹⁴.

En fait, on peut «simplifier» l'expression des lois de comportement en fonction de n'importe quel tenseur de déformation \mathbf{X} en nommant «tenseur des contraintes» les quantités $\rho_0 \frac{\partial u}{\partial \mathbf{X}}$. Par exemple, le «tenseur des contraintes» associé à \mathbf{U} est $\rho_0 \frac{\partial u}{\partial \mathbf{U}} = \det \mathbf{U} \text{Sym} \left(\mathbf{R}^T \otimes \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{R} \otimes \mathbf{U}^{-1} \right)$ qui n'a pas plus de signification physique que \mathbf{S} .

Avec le tenseur de Cauchy-Green droit \mathbf{C}

Ce tenseur est couramment utilisé (voir section 2.7 page 115).

Le tenseur \mathbf{C} n'est pas objectif¹⁵.

La dilatation volumique est $K_v = C_{III}^{\frac{1}{2}}$.

La forme générale de la loi de comportement est :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2 \rho_0}{C_{III}^{\frac{1}{2}}} \mathbf{R} \otimes [(\partial_1 u_C + C_I \partial_2 u_C + C_{II} \partial_3 u_C) \mathbf{C} - (\partial_2 u_C + C_I \partial_3 u_C) \mathbf{C}^2 + \partial_3 u_C \mathbf{C}^3] \otimes \mathbf{R}^T \quad (2.15)$$

qu'on peut simplifier en développant et en utilisant l'identité de Cayley-Hamilton pour abaisser le degré de \mathbf{C} .

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2 \rho_0}{C_{III}^{\frac{1}{2}}} \mathbf{R} \otimes [C_{III} \partial_3 u_C \mathbf{G} + (\partial_1 u_C + C_I \partial_2 u_C) \mathbf{C} - \partial_2 u_C \mathbf{C}^2] \otimes \mathbf{R}^T \quad (2.16)$$

où $u = u_C(C_I, C_{II}, C_{III})$. Là encore, les rotations apparaissent en raison de la non objectivité de \mathbf{C} .

En multipliant (2.15) à gauche par $\mathbf{C}^{-\frac{1}{2}} \otimes \mathbf{R}^T$ et à droite par $\mathbf{R}^T \otimes \mathbf{C}^{-\frac{1}{2}}$, on obtient comme précédemment :

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\mathbf{S}}{2 \rho_0} = (\partial_1 u_C + C_I \partial_2 u_C + C_{II} \partial_3 u_C) \mathbf{G} - (\partial_2 u_C + C_I \partial_3 u_C) \mathbf{C} + \partial_3 u_C \mathbf{C}^2$$

13. Les seules qui aient une signification physique!

14. souvent dénommé «force thermodynamique associée à \mathbf{E} ».

15. Mais sa formule de changement d'observateur est $\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{Q}_0 \otimes \mathbf{C} \otimes \mathbf{Q}_0^T$, qui entre donc dans le cadre de la condition nécessaire (2.2) page 105 pour que l'énergie interne massique soit une fonction isotrope.

2.4 Discussion

La forme générale des lois de comportement dépend du tenseur de déformation choisi pour mesurer les déformations à partir de l'état naturel. On a vu que l'utilisation des tenseurs de déformation objectifs permet d'avoir des expressions de $\boldsymbol{\sigma}$ sans le terme \mathbf{R} de la décomposition polaire de \mathbf{F} :

- Si \mathbf{X} est un tenseur de déformation symétrique objectif (parmi \mathbf{B} , \mathbf{V} ou \mathbf{M}), la loi de comportement est de la forme

$$\boldsymbol{\sigma} = K_G \mathbf{G} + K_X \mathbf{X} + K_{X^2} \mathbf{X}^2$$

- Si \mathbf{X} est un tenseur de déformation symétrique non objectif (parmi \mathbf{C} , \mathbf{U} ou \mathbf{L}), la loi de comportement est de la forme

$$\boldsymbol{\sigma} = K_G \mathbf{G} + K_X \mathbf{R} \overline{\otimes} \mathbf{X} \overline{\otimes} \mathbf{R}^T + K_{X^2} \mathbf{R} \overline{\otimes} \mathbf{X}^2 \overline{\otimes} \mathbf{R}^T$$

où K_G , K_X et K_{X^2} sont des fonctions des invariants (X_I, X_{II}, X_{III}) du tenseur de déformation \mathbf{X} choisi.

La liberté de choix du tenseur de déformations conduit à la grande diversité d'écritures de la loi de comportement des milieux élastiques isotropes isothermes qu'on peut trouver dans la littérature.

La seule vraie diversité est dans le choix de l'expression de l'énergie interne u en fonction des invariants du tenseur de déformation choisi. Dans ce chapitre, on a pris soin de ne pas faire ce choix. *Il ne peut être décidé qu'à partir de constatations expérimentales sur le matériau qu'on veut modéliser.*

Beaucoup d'auteurs attachent de l'importance au fait que leur loi de comportement est «linéaire»¹⁶. Cependant, si l'expression des contraintes en fonction de la déformation mesurée par \mathbf{X} est «linéaire», elle ne l'est plus si on choisit un autre tenseur de déformation \mathbf{X}' , tout en gardant la même énergie interne, c'est-à-dire telle que

$$u = u_X(X_I, X_{II}, X_{III}) = u_{X'}(X'_I, X'_{II}, X'_{III})$$

Cette «linéarité» n'a donc pas de sens physique, car il n'y a aucune raison (hormis, l'objectivité, leur valeur pour une transformation rigide et la simplicité des expressions) de choisir parmi l'un ou l'autre des divers tenseurs de déformation.

En utilisant les remarques de la section (5.6) page 51, on voit que toutes ces expressions de la loi de comportement élastique isotrope en grandes déformations tendent vers la loi linéaire élastique isotrope en petites déformations quand on néglige les termes du second ordre en déformation¹⁷.

On peut toutefois orienter le choix pour des raisons diverses :

- Les tenseurs \mathbf{U} et \mathbf{V} ont des valeurs propres et des invariants qui ont une interprétation physique simple. Cette propriété peut être utile dans le choix d'une expression de l'énergie interne massique en fonction des invariants.
- Dans les codes de calcul, les inconnues sont souvent la description de Lagrange du champ des déplacements. On a donc besoin d'exprimer le tenseur de déformation en fonction du champ de déplacement. Selon le choix du tenseur de déformation, son calcul à partir du champ de déplacement peut être plus ou moins coûteux :

16. c'est-à-dire que l'énergie interne massique est choisie telle que K_G et K_X ne sont pas fonction des invariants et $K_{X^2} = 0$.

17. Ce résultat était évident *a priori* : toute loi en grandes déformations linéarisée autour de la transformation rigide conduit nécessairement à une loi linéaire en petites déformation!

On a vu en (5.17) page 50 que le gradient lagrangien de la description de Lagrange des déplacements est

$$\mathbf{grad}_L \boldsymbol{\xi} = \mathbf{H}_L = \mathbf{F} - \mathbf{G}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{H}_L + \mathbf{G} \\ \mathbf{C} = \mathbf{U}^2 &= \mathbf{F}^T \overline{\otimes} \mathbf{F} = \mathbf{H}_L^T \overline{\otimes} \mathbf{H}_L + \mathbf{H}_L + \mathbf{H}_L^T + \mathbf{G} \\ \mathbf{B} = \mathbf{V}^2 &= \mathbf{F} \overline{\otimes} \mathbf{F}^T = \mathbf{H}_L \overline{\otimes} \mathbf{H}_L^T + \mathbf{H}_L + \mathbf{H}_L^T + \mathbf{G} \end{aligned}$$

On voit donc que le calcul de \mathbf{U} ou \mathbf{V} nécessitent le calcul de la racine carrée d'un tenseur symétrique défini positif¹⁸, alors que les tenseurs

$$\begin{aligned} \mathbf{C} = \mathbf{U}^2 &= \mathbf{H}_L^T \overline{\otimes} \mathbf{H}_L + \mathbf{H}_L + \mathbf{H}_L^T + \mathbf{G} \\ \mathbf{E} &= \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{G}) = \frac{1}{2} (\mathbf{H}_L^T \overline{\otimes} \mathbf{H}_L + \mathbf{H}_L + \mathbf{H}_L^T) \\ \mathbf{B} = \mathbf{V}^2 &= \mathbf{H}_L \overline{\otimes} \mathbf{H}_L^T + \mathbf{H}_L + \mathbf{H}_L^T + \mathbf{G} \\ \mathbf{K} &= \frac{1}{2} (\mathbf{B} - \mathbf{G}) = \frac{1}{2} (\mathbf{H}_L \overline{\otimes} \mathbf{H}_L^T + \mathbf{H}_L + \mathbf{H}_L^T) \end{aligned}$$

ne nécessitent que des calculs matriciels.

- Le tenseur de déformation $\mathbf{M} = \mathbf{LnV}$ est objectif, nul pour une transformation rigide et ses valeurs propres varient entre $-\infty$ et $+\infty$. Son calcul à partir du champ de déplacements est aussi coûteux que celui de \mathbf{V} :

$$\mathbf{M} = \mathbf{LnV} = \frac{1}{2} \mathbf{LnB} = \frac{1}{2} \mathbf{Ln} (\mathbf{H}_L \overline{\otimes} \mathbf{H}_L^T + \mathbf{H}_L + \mathbf{H}_L^T + \mathbf{G})$$

On a établi en 5.6.2 page 55 une propriété qui sera utilisée dans le chapitre suivant : sa décomposition additive en parties sphériques et déviatorique s'interprète comme une décomposition de la transformation en une dilatation sphérique et une transformation isovolume.

2.5 Loi tangente

Un problème d'élasticité isotrope en déformations finies est un problème fondamentalement non linéaire. La plupart des codes de calcul par éléments finis utilisent une «loi tangente»¹⁹ valable au voisinage d'un état de déformation donné.

Pour un tenseur de déformation objectif \mathbf{X} choisi parmi \mathbf{B} , \mathbf{V} ou \mathbf{M} , la loi de comportement est de la forme $\boldsymbol{\sigma} = K_G \mathbf{G} + K_X \mathbf{X} + K_{X^2} \mathbf{X}^2$. On obtient :

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \dot{K}_G \mathbf{G} + \dot{K}_X \mathbf{X} + K_X \dot{\mathbf{X}} + \dot{K}_{X^2} \mathbf{X}^2 + K_{X^2} (\mathbf{X} \overline{\otimes} \dot{\mathbf{X}} + \dot{\mathbf{X}} \overline{\otimes} \mathbf{X}) \\ &= (\partial_1 K_G \dot{X}_I + \partial_2 K_G \dot{X}_{II} + \partial_3 K_G \dot{X}_{III}) \mathbf{G} \\ &+ (\partial_1 K_X \dot{X}_I + \partial_2 K_X \dot{X}_{II} + \partial_3 K_X \dot{X}_{III}) \mathbf{X} \\ &+ (\partial_1 K_{X^2} \dot{X}_I + \partial_2 K_{X^2} \dot{X}_{II} + \partial_3 K_{X^2} \dot{X}_{III}) \mathbf{X}^2 \\ &+ K_X \dot{\mathbf{X}} + K_{X^2} (\mathbf{X} \overline{\otimes} \dot{\mathbf{X}} + \dot{\mathbf{X}} \overline{\otimes} \mathbf{X}) \end{aligned}$$

18. Il faut calculer les valeurs propres et la base propre, calculer la racine des valeurs propres puis revenir à la base initiale.

19. En fait, l'introduction d'une loi tangente n'est pas strictement nécessaire dans un cours de mécanique : il ne s'agit que d'une interprétation mécanique d'un algorithme de résolution d'un système d'équations algébriques non linéaire.

En utilisant les dérivées des invariants (B.1) page 212 il vient :

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} = & \left(\partial_1 K_G \mathbf{G} \overline{\otimes} \dot{\mathbf{X}} + \partial_2 K_G (X_I \mathbf{G} - \mathbf{X}) \overline{\otimes} \dot{\mathbf{X}} + \partial_3 K_G (X_{II} \mathbf{G} - X_I \mathbf{X} + \mathbf{X}^2) \overline{\otimes} \dot{\mathbf{X}} \right) \mathbf{G} \\ & + \left(\partial_1 K_X \mathbf{G} \overline{\otimes} \dot{\mathbf{X}} + \partial_2 K_X (X_I \mathbf{G} - \mathbf{X}) \overline{\otimes} \dot{\mathbf{X}} + \partial_3 K_X (X_{II} \mathbf{G} - X_I \mathbf{X} + \mathbf{X}^2) \overline{\otimes} \dot{\mathbf{X}} \right) \mathbf{X} \\ & + \left(\partial_1 K_{X^2} \mathbf{G} \overline{\otimes} \dot{\mathbf{X}} + \partial_2 K_{X^2} (X_I \mathbf{G} - \mathbf{X}) \overline{\otimes} \dot{\mathbf{X}} + \partial_3 K_{X^2} (X_{II} \mathbf{G} - X_I \mathbf{X} + \mathbf{X}^2) \overline{\otimes} \dot{\mathbf{X}} \right) \mathbf{X}^2 \\ & + K_X \dot{\mathbf{X}} + K_{X^2} (\mathbf{X} \overline{\otimes} \dot{\mathbf{X}} + \dot{\mathbf{X}} \overline{\otimes} \mathbf{X}) \end{aligned}$$

En utilisant les propriétés algébriques données en A.2.6 page 189, on trouve :

$$\dot{\sigma} = \mathbb{K} \overline{\otimes} \dot{\mathbf{X}} \quad (2.17)$$

où \mathbb{K} est le tenseur du quatrième ordre suivant :

$$\begin{aligned} \mathbb{K} = & \underbrace{(\partial_1 K_G + X_I \partial_2 K_G + X_{II} \partial_3 K_G)}_{K_{GG}} \mathbf{G} \otimes \mathbf{G} + \underbrace{(-\partial_2 K_G - X_I \partial_3 K_G)}_{K_{GX}} \mathbf{G} \otimes \mathbf{X} + \underbrace{\partial_3 K_G}_{K_{GX^2}} \mathbf{G} \otimes \mathbf{X}^2 \\ & + \underbrace{(\partial_1 K_X + X_I \partial_2 K_X + X_{II} \partial_3 K_X)}_{K_{XG}} \mathbf{X} \otimes \mathbf{G} + \underbrace{(-\partial_2 K_X - X_I \partial_3 K_X)}_{K_{XX}} \mathbf{X} \otimes \mathbf{X} + \underbrace{\partial_3 K_X}_{K_{XX^2}} \mathbf{X} \otimes \mathbf{X}^2 \\ & + \underbrace{(\partial_1 K_{X^2} + X_I \partial_2 K_{X^2} + X_{II} \partial_3 K_{X^2})}_{K_{X^2G}} \mathbf{X}^2 \otimes \mathbf{G} + \underbrace{(-\partial_2 K_{X^2} - X_I \partial_3 K_{X^2})}_{K_{X^2X}} \mathbf{X}^2 \otimes \mathbf{X} + \underbrace{\partial_3 K_{X^2}}_{K_{X^2X^2}} \mathbf{X}^2 \otimes \mathbf{X}^2 \\ & + K_X \mathbf{G} \boxtimes \mathbf{G} + K_{X^2} (\mathbf{X} \boxtimes \mathbf{G} + \mathbf{G} \boxtimes \mathbf{X}) \end{aligned}$$

La loi $\dot{\sigma} = \mathbb{K} \overline{\otimes} \dot{\mathbf{X}}$ est appelée *loi tangente* d'un milieu élastique isotrope isotherme.

Ainsi, quand on connaît l'expression de l'énergie interne massique en fonction des invariants, on peut évaluer le tenseur \mathbb{K} au voisinage d'un état caractérisé par la déformation \mathbf{X} (d'invariants X_I , X_{II} et X_{III}). L'«accroissement de contrainte»²⁰ peut s'écrire : $d\sigma = \mathbb{K} \overline{\otimes} d\mathbf{X}$.

Les expressions de K_G , K_X et K_{X^2} pour les tenseurs \mathbf{M} , \mathbf{V} et \mathbf{B} sont donnés respectivement en (2.6) page 107, (2.7) page 107 et (2.8) page 108. Les K_{GG} , K_{GX} , K_{GX^2} , \dots s'en déduisent par les formules ci-dessus.

Il est facile de vérifier que le tenseur \mathbb{K} a la propriété de symétrie suivante :

$$\mathbb{K}_{ijkl} = \mathbb{K}_{jilk}$$

qui assure la symétrie de $\dot{\sigma}$ quand on contracte \mathbb{K} avec un tenseur symétrique $\dot{\mathbf{X}}$ ²¹.

De plus, si \mathbf{X} est objectif, le tenseur \mathbb{K} est objectif.

En effet, si \mathbf{X} est un tenseur objectif, ses invariants sont des scalaires objectifs²². Les fonctions scalaires $K_G(X_I, X_{II}, X_{III})$, $K_X(X_I, X_{II}, X_{III})$ et $K_{X^2}(X_I, X_{II}, X_{III})$ le sont donc aussi. Pour tous les observateurs ces valeurs scalaires sont donc identiques.

On vérifie facilement que les formules de changement d'observateur $\tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{G}$ et $\tilde{\mathbf{X}} = (\mathbf{Q}_t \boxtimes \mathbf{Q}_t) \overline{\otimes} \mathbf{X}$

20. Pour calculer un «accroissement de contrainte», la plupart des codes de calculs utilisent un concept bizarre nommé «dérivée objective» (dans la littérature, on en propose d'ailleurs plusieurs, toutes différentes, et seul le tenseur des contraintes a l'honneur de pouvoir être dérivé ainsi!). Ce sont toutes des «dérivées» de σ «par rapport à des repères mobiles» plus ou moins liés à une partie du mouvement local de la matière. La raison de leur introduction est peut-être que l'expression de \mathbb{K} , qui donne la dérivée exacte, leur semble compliquée (surtout si on utilise, comme dans la plupart des codes de calcul, un tenseur de déformation non objectif). Elle ne contient pourtant que des calculs algébriques qui ne posent pas de problème particulier avec un ordinateur.

21. Dans la loi tangente, on peut remplacer le tenseur \mathbb{K} par le tenseur \mathbb{K}' défini par $K'_{ijkl} = \frac{1}{2}K_{ijkl} + K_{ijlk}$. Puisque $\dot{\mathbf{X}}$ est symétrique, on a évidemment $\mathbb{K} \overline{\otimes} \dot{\mathbf{X}} = \mathbb{K}' \overline{\otimes} \dot{\mathbf{X}}$.

22. voir 3.3.2 page 27

entraînent²³ l'objectivité des tenseurs du quatrième ordre $\mathbf{G} \otimes \mathbf{G}$, $\mathbf{G} \otimes \mathbf{X}$, $\mathbf{G} \otimes \mathbf{X} \dots$ et donc le tenseur \mathbb{K} est objectif. Sa formule de changement d'observateur est :

$$\tilde{\mathbb{K}} = (\mathbf{Q}_t \boxtimes \mathbf{Q}_t \boxtimes \mathbf{Q}_t \boxtimes \mathbf{Q}_t) \overline{\otimes}^4 \mathbb{K}$$

Par contre, les tenseurs $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ et $\dot{\mathbf{X}}$ ne sont pas objectifs²⁴.

En prenant comme *définition* de \mathbb{K} celle donnée ci-dessus (c'est à dire une certaine fonction des variables d'état X_I, X_{II}, X_{III} et du tenseur de déformation symétrique objectif $\mathbf{X} = \mathbf{M}, \mathbf{V}$ ou \mathbf{B}), la relation $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{K} \overline{\otimes} \dot{\mathbf{X}}$ est une relation universelle, c'est-à-dire une loi²⁵ entre grandeurs non objectives.

Remarque: L'écriture d'une loi tangente de comportement élastique isotrope isotherme de la forme $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{K} \overline{\otimes} \dot{\mathbf{X}}$ pour un tenseur \mathbf{X} non objectif serait très compliquée en raison de la présence de \mathbf{R} dans la loi de comportement. Elle donnerait un tenseur \mathbb{K} qui serait non objectif et qui contiendrait des $\dot{\mathbf{R}}$.

2.6 Identification d'un matériau élastique isotrope

La détermination expérimentale de l'expression de l'énergie interne en fonction du tenseur des déformations est un problème expérimental difficile : en effet, il n'est pas évident de contrôler de manière commode et fiable un tenseur de déformation tridirectionnel uniforme dans une éprouvette.

Si un tel dispositif existait, il suffirait de définir la fonction d'état «énergie interne par unité de masse» u en mesurant le travail mécanique à fournir pour aller de l'état naturel à une famille d'états²⁶ suffisamment dispersés dans l'espace (X_I, X_{II}, X_{III}) . Une interpolation entre ces états fournirait une expression de u .

Le plus souvent, on cherche une expression mathématique de u en fonction des invariants du tenseur de déformation (ou en fonction des valeurs propres de déformation²⁷), qui contient des coefficients pour l'ajuster à des mesures expérimentales. Ce choix doit être orienté par des considérations de vraisemblance :

- l'énergie interne doit être minimum et nulle pour toute transformation rigide à partir de l'état naturel.
- les courbes d'évolution des contraintes en fonction des déformations doivent avoir le bon goût d'être régulières.
- les coefficients introduits doivent avoir, de préférence, une interprétation physique.

Le chapitre suivant propose des exemples de construction de lois de comportement de milieux élastiques isotopes qui satisfont à ces exigences.

23. en utilisant les formules d'algèbre données en (A.8) et (A.9) page 190.

24. voir 3.3.5 page 30.

25. Voir note 5 page 34. Pour un observateur \tilde{O} , on aura $\dot{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} = \tilde{\mathbb{K}} \overline{\otimes} \dot{\tilde{\mathbf{X}}}$. Certains auteurs proposent des lois de comportement sous cette forme. Le milieu est alors qualifié d'«hypoélastique». En effet, ce n'est pas, en général, une loi élastique (c'est-à-dire sans dissipation intrinsèque), sauf si le tenseur \mathbb{K} a la forme donnée ci-dessus.

26. Dans ces mesures, on peut négliger les phénomènes thermiques, et on peut avoir une variation d'énergie cinétique nulle si on ne mesure que des travaux entre des états arrêtés. La conservation de l'énergie implique alors que $U_2 - U_1 = W_1^2$

27. Mais attention au respect de l'isotropie! l'échange ou la rotation des valeurs propres doit laisser l'énergie interne inchangée.

2.7 Quelques lois couramment rencontrées dans les codes de calcul

2.7.1 Loi de Piola-Kirchhoff

Cette loi utilise \mathbf{E} comme tenseur des déformations. L'énergie interne massique²⁸ proposée est :

$$u = \frac{1}{2\rho_0} [\lambda E_I^2 + 2\mu (E_I^2 - 2E_{II})]$$

En utilisant (2.12) page 109, la loi de comportement est :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\rho_0}{(1 + 2E_I + 4E_{II} + 8E_{III})^{\frac{1}{2}}} \mathbf{R} \overline{\otimes} [\lambda E_I \mathbf{G} + 2(\lambda E_I + \mu) \mathbf{E} + 4\mu \mathbf{E}^2] \overline{\otimes} \mathbf{R}^T$$

soit encore, en utilisant (2.14) page 110 :

$$\mathbf{S} = \lambda E_I \mathbf{G} + 2\mu \mathbf{E}$$

Défaut :

Pour une contraction uniforme dans la direction \mathbf{u} , c'est-à-dire $\mathbf{E} = k\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$, la contrainte de Cauchy $\mathbf{u} \overline{\otimes} \boldsymbol{\sigma} \overline{\otimes} \mathbf{u}$ n'est pas monotone pour les valeurs négatives de k . Elle tend curieusement vers 0 pour les grandes contractions (c'est-à-dire $k \rightarrow -\frac{1}{2}$).

2.7.2 Le modèle Neo-Hookien

Cette loi utilise \mathbf{C} comme mesure des déformations, et l'énergie interne par unité de masse est :

$$u := \frac{a}{\rho_0} (C_I - 3)$$

En utilisant (2.16) page 110, la loi de comportement serait :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2a}{C_{III}^{\frac{3}{2}}} \mathbf{R} \overline{\otimes} \mathbf{C} \overline{\otimes} \mathbf{R}^T$$

Défaut :

La contrainte n'est pas nulle pour une transformation rigide.

Remarque : Cette loi a été proposée pour modéliser des matériaux parfaitement incompressibles²⁹. La contrainte sphérique devrait donc être indéterminée pour toute transformation incompressible. Or, la loi de comportement ci dessus devient pour une transformation incompressible ($C_{III} = 1$):

$$\boldsymbol{\sigma} = 2a \mathbf{R} \overline{\otimes} \mathbf{C} \overline{\otimes} \mathbf{R}^T$$

qui est loin d'être indéterminée !

28. On la propose aussi parfois comme une énergie interne volumique et non massique. Mais de quel volume s'agit-il? Du volume initial ou du volume actuel? En grandes déformations on ne peut pas les confondre. La seule qui aurait un sens physique serait l'énergie de déformation par unité de volume actuel. Mais le principe de la conservation de l'énergie s'écrit avec les énergies massiques et non volumiques. Si on omet le facteur $\frac{1}{\rho_0}$, le reste peut être présenté comme l'énergie interne massique à l'instant t par unité de volume à l'instant t_0 !

29. dans la mesure où de tels matériaux existent.

Pour «rattrapper» ce problème, on pose que la loi n'est pas la loi précédente, mais

$$\text{Dev}(\boldsymbol{\sigma}) = 2 a \mathbf{R} \overline{\otimes} \mathbf{C} \overline{\otimes} \mathbf{R}^T$$

\mathbf{C} serait donc déviatorique³⁰. Or le tenseur \mathbf{C} est symétrique défini positif. Il ne peut donc jamais être un déviateur pur.

Dans les codes de calcul qui utilisent cette loi, on «corrige» la contrainte en lui ajoutant un terme sphérique (qui ne dérive d'aucune énergie), en pensant (à tort³¹) que la partie sphérique d'un tenseur des contraintes provient uniquement des dilatations sphériques. On a, de plus, beaucoup de peine à assurer numériquement que le champ de déplacements inconnu soit effectivement isovolume.

Comme on le voit, l'étude de l'élasticité isotrope incompressible n'est pas un cas particulier de l'élasticité isotrope ordinaire ! La raison profonde est que l'espace des états d'un milieu incompressible a une dimension de moins. Ce cas sera traité dans le cadre plus général de la thermoélasticité (voir 6.7 page 146). Il paraît tout aussi raisonnable³², pour lever l'indétermination, de construire des lois de comportement déduites d'une expression de l'énergie interne en fonction de la déformation, dans lesquelles l'énergie interne massique croît rapidement avec la dilatation volumique³³. La forme générale des lois de comportement (thermo-)élastiques parfaitement incompressibles est donnée plus loin en section 6.7 page 146.

2.7.3 Le modèle de Mooney-Rivlin

$$u := \frac{1}{\rho_0} [a (C_I - 3) + b (C_{II} - 3)]$$

où C_{II} est le second invariant de $\mathbf{C} = \mathbf{U}^2$.

En utilisant (2.16) page 110, la loi de comportement serait :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2 a}{\sqrt{C_{III}}} \mathbf{R} \overline{\otimes} [(a + C_I b) \mathbf{C} - b \mathbf{C}^2] \overline{\otimes} \mathbf{R}^T$$

Mais on pose habituellement pour les matériaux incompressibles :

$$\text{Dev}(\boldsymbol{\sigma}) = 2 a \mathbf{R} \overline{\otimes} [(a + C_I b) \mathbf{C} - b \mathbf{C}^2] \overline{\otimes} \mathbf{R}^T$$

Ce modèle appelle les mêmes remarques que le modèle Neo-Hookien.

2.7.4 Le modèle d'Ogden

$$u := \frac{1}{\rho_0} \sum_{k=1}^n \frac{\mu_k}{\alpha_k} (\lambda_1^{\alpha_k} + \lambda_2^{\alpha_k} + \lambda_3^{\alpha_k} - 3)$$

où λ_1, λ_2 et λ_3 sont les valeurs propres de \mathbf{U} (ou de \mathbf{V}). Bien que non exprimée en fonction des invariants d'un tenseur de déformation, cette expression est bien une fonction isotrope de \mathbf{U} (ou de \mathbf{V}). Cette loi est très générale, mais, à cause de sa forme polynomiale, elle peut conduire à des variations non monotones de la contrainte de Cauchy en fonction de la déformation, suivant les choix des coefficients μ_k et α_k .

³⁰. à noter que si \mathbf{C} est déviatorique, on a $C_I = 0$, ce qui rendrait l'expression de l'énergie interne massique constante et négative!

³¹. Cette faute de raisonnement est sans doute un héritage d'habitudes prises en petites déformations

³². et plus physique...

³³. ce qui numériquement est équivalent à une technique de pénalisation pour assurer l'incompressibilité.

2.8 En bref ...

Les idées essentielles :

- L'élasticité est l'étude des milieux intrinsèquement réversibles.
- L'élasticité isotrope isotherme est l'étude des milieux élastiques à une seule variable d'état tensorielle (la déformation), c'est-à-dire à trois variables d'état scalaires (3 invariants de la déformation).
- Les hypothèses ci dessus sont suffisantes pour donner une forme générale des lois de comportement élastiques isotropes isothermes. La loi est complètement déterminée par l'expression de l'énergie interne massique en fonction des variables d'état.
- Un milieu continu élastique isotrope isotherme est donc complètement modélisé par l'expression de son énergie interne massique en fonction des invariants de déformation.

Les choses qu'il vaut mieux éviter :

- Utiliser un tenseur de déformation non objectif. Les tenseurs objectifs qui paraissent les plus commodes sont \mathbf{B} , \mathbf{V} et \mathbf{M} .
- Donner une loi de comportement élastique sous forme de loi tangente sans être certain de la nullité de la dissipation intrinsèque.
- Parler de «dérivées objectives». D'une manière générale, la dérivée particulière d'un tenseur objectif n'est pas un tenseur objectif. Cette non objectivité de la dérivée n'empêche pas de pouvoir écrire une loi tangente universelle.

Chapitre 3

Exemples de construction de lois de comportement isotropes.

Comme on l'a vu dans le chapitre précédent, pour modéliser le comportement d'un milieu élastique isotrope en évolution isotherme, il suffit de proposer une expression de l'énergie interne massique en fonction des invariants d'un tenseur de déformation.

Pour que cette proposition soit acceptable, elle doit satisfaire un certain nombre d'exigences :

- l'énergie doit être nulle pour toute transformation rigide à partir de l'état naturel
- La contrainte de Cauchy doit être nulle pour toute transformation rigide à partir de l'état naturel
- L'évolution de contraintes en fonction des déformations doit être régulière, et le comportement aux limites doit être cohérent.

3.1 Une décomposition de la déformation

Afin d'obtenir des coefficients significatifs, on peut décomposer toute transformation en une composition d'une dilatation sphérique et d'une déformation isovolume de la manière suivante :

$$\mathbf{F} = \underbrace{\left[(\det \mathbf{F})^{\frac{1}{3}} \mathbf{G} \right]}_{\mathbf{F}_2} \otimes \underbrace{\left[\frac{1}{(\det \mathbf{F})^{\frac{1}{3}}} \mathbf{F} \right]}_{\mathbf{F}_1}$$

Le produit est commutatif, on peut donc définir pour la particule deux successions d'états fictifs :

$$\begin{aligned} E_0 &\xrightarrow{\mathbf{F}_1} E_1 \xrightarrow{\mathbf{F}_2} E_t \\ E_0 &\xrightarrow{\mathbf{F}_2} E'_1 \xrightarrow{\mathbf{F}_1} E'_t \end{aligned}$$

Si \mathbf{X} est le tenseur de déformation symétrique choisi pour mesurer les déformations de ces transformations, alors l'énergie interne massique est de la forme :

$$u = u_{\mathbf{X}} (X_I, X_{II}, X_{III})$$

L'énergie interne étant une fonction d'état, on peut décomposer la variation d'énergie interne massique entre l'état naturel et l'état actuel en les sommes suivantes:

$$\begin{aligned}\delta u_0^t &= \delta u_0^1 + \delta u_1^t \\ &= \delta u_0^{1'} + \delta u_1^t,\end{aligned}$$

soit encore, puisque la référence des énergies internes massiques est l'état E_0 :

$$\begin{aligned}u_t &= u_1 + \delta u_1^t \\ &= u_{1'} + \delta u_1^t,\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}u_X(X_I, X_{II}, X_{III}) &= \underbrace{u_X((X_1)_I, (X_1)_{II}, (X_1)_{III})}_{\delta u_0^1 \text{ dû à } \mathbf{F}_1} + \delta u_1^t \\ &= \underbrace{u_X((X_2)_I, (X_2)_{II}, (X_2)_{III})}_{\delta u_0^{1'} \text{ dû à } \mathbf{F}_2} + \delta u_1^t,\end{aligned}$$

A priori, les variations d'énergie interne massique δu_1^t et $\delta u_0^{1'}$ (les dilatations sphériques) sont différentes car elles dilatent des états initiaux différents. De même, les deux variations d'énergie interne massique δu_0^1 et δu_1^t (les déformations isovolumes) le sont aussi pour la même raison. On a donc en général:

$$\begin{aligned}u_X((X_1)_I, (X_1)_{II}, (X_1)_{III}) &\neq \delta u_1^t, \\ u_X((X_2)_I, (X_2)_{II}, (X_2)_{III}) &\neq \delta u_1^t\end{aligned}$$

Si on admet que les variations d'énergie interne massique des transformations \mathbf{F}_1 et \mathbf{F}_2 sont indépendantes de leur état initial, alors on peut écrire:

$$u_X(X_I, X_{II}, X_{III}) = u_X((X_1)_I, (X_1)_{II}, (X_1)_{III}) + u_X((X_2)_I, (X_2)_{II}, (X_2)_{III})$$

Si on ne l'admet pas, on peut chercher des énergies internes massiques de la forme¹:

$$\begin{aligned}u_X(X_I, X_{II}, X_{III}) &= C_1((X_2)_I, (X_2)_{II}, (X_2)_{III}) u_X((X_1)_I, (X_1)_{II}, (X_1)_{III}) \\ &\quad + C_2((X_1)_I, (X_1)_{II}, (X_1)_{III}) u_X((X_2)_I, (X_2)_{II}, (X_2)_{III})\end{aligned}$$

où C_1 et C_2 sont des coefficients correcteurs des variations d'énergie interne des transformations \mathbf{F}_1 et \mathbf{F}_2 en fonction de leur état initial.

Il est suffisant de ne considérer qu'une seule des décompositions fictives, ce qui donne un seul coefficient correcteur. On choisit, par exemple, la décomposition $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 \otimes \mathbf{F}_2$ (transformation isovolume suivie d'une dilatation sphérique), on a:

$$\begin{aligned}u_X(X_I, X_{II}, X_{III}) &= \underbrace{C_1((X_2)_I, (X_2)_{II}, (X_2)_{III}) u_X((X_1)_I, (X_1)_{II}, (X_1)_{III})}_{\delta u_1^t = C_1 \delta u_0^1} \\ &\quad + \underbrace{u_X((X_2)_I, (X_2)_{II}, (X_2)_{III})}_{\delta u_0^{1'} = u_{1'}}\end{aligned}\tag{3.1}$$

Dans les propositions qui suivent, on cherche des énergies internes massiques de cette forme.

1. Il est aussi possible de chercher des couplages plus compliqués.

3.2 Une loi $\sigma = f(\mathbf{V})$

On utilise la distorsion à gauche \mathbf{V} pour mesurer les déformations.

Le seul invariant utile de la dilatation sphérique \mathbf{F}_2 est sa dilatation volumique :

$$(V_2)_{III} = \det \mathbf{F} = V_{III}$$

Les seuls invariants utiles de la déformation isovolume \mathbf{F}_1 (voir section C.7 page 223) sont :

$$(V_1)_I = \frac{V_I}{V_{III}^{\frac{1}{3}}} > 3 \qquad (V_1)_{II} = \frac{V_{II}}{V_{III}^{\frac{2}{3}}} > 3$$

On cherche donc une énergie interne massique de la forme

$$u_V(V_I, V_{II}, V_{III}) = \underbrace{C_1(V_{III}) u_1\left(\frac{V_I}{V_{III}^{\frac{1}{3}}}, \frac{V_{II}}{V_{III}^{\frac{2}{3}}}\right)}_{\delta u_1' = C_1 u_1'} + \underbrace{u_2(V_{III})}_{u_2'}$$

Pour simplifier², on suppose que l'énergie de \mathbf{F}_1 ne dépend que de $\frac{V_I}{V_{III}^{\frac{1}{3}}}$:

$$u_V(V_I, V_{II}, V_{III}) = C_1(V_{III}) u_1\left(\frac{V_I}{3 V_{III}^{\frac{1}{3}}}\right) + u_2(V_{III})$$

avec les conditions physiquement raisonnables suivantes :

$$\begin{aligned} u_1(1) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u_1(x) = +\infty \quad \left[\frac{du_1}{dx} \right]_{x>1} &> 0 \\ u_2(1) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} u_2(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u_2(x) = +\infty \quad \left[\frac{du_2}{dx} \right]_{x>1} &> 0 \quad \left[\frac{du_2}{dx} \right]_{x<1} > 0 \\ C_1(1) = 1 \quad C_1(x) > 0 \quad \forall x > 0 \end{aligned}$$

Pour répondre à ces conditions, on peut choisir :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{K_1}{\rho_0} \left(\frac{\left(\frac{V_I}{3 V_{III}^{\frac{1}{3}}} \right)^r}{r} - \frac{1}{r} \right) = \frac{K_1}{\rho_0 r} \left(\left(\frac{V_I}{3 V_{III}^{\frac{1}{3}}} \right)^r - 1 \right) \quad C_1 = V_{III}^{c_1} \\ u_2 &= \frac{K_2}{\rho_0} \left(\frac{V_{III}^p}{p} + \frac{V_{III}^{-q}}{q} - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \end{aligned}$$

$r > 0$ est un paramètre à ajuster pour les déformations isovolumes.

$p > 0$ est un paramètre à ajuster pour les dilatations sphériques.

$q > 0$ est un paramètre à ajuster pour les compressions sphériques.

$c_1 > 0$ est un paramètre pour ajuster la sensibilité de la déformation isovolume à une dilatation sphérique initiale.

$K_1 > 0$ et $K_2 > 0$ sont des constantes³.

2. On peut le justifier partiellement, dans la représentation octaédrique des tenseurs symétriques définis positifs, en observant la forme de la surface des tenseurs de déterminant unité.

3. On verra un peu plus loin qu'elles reflètent le comportement au voisinage de la transformation rigide, c'est-à-dire aux petites déformations.

Si on estime que l'énergie de déformation isovolume est insensible à une dilatation sphérique initiale, il suffit de prendre $c_1 = 0$.

En utilisant la forme générale de la loi de comportement avec le tenseur \mathbf{V} donnée en (2.7) page 107, la loi de comportement $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}(\mathbf{V})$ est :

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma} = K_G \mathbf{G} + K_V \mathbf{V} + K_{V^2} \mathbf{V}^2}$$

où les K_G, K_V et K_{V^2} sont :

$$K_G = \frac{c_1 K_1 V_{III}^{c_1-1}}{r} \left(\left(\frac{V_I}{3 V_{III}^{\frac{1}{3}}} \right)^r - 1 \right) - \frac{K_1 V_{III}^{c_1-1}}{3} \left(\frac{V_I}{3 V_{III}^{\frac{1}{3}}} \right)^r + K_2 (V_{III}^{p-1} - V_{III}^{-q-1})$$

$$K_V = \frac{K_1 V_{III}^{c_1-1}}{3 V_I} \left(\frac{V_I}{3 V_{III}^{\frac{1}{3}}} \right)^r$$

$$K_{V^2} = 0$$

On vérifie aisément que si \mathbf{F} est une transformation rigide ($\mathbf{V} = \mathbf{G}$; $V_I = 3$; $V_{III} = 1$), on a

$$K_G = -\frac{K_1}{3} \quad ; \quad K_V = +\frac{K_1}{3}$$

et donc que le tenseur des contraintes est bien nul.

Interprétations des K_1 et K_2 :

Si la transformation \mathbf{F} est une extension dans la direction \mathbf{i} (voir (C.3) page 215), on a :

$$V_I = 2 + k$$

$$V_{III} = k$$

$$K_G = \frac{c_1 K_1 k^{c_1-1}}{r} \left(\left(\frac{2+k}{3 k^{\frac{1}{3}}} \right)^r - 1 \right) - \frac{K_1 k^{c_1-1}}{3} \left(\frac{2+k}{3 k^{\frac{1}{3}}} \right)^r + K_2 (k^{p-1} - k^{-q-1})$$

$$K_V = \frac{K_1 k^{c_1-1}}{3(2+k)} \left(\frac{2+k}{3 k^{\frac{1}{3}}} \right)^r$$

$$\boldsymbol{\sigma} = (K_G + K_V) \mathbf{G} + (k-1) K_V \mathbf{i} \otimes \mathbf{i}$$

La contrainte dans la direction \mathbf{i} est : $\boldsymbol{\sigma} \bar{\otimes} \mathbf{i} = (K_G + k K_V) \mathbf{i}$.

La contrainte dans une direction $\mathbf{j} \perp \mathbf{i}$ est : $\boldsymbol{\sigma} \bar{\otimes} \mathbf{j} = (K_G + K_V) \mathbf{j}$.

Au voisinage de la transformation rigide, les dérivées de la contrainte par rapport à l'allongement sont :

$$\left[\frac{d(\mathbf{i} \bar{\otimes} \boldsymbol{\sigma} \bar{\otimes} \mathbf{i})}{dk} \right]_{k=1} = \left[\frac{d(K_G + k K_V)}{dk} \right]_{k=1} = (p+q) K_2 + \frac{2}{9} K_1$$

$$\left[\frac{d(\mathbf{j} \bar{\otimes} \boldsymbol{\sigma} \bar{\otimes} \mathbf{j})}{dk} \right]_{k=1} = \left[\frac{d(K_G + K_V)}{dk} \right]_{k=1} = (p+q) K_2 - \frac{1}{9} K_1$$

Or, en petites déformations, $\boldsymbol{\sigma} = 2 \mu_0 \boldsymbol{\epsilon} + \lambda_0 \text{Tr} \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{G}$, où λ_0 et μ_0 sont les coefficients de Lamé. Le tenseur des petites déformations dans l'extension uniaxiale de direction \mathbf{i} est $\boldsymbol{\epsilon} = (k-1) \mathbf{i} \otimes \mathbf{i}$, de trace $k-1$. On a donc :

$$\mathbf{i} \bar{\otimes} \boldsymbol{\sigma} \bar{\otimes} \mathbf{i} = (2 \mu_0 + \lambda_0) (k-1) \quad \Rightarrow \quad \frac{d(\mathbf{i} \bar{\otimes} \boldsymbol{\sigma} \bar{\otimes} \mathbf{i})}{dk} = 2 \mu_0 + \lambda_0$$

$$\mathbf{j} \bar{\otimes} \boldsymbol{\sigma} \bar{\otimes} \mathbf{j} = \lambda_0 (k-1) \quad \Rightarrow \quad \frac{d(\mathbf{j} \bar{\otimes} \boldsymbol{\sigma} \bar{\otimes} \mathbf{j})}{dk} = \lambda_0$$

Au voisinage de la transformation rigide, on a donc

$$(p+q)K_2 + \frac{2}{9}K_1 = 2\mu_0 + \lambda_0 \quad \text{et} \quad (p+q)K_2 - \frac{1}{9}K_1 = \lambda_0$$

Ce qui fournit les interprétations de K_1 et K_2 :

$$K_1 = 6\mu_0 ; \quad K_2 = \frac{2\mu_0 + 3\lambda_0}{3(p+q)}$$

Loi tangente:

La loi tangente au voisinage d'un état de déformation \mathbf{V} est $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{K} \otimes \dot{\mathbf{V}}$, où \mathbb{K} est le tenseur du quatrième ordre :

$$\begin{aligned} \mathbb{K} = & \underbrace{(\partial_1 K_G + V_I \partial_2 K_G + V_{II} \partial_3 K_G)}_{K_{GG}} \mathbf{G} \otimes \mathbf{G} + \underbrace{(-\partial_2 K_G - V_I \partial_3 K_G)}_{K_{GV}} \mathbf{G} \otimes \mathbf{V} + \underbrace{\partial_3 K_G}_{K_{GV^2}} \mathbf{G} \otimes \mathbf{V}^2 \\ & + \underbrace{(\partial_1 K_V + V_I \partial_2 K_V + V_{II} \partial_3 K_V)}_{K_{VG}} \mathbf{V} \otimes \mathbf{G} + \underbrace{(-\partial_2 K_V - V_I \partial_3 K_V)}_{K_{VV}} \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} + \underbrace{\partial_3 K_V}_{K_{VV^2}} \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}^2 \\ & + K_V \mathbf{G} \boxtimes \mathbf{G} \end{aligned}$$

ont les coefficients sont :

$$\begin{aligned} K_{GG} &= \frac{K_1 c_1^2 V_{III}^{c_1-2}}{r} V_{II} \left(\left(\frac{V_I}{3 V_{III}^{\frac{1}{3}}} \right)^r - 1 \right) + \frac{K_1 c_1 V_{III}^{c_1-2}}{r} V_{II} \left(1 - \left(1 + \frac{2r}{3} - r \frac{V_{III}}{V_I V_{II}} \right) \left(\frac{V_I}{3 V_{III}^{\frac{1}{3}}} \right)^r \right) \\ &+ \frac{K_1 V_{III}^{c_1-2}}{3} V_{II} \left(1 + \frac{r}{3} - r \frac{V_{III}}{V_I V_{II}} \right) \left(\frac{V_I}{3 V_{III}^{\frac{1}{3}}} \right)^r + K_2 V_{II} \left((p-1) V_{III}^{p-2} + (q+1) V_{III}^{-q-2} \right) \\ K_{GV} &= -\frac{K_1 c_1^2 V_{III}^{c_1-2}}{r} V_I \left(\left(\frac{V_I}{3 V_{III}^{\frac{1}{3}}} \right)^r - 1 \right) - \frac{K_1 c_1 V_{III}^{c_1-2}}{r} V_I \left(1 - \left(1 + \frac{2r}{3} \right) \left(\frac{V_I}{3 V_{III}^{\frac{1}{3}}} \right)^r \right) \\ &- \frac{K_1 V_{III}^{c_1-2}}{3} V_I \left(1 + \frac{r}{3} \right) \left(\frac{V_I}{3 V_{III}^{\frac{1}{3}}} \right)^r - K_2 V_I \left((p-1) V_{III}^{p-2} + (q+1) V_{III}^{-q-2} \right) \\ K_{GV^2} &= \frac{K_1 c_1^2 V_{III}^{c_1-2}}{r} \left(\left(\frac{V_I}{3 V_{III}^{\frac{1}{3}}} \right)^r - 1 \right) + \frac{K_1 c_1 V_{III}^{c_1-2}}{r} \left(1 - \left(1 + \frac{2r}{3} \right) \left(\frac{V_I}{3 V_{III}^{\frac{1}{3}}} \right)^r \right) \\ &+ \frac{K_1 V_{III}^{c_1-2}}{3} \left(1 + \frac{r}{3} \right) \left(\frac{V_I}{3 V_{III}^{\frac{1}{3}}} \right)^r + K_2 \left((p-1) V_{III}^{p-2} + (q+1) V_{III}^{-q-2} \right) \\ K_{VG} &= -K_1 V_{III}^{c_1-2} \frac{V_{II}}{V_I} \left(1 - c_1 + \frac{r}{3} + (1-r) \frac{V_{III}}{V_I V_{II}} \right) \left(\frac{V_I}{3 V_{III}^{\frac{1}{3}}} \right)^r \\ K_{VV} &= K_1 V_{III}^{c_1-2} \left(1 + \frac{r}{3} - c_1 \right) \left(\frac{V_I}{3 V_{III}^{\frac{1}{3}}} \right)^r \\ K_{VV^2} &= -K_1 V_{III}^{c_1-2} \frac{1}{V_I} \left(1 + \frac{r}{3} - c_1 \right) \left(\frac{V_I}{3 V_{III}^{\frac{1}{3}}} \right)^r \end{aligned}$$

3.3 Une loi $\sigma = f(\mathbf{M})$

On utilise le tenseur de Hill gauche \mathbf{M} pour mesurer les déformations.

On a montré en 5.6.2 page 55 que la déformation sphérique \mathbf{F}_2 est mesurée par la partie sphérique de \mathbf{M} et que la déformation isovolume \mathbf{F}_1 est mesurée par la partie déviatorique de \mathbf{M} .

Pour simplifier, on suppose que la déformation isovolume est seulement une fonction de la norme du déviateur de \mathbf{M} :

$$\|\text{dev}\mathbf{M}\|^2 = \frac{2 M_I^2}{3} - 2 M_{II} = \frac{2}{3} (M_1^2 - 3 M_{II}) \geq 0$$

On prend donc une énergie de la forme

$$u(M_I, M_{II}, M_{III}) = C_1 (e^{M_I}) u_1 (M_1^2 - 3 M_{II}) + u_2 (e^{M_I})$$

avec les conditions physiquement raisonnables suivantes :

$$\begin{aligned} u_1(0) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u_1(x) = +\infty \quad \left[\frac{du_1}{dx} \right]_{x>0} &> 0 \\ u_2(1) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} u_2(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u_2(x) = +\infty \quad \left[\frac{du_2}{dx} \right]_{x>1} &> 0 \quad \left[\frac{du_2}{dx} \right]_{0<x<1} < 0 \\ C_1(1) = 1 \quad C_1(x) > 0 \quad \forall x > 0 \end{aligned}$$

Pour satisfaire à ces conditions, on peut choisir :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{K_1}{\rho_0} (M_1^2 - 3 M_{II})^r & C_1 &= e^{c_1 M_I} \\ u_2 &= \frac{K_2}{\rho_0} \left(\frac{e^{p M_I}}{p} + \frac{e^{-q M_I}}{q} - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \end{aligned}$$

$r > 0$ est un paramètre à ajuster pour les déformations isovolumes,

$p > 0$ est un paramètre à ajuster pour les dilatations sphériques,

$q > 0$ est un paramètre à ajuster pour les compressions sphériques,

$c_1 > 0$ est un paramètre pour ajuster la sensibilité de la déformation isovolume à une dilatation sphérique initiale,

$K_1 > 0$ et $K_2 > 0$ sont des constantes⁴.

Si on estime que l'énergie de déformation isovolume est insensible à une dilatation sphérique initiale, il suffit de prendre $c_1 = 0$.

En utilisant la forme générale de la loi de comportement avec le tenseur \mathbf{M} donnée en (2.6) page 107) :

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma} = K_G \mathbf{G} + K_M \mathbf{M} + K_{M^2} \mathbf{M}^2}$$

où les K_G , K_M et K_{M^2} sont :

$$\begin{aligned} K_G &= K_1 c_1 e^{(c_1-1)M_I} (M_1^2 - 3 M_{II})^r - K_1 r M_I e^{(c_1-1)M_I} (M_1^2 - 3 M_{II})^{r-1} \\ &\quad + K_2 \left(e^{(p-1)M_I} - e^{-(q+1)M_I} \right) \\ K_M &= 3 K_1 r e^{(c_1-1)M_I} (M_1^2 - 3 M_{II})^{r-1} \\ K_{M^2} &= 0 \end{aligned}$$

On vérifie aisément que si \mathbf{F} est une transformation rigide ($\mathbf{M} = \mathbf{0}$; $M_I = 0$; $M_{II} = 0$), le tenseur des contraintes est bien nul.

4. On verra un peu plus loin qu'elles reflètent le comportement au voisinage de la transformation rigide, c'est-à-dire aux petites déformations.

Interprétations de K_1 et K_2 :

Si la transformation \mathbf{F} est une extension dans la direction \mathbf{i} (voir (C.3) page 215), on a :

$$\begin{aligned} M_I &= \ln k \\ M_{II} &= 0 \\ K_G &= K_1 c_1 k^{c_1-1} (\ln k)^{2r} - K_1 r k^{c_1-1} (\ln k)^{2r-1} + K_2 \left(k^{(p-1)} - k^{-(q+1)} \right) \\ K_M &= 3 K_1 r k^{c_1-1} (\ln k)^{2(r-1)} \end{aligned}$$

La contrainte dans la direction \mathbf{i} est : $\sigma \otimes \mathbf{i} = (K_G + \ln k K_M) \mathbf{i}$.

La contrainte dans une direction $\mathbf{j} \perp \mathbf{i}$ est : $\sigma \otimes \mathbf{j} = K_G \mathbf{j}$.

Au voisinage de la transformation rigide, comme dans la loi $\sigma = \mathbf{f}(\mathbf{V})$, on identifie les coefficients de Lamé en petites déformations :

$$\begin{aligned} \left[\frac{d(\mathbf{i} \otimes \sigma \otimes \mathbf{i})}{dk} \right]_{k=1} &= \left[\frac{d(K_G + \ln k K_M)}{dk} \right]_{k=1} = (p+q) K_2 + 2 K_1 = 2\mu_0 + \lambda_0 \\ \left[\frac{d(\mathbf{j} \otimes \sigma \otimes \mathbf{j})}{dk} \right]_{k=1} &= \left[\frac{dK_G}{dk} \right]_{k=1} = (p+q) K_2 - K_1 = \lambda_0 \end{aligned}$$

Ce qui fournit les interprétations de K_1 et K_2 :

$$\boxed{K_1 = \frac{2}{3}\mu_0 \ ; \ K_2 = \frac{2\mu_0 + 3\lambda_0}{3(p+q)}}$$

Loi tangente:

La loi tangente au voisinage d'un état de déformation \mathbf{M} est $\dot{\sigma} = \mathbb{K} \otimes \dot{\mathbf{M}}$, où \mathbb{K} est le tenseur du quatrième ordre :

$$\begin{aligned} \mathbb{K} &= \underbrace{(\partial_1 K_G + M_I \partial_2 K_G + M_{II} \partial_3 K_G)}_{K_{GG}} \mathbf{G} \otimes \mathbf{G} + \underbrace{(-\partial_2 K_G - M_I \partial_3 K_G)}_{K_{GM}} \mathbf{G} \otimes \mathbf{M} + \underbrace{\partial_3 K_G}_{K_{GM^2}} \mathbf{G} \otimes \mathbf{M}^2 \\ &+ \underbrace{(\partial_1 K_M + M_I \partial_2 K_M + M_{II} \partial_3 K_M)}_{K_{MG}} \mathbf{M} \otimes \mathbf{G} + \underbrace{(-\partial_2 K_M - M_I \partial_3 K_M)}_{K_{MM}} \mathbf{M} \otimes \mathbf{M} + \underbrace{\partial_3 K_M}_{K_{MM^2}} \mathbf{M} \otimes \mathbf{M}^2 \\ &+ K_M \mathbf{G} \boxtimes \mathbf{G} \end{aligned}$$

dont les coefficients sont :

$$\begin{aligned} K_{GG} &= K_1 c_1^2 e^{(c_1-1)M_I} (M_I^2 - 3 M_{II})^r - K_1 c_1 e^{(c_1-1)M_I} (M_I^2 - 3 M_{II})^r \left(1 + \frac{2r M_I}{M_I^2 - 3 M_{II}} \right) \\ &+ K_1 r (M_I^2 - 3 M_{II})^{r-1} \left(\frac{M_I^2(r-1)}{M_I^2 - 3 M_{II}} + M_I - 1 \right) + K_2 \left((p-1)e^{M_I(p-1)} + (q+1)e^{M_I(-q-1)} \right) \\ K_{GM} &= 3 K_1 r e^{(c_1-1)M_I} (M_I^2 - 3 M_{II})^{r-2} (c_1 (M_I^2 - 3 M_{II}) - M_I(r-1)) \\ K_{GM^2} &= 0 \\ K_{MG} &= 3 K_1 r e^{(c_1-1)M_I} (M_I^2 - 3 M_{II})^{r-2} ((c_1 - 1) (M_I^2 - 3 M_{II}) - M_I(r-1)) \\ K_{MM} &= 9 K_1 r (r-1) e^{(c_1-1)M_I} (M_I^2 - 3 M_{II})^{r-2} \\ K_{MM^2} &= 0 \end{aligned}$$

3.4 Discussion

Les deux exemples de lois présentées comportent des coefficients dont l'interprétation physique est simple :

- λ_0 et μ_0 sont les coefficients de Lamé habituels en petites déformations. Ils déterminent le comportement du matériau au voisinage de la transformation rigide (petites déformations).
- r est un coefficient qui pilote l'évolution de l'énergie dans les grandes déformations isovolument.
- p et q sont des coefficients qui pilotent l'évolution de l'énergie dans les grandes déformations sphériques.
- c_1 peut être testé en soumettant une compression sphérique⁵ préalable à un essai de cisaillement isovolume.

Les fonctions choisies dans les expressions de l'énergie interne massique garantissent une bonne régularité de l'évolution des contraintes en fonction des déformations. Puisque ces lois sont déduites de la forme générale des lois du chapitre précédent, elles sont bien des lois élastiques (la dissipation intrinsèque est nulle) et elles sont universelles (invariance de la loi dans les changements d'observateur).

La décomposition de la transformation en dilatation sphérique et transformation isovolume n'est absolument pas indispensable : elle n'a pour but que de suggérer une forme d'expression de l'énergie interne dont les termes ont une interprétation physique.

Il est évidemment possible de construire d'autres familles de lois, en envisageant d'autres décompositions fictives de la transformation⁶ ou en proposant d'autres fonctions mathématiques pour l'énergie interne massique avec ou sans décomposition en transformations fictives.

5. ou une traction ou compression perpendiculaire à la direction du cisaillement.

6. par exemple $\mathbf{F} = \mathbf{V} \otimes \mathbf{R} = \mathbf{V}_1 \otimes \mathbf{V}_2 \otimes \mathbf{V}_3 \otimes \mathbf{R}$, où $\mathbf{V}_1 \otimes \mathbf{V}_2 \otimes \mathbf{V}_3$ est la décomposition de la transformation \mathbf{V} en trois dilatations uniformes dans les directions propres de \mathbf{V} (voir 5.4.4 page 49).

Chapitre 4

Milieux élastiques isotropes transverses en évolution isotherme

4.1 Définition

Les milieux élastiques dits à *isotropie transverse* sont des milieux élastiques dont le comportement n'est pas isotrope : ces milieux ont une direction privilégiée. On pourrait les appeler «milieux anisotropes à une direction».

En pratique, on utilise ce modèle pour modéliser les milieux fibreux : en chaque point il existe une direction matérielle de fibre, qu'on peut repérer par sa position initiale \mathbf{n}_0 ou par sa position actuelle \mathbf{n}_t .

Le caractère élastique implique que

- Il existe un état naturel
- La dissipation intrinsèque est nulle

Pour les mêmes raisons qu'en élasticité isotrope, le caractère isotherme implique que

- La dissipation thermique est nulle
- Les transformations sont isentropiques ($\dot{s} = 0, s = 0$)

Les variables d'état qui définissent l'état actuel d'un milieu isotrope transverse sont donc uniquement :

- le tenseur de déformation actuel \mathbf{X}
- la direction matérielle unitaire *actuelle*¹ des fibres \mathbf{n}_t . Cette variable d'état supplémentaire permet de distinguer les états de deux particules qui auraient la même déformation mais dont l'orientation des directions principales de déformation serait différente par rapport à la direction matérielle \mathbf{n}_t .

Compte tenu de ces hypothèses, on déduit l'expression de la dissipation (4.9) page 95, que la réversibilité intrinsèque s'écrit :

$$-\rho\dot{u} + \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{D} = 0 \quad \text{où} \quad \dot{u} = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{X}} \otimes \dot{\mathbf{X}} + \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_t} \otimes \dot{\mathbf{n}}_t$$

pour toute évolution thermo-mécanique infinitésimale autour d'un état.

1. En effet, l'énergie de déformation à l'instant t est fonction de l'état actuel de la matière, et l'état actuel est déterminé par la déformation actuelle et son orientation par rapport aux directions actuelles d'anisotropie.

4.2 Etude de la direction matérielle d'anisotropie

Comme pour toute direction matérielle, la relation entre les directions initiale et actuelle d'anisotropie est (voir (5.3) page 42) :

$$\mathbf{n}_t = \frac{\mathbf{F} \overline{\otimes} d\mathbf{m}_0}{\|\mathbf{F} \overline{\otimes} d\mathbf{m}_0\|} = \frac{\mathbf{F} \overline{\otimes} \mathbf{n}_0}{\|\mathbf{F} \overline{\otimes} \mathbf{n}_0\|} \iff \mathbf{n}_0 = \|\mathbf{F} \overline{\otimes} \mathbf{n}_0\| \mathbf{F}^{-1} \overline{\otimes} \mathbf{n}_t \quad (4.1)$$

Dans la suite, pour représenter la direction \mathbf{n}_t , il sera commode d'introduire le tenseur uniaxial du second ordre² :

$$\mathbf{N}_t = \mathbf{n}_t \otimes \mathbf{n}_t$$

dont on sait que la direction principale associée à la valeur propre 1 (la seule non nulle) est la direction de \mathbf{n}_t , et que $\mathbf{N}_t^p = \mathbf{N}_t \ \forall p$ entier positif.

Comme toute direction matérielle, le vecteur \mathbf{n}_t est objectif, sa formule de changement d'observateur est $\tilde{\mathbf{n}}_t = \mathbf{Q}_t \overline{\otimes} \mathbf{n}_t$

La dérivée particulière de \mathbf{n}_t est calculée en annexe F.2 page 236 :

$$\dot{\mathbf{n}}_t = (\mathbf{D} + \mathbf{W}) \overline{\otimes} \mathbf{n}_t - \left(\mathbf{N}_t \overline{\otimes} \mathbf{D} \right) \mathbf{n}_t$$

La dérivée particulière de \mathbf{N}_t est calculée en annexe F.3 page 237 :

$$\dot{\mathbf{N}}_t = 2 \text{Sym} \left((\mathbf{D} + \mathbf{W}) \overline{\otimes} \mathbf{N}_t \right) - 2 \left(\mathbf{N}_t \overline{\otimes} \mathbf{D} \right) \mathbf{N}_t$$

Ainsi, les dérivées particulières de la direction d'anisotropie (représentée par \mathbf{n}_t ou \mathbf{N}_t) sont des fonctions de la vitesse de déformation \mathbf{D} et de la vitesse de rotation \mathbf{W} .

4.3 Réduction de la dimension de l'espace des états

A priori, les variables d'état T , \mathbf{X} (symétrique) et \mathbf{n}_t sont dans un espace des états de dimension 10. Comme en élasticité isotrope, on va montrer que l'universalité et l'objectivité entraînent la réduction de sa dimension. On fait ici le raisonnement avec l'énergie interne massique :

L'universalité de la définition g de l'énergie interne implique que pour deux observateurs O et \tilde{O} :

$$u = g(T, \mathbf{X}, \mathbf{n}_t) \quad \text{et} \quad \tilde{u} = g(\tilde{T}, \tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{n}}_t)$$

u et T étant des grandeurs scalaires objectives, on a $u = \tilde{u}$ et $T = \tilde{T}$. L'universalité de la définition g s'écrit alors :

$$g(T, \mathbf{X}, \mathbf{n}_t) = g(T, \tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{n}}_t) \quad \forall \mathbf{X} \quad \forall \mathbf{n}_t$$

\mathbf{n}_t étant objectif, sa formule de changement d'observateur est :

$$\tilde{\mathbf{n}}_t = \mathbf{Q}_t \overline{\otimes} \mathbf{n}_t$$

2. Le vecteur \mathbf{n}_t représente intrinsèquement une direction et un sens, alors que le tenseur $\mathbf{N}_t = \mathbf{n}_t \otimes \mathbf{n}_t$ ne représente qu'une direction: en effet, $\mathbf{N}_t = \mathbf{n}_t \otimes \mathbf{n}_t = (-\mathbf{n}_t) \otimes (-\mathbf{n}_t)$. Cette «perte d'information» est plutôt utile en anisotropie, où le sens d'une fibre est sans importance.

Si la formule de changement d'observateur de la grandeur tensorielle \mathbf{X} est de la forme :

$$\widetilde{\mathbf{X}} = \mathbf{Q}_t \overline{\otimes} \mathbf{X} \overline{\otimes} \mathbf{Q}_t^T \quad \forall \mathbf{Q}_t \text{ orthogonal}$$

(c'est à dire si \mathbf{X} est un tenseur de déformation objectif³), la fonction g doit donc être telle que :

$$g(T, \mathbf{X}, \mathbf{n}_t) = g\left(T, \mathbf{Q}_t \overline{\otimes} \mathbf{X} \overline{\otimes} \mathbf{Q}_t^T, \mathbf{Q}_t \overline{\otimes} \mathbf{n}_t\right) \quad \forall \mathbf{Q}_t \text{ orthogonal}$$

La fonction g est donc *une fonction isotrope* de ses arguments tensoriels \mathbf{X} et \mathbf{n}_t .

Dans la suite on se limitera donc aux tenseurs de déformation objectifs.

La théorie des fonctions isotropes montre que l'énergie interne massique est nécessairement une fonction des invariants de \mathbf{X} , de \mathbf{n}_t et des invariants mixtes (voir (4.3) page 36).

$$u = u_X \left(T, X_I, X_{II}, X_{III}, \|\mathbf{n}_t\|, \mathbf{X} \overline{\otimes} \mathbf{N}_t, \mathbf{X}^2 \overline{\otimes} \mathbf{N}_t \right)$$

Ici, $\|\mathbf{n}_t\| = 1$, il reste donc

$$u = u_X \left(T, X_I, X_{II}, X_{III}, \underbrace{\mathbf{X} \overline{\otimes} \mathbf{N}_t}_{X_{IV}}, \underbrace{\mathbf{X}^2 \overline{\otimes} \mathbf{N}_t}_{X_V} \right)$$

La dimension de l'espace des états est donc 6 (ou 5 si on se restreint aux transformations isothermes).

4.4 Conséquences de la réversibilité intrinsèque

La dissipation intrinsèque doit être nulle c'est-à-dire $\forall \mathbf{D}, \mathbf{W} \dot{\mathbf{X}}$

$$-\rho \dot{u} + \boldsymbol{\sigma} \overline{\otimes} \mathbf{D} = 0$$

pour tout état et pour toute évolution infinitésimale isotherme autour de cet état

4.4.1 Dérivée particulière de l'énergie interne massique

La dérivée particulière de u pour les milieux élastiques *isothermes* isotropes transverses est

$$\dot{u} = \partial_1 u_X \dot{X}_I + \partial_2 u_X \dot{X}_{II} + \partial_3 u_X \dot{X}_{III} + \partial_4 u_X \dot{X}_{IV} + \partial_5 u_X \dot{X}_V$$

où on a posé $X_{IV} = \mathbf{X} \overline{\otimes} \mathbf{N}_t$ et $X_V = \mathbf{X}^2 \overline{\otimes} \mathbf{N}_t$

Les dérivées particulières des invariants de \mathbf{X} sont (voir annexe (B.1) page 212) :

$$\dot{X}_I = \mathbf{G} \overline{\otimes} \dot{\mathbf{X}} \quad (4.2)$$

$$\dot{X}_{II} = (X_I \mathbf{G} - \mathbf{X}) \overline{\otimes} \dot{\mathbf{X}} \quad (4.3)$$

$$\dot{X}_{III} = (X_{II} \mathbf{G} - X_I \mathbf{X} + \mathbf{X}^2) \overline{\otimes} \dot{\mathbf{X}} \quad (4.4)$$

Les dérivées particulières de X_{IV} et X_V sont calculées en annexe (voir F.5 et F.7 page 237) :

$$\dot{X}_{IV} = 2 (\mathbf{N}_t \overline{\otimes} \mathbf{X}) \overline{\otimes} \mathbf{D} - 2 (\mathbf{N}_t \overline{\otimes} \mathbf{X}) \overline{\otimes} \mathbf{W} - 2 X_{IV} \mathbf{N}_t \overline{\otimes} \mathbf{D} + \mathbf{N}_t \overline{\otimes} \dot{\mathbf{X}} \quad (4.5)$$

$$\dot{X}_V = 2 (\mathbf{N}_t \overline{\otimes} \mathbf{X}^2) \overline{\otimes} \mathbf{D} - 2 (\mathbf{N}_t \overline{\otimes} \mathbf{X}^2) \overline{\otimes} \mathbf{W} - 2 X_V \mathbf{N}_t \overline{\otimes} \mathbf{D} + 2 (\mathbf{X} \overline{\otimes} \mathbf{N}_t) \overline{\otimes} \dot{\mathbf{X}} \quad (4.6)$$

3. Contrairement à l'élasticité isotrope, il est ici impossible d'utiliser un tenseur de déformation non objectif tel que \mathbf{U} , dont la formule de changement d'observateur est $\widetilde{\mathbf{U}} = \mathbf{Q}_0^T \overline{\otimes} \mathbf{U} \overline{\otimes} \mathbf{Q}_0$ car les tenseurs de changement d'observateur \mathbf{Q}_0 et \mathbf{Q}_t sont différents en général.

où \mathbf{D} est le tenseur (symétrique) des vitesses de déformation, et \mathbf{W} est le tenseur (antisymétrique) des vitesses de rotation (voir (6.2) et (6.3) page 59).

La dérivée particulière de u est donc :

$$\begin{aligned} \dot{u} = & [\partial_1 u_X \mathbf{G} + \partial_2 u_X (X_I \mathbf{G} - \mathbf{X}) + \partial_3 u_X (X_{II} \mathbf{G} - X_I \mathbf{X} + \mathbf{X}^2) + \partial_4 u_X \mathbf{N}_t + 2 \partial_5 u_X \mathbf{X} \otimes \mathbf{N}_t] \overline{\otimes} \dot{\mathbf{X}} \\ & + [2 \partial_4 u_X (\mathbf{N}_t \otimes \mathbf{X} - X_{IV} \mathbf{N}_t) + 2 \partial_5 u_X (\mathbf{N}_t \otimes \mathbf{X}^2 - X_V \mathbf{N}_t)] \overline{\otimes} \mathbf{D} \\ & + [-2 \partial_4 u_X \mathbf{N}_t \otimes \mathbf{X} - 2 \partial_5 u_X \mathbf{N}_t \otimes \mathbf{X}^2] \overline{\otimes} \mathbf{W} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Les tenseurs \mathbf{D} , \mathbf{W} , $\dot{\mathbf{X}}$ et $\dot{\mathbf{N}}_t$ ne sont pas indépendants. Pour exploiter cette égalité, il faut choisir un tenseur de déformation.

En écrivant que la dissipation intrinsèque est nulle $\forall \mathbf{D}$ et $\forall \mathbf{W}$, on va déduire la forme générale des lois de comportement d'un milieu isotrope transverse.

4.4.2 Utilisation du tenseur de Cauchy-Green gauche \mathbf{B}

On utilise ce tenseur de déformation car c'est celui qui donne *a priori* les expressions les plus simples⁴.

En remplaçant \mathbf{X} par \mathbf{B} dans (4.7), et en utilisant (E.3) et (E.2) page 228, la dérivée de l'énergie interne massique devient :

$$\begin{aligned} \dot{u} = & 2 (\partial_1 u_B + B_I \partial_2 u_B + B_{II} \partial_3 u_B) \mathbf{B} \overline{\otimes} \mathbf{D} - 2 (\partial_2 u_B + B_I \partial_3 u_B) \mathbf{B}^2 \overline{\otimes} \mathbf{D} + 2 \partial_3 u_B \mathbf{B}^3 \overline{\otimes} \mathbf{D} \\ & + 2 \partial_4 u_B (\mathbf{B} \otimes \mathbf{N}_t + \mathbf{N}_t \otimes \mathbf{B}) \overline{\otimes} \mathbf{D} + 2 \partial_5 u_B (\mathbf{B}^2 \otimes \mathbf{N}_t + \mathbf{N}_t \otimes \mathbf{B}^2) \overline{\otimes} \mathbf{D} \\ & - 2 (B_{IV} \partial_4 u_B + B_V \partial_5 u_B) \mathbf{N}_t \overline{\otimes} \mathbf{D} + 2 \partial_5 u_B (\mathbf{B} \otimes \mathbf{N}_t \otimes \mathbf{B}) \overline{\otimes} \mathbf{D} \end{aligned}$$

(les termes en \mathbf{W} disparaissent⁵).

La dissipation intrinsèque étant nulle pour toute transformation infinitésimale, c'est-à-dire $\forall \mathbf{D}$, on en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma} = & 2 (\partial_1 u_B + B_I \partial_2 u_B + B_{II} \partial_3 u_B) \mathbf{B} - 2 (\partial_2 u_B + B_I \partial_3 u_B) \mathbf{B}^2 + 2 \partial_3 u_B \mathbf{B}^3 \\ & + 2 \partial_4 u_B (\mathbf{B} \otimes \mathbf{N}_t + \mathbf{N}_t \otimes \mathbf{B}) + 2 \partial_5 u_B (\mathbf{B}^2 \otimes \mathbf{N}_t + \mathbf{N}_t \otimes \mathbf{B}^2) \\ & - 2 (B_{IV} \partial_4 u_B + B_V \partial_5 u_B) \mathbf{N}_t + 2 \partial_5 u_B \mathbf{B} \otimes \mathbf{N}_t \otimes \mathbf{B} \end{aligned}$$

En utilisant le théorème de Cayley-Hamilton pour réduire le degré en \mathbf{B} , on obtient la forme générale des lois de comportement des milieux élastiques isotropes transverses quand on utilise \mathbf{B} comme tenseur de déformation.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} = & \frac{2 \rho_0}{B_{III}^{\frac{1}{2}}} [\partial_3 u_B B_{III} \mathbf{G} + (\partial_1 u_B + B_I \partial_2 u_B) \mathbf{B} - \partial_2 u_B \mathbf{B}^2] \\ & + \frac{2 \rho_0}{B_{III}^{\frac{1}{2}}} [\partial_4 u_B (\mathbf{B} \otimes \mathbf{N}_t + \mathbf{N}_t \otimes \mathbf{B}) + \partial_5 u_B (\mathbf{B}^2 \otimes \mathbf{N}_t + \mathbf{N}_t \otimes \mathbf{B}^2)] \\ & + \frac{2 \rho_0}{B_{III}^{\frac{1}{2}}} [-(\partial_4 u_B B_{IV} + \partial_5 u_B B_V) \mathbf{N}_t + \partial_5 u_B \mathbf{B} \otimes \mathbf{N}_t \otimes \mathbf{B}] \end{aligned} \quad (4.8)$$

4. L'utilisation du tenseur \mathbf{M} , si utile en élasticité isotrope à cause du découplage aisé des énergies sphériques et isovolume, présente peu d'intérêt en milieu anisotrope, car une telle décomposition est physiquement peu significative en milieu anisotrope.

5. Cette disparition était prévisible : l'énergie interne étant un scalaire objectif, sa dérivée particulière l'est aussi. Elle ne peut donc dépendre des vitesses de rotation \mathbf{W} , puisque celles-ci sont différentes d'un observateur à l'autre.

où u_B est une fonction des 5 invariants: $u = u_B(B_I, B_{II}, B_{III}, B_{IV}, B_V)$.

Si u_B n'est pas fonction des invariants B_{IV} et B_V , on a alors $\partial_4 u_B = \partial_5 u_B = 0$, et on retrouve la loi isotrope (2.8) page 108.

Pour obtenir une loi de comportement, il reste à choisir une expression de l'énergie interne massique u_B en fonction des cinq invariants.

4.4.3 Utilisation de la distorsion à gauche \mathbf{V}

On pourrait suivre le raisonnement de la section précédente⁶, mais il est plus facile de déduire la forme générale de la loi en \mathbf{V} par simple changement de variables à partir de la loi en \mathbf{B} .

On donne ici les formules pour passer de \mathbf{B} à \mathbf{V} :

Changement des tenseurs:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{V}^2 \\ \mathbf{B}^2 &= \mathbf{V}^4 \\ &= V_I (V_I \mathbf{V}^2 - V_{II} \mathbf{V} + V_{III} \mathbf{G}) - V_{II} \mathbf{V}^2 + V_{III} \mathbf{V} \quad (\text{Cayley-Hamilton}) \\ \mathbf{B}^2 &= (V_I^2 - V_{II}) \mathbf{V}^2 + (V_{III} - V_I V_{II}) \mathbf{V} + V_I V_{III} \mathbf{G} \end{aligned}$$

Changement des invariants:

$$\begin{aligned} B_I &= \text{Tr} \mathbf{V}^2 = V_I^2 - 2 V_{II} \\ B_{II} &= \frac{1}{2} [(\text{Tr} \mathbf{B})^2 - \text{Tr}(\mathbf{B}^2)] = \frac{1}{2} [(V_I^2 - 2 V_{II})^2 - \text{Tr}[(V_I^2 - V_{II}) \mathbf{V}^2 + (V_{III} - V_I V_{II}) \mathbf{V} + V_I V_{III} \mathbf{G}]] \\ &= \frac{1}{2} [(V_I^2 - 2 V_{II})^2 - (V_I^2 - V_{II})(V_I^2 - 2 V_{II}) - (V_{III} - V_I V_{II}) V_I - 3 V_I V_{III}] \\ B_{II} &= V_{II}^2 - 2 V_I V_{III} \\ B_{III} &= V_{III}^2 \\ B_{IV} &= \mathbf{B} \otimes \mathbf{N}_t = \mathbf{V}^2 \otimes \mathbf{N}_t = V_V \\ B_V &= \mathbf{B}^2 \otimes \mathbf{N}_t = (V_I^2 - V_{II}) V_V + (V_{III} - V_I V_{II}) V_{IV} + V_I V_{III} \end{aligned}$$

Changement des dérivées:

$$\begin{pmatrix} \partial_1 u_B \\ \partial_2 u_B \\ \partial_3 u_B \\ \partial_4 u_B \\ \partial_5 u_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial B_I} \\ \frac{\partial u}{\partial B_{II}} \\ \frac{\partial u}{\partial B_{III}} \\ \frac{\partial u}{\partial B_{IV}} \\ \frac{\partial u}{\partial B_V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_I}{\partial B_I} & \frac{\partial V_{II}}{\partial B_I} & \frac{\partial V_{III}}{\partial B_I} & \frac{\partial V_{IV}}{\partial B_I} & \frac{\partial V_V}{\partial B_I} \\ \frac{\partial V_I}{\partial B_{II}} & \frac{\partial V_{II}}{\partial B_{II}} & \frac{\partial V_{III}}{\partial B_{II}} & \frac{\partial V_{IV}}{\partial B_{II}} & \frac{\partial V_V}{\partial B_{II}} \\ \frac{\partial V_I}{\partial B_{III}} & \frac{\partial V_{II}}{\partial B_{III}} & \frac{\partial V_{III}}{\partial B_{III}} & \frac{\partial V_{IV}}{\partial B_{III}} & \frac{\partial V_V}{\partial B_{III}} \\ \frac{\partial V_I}{\partial B_{IV}} & \frac{\partial V_{II}}{\partial B_{IV}} & \frac{\partial V_{III}}{\partial B_{IV}} & \frac{\partial V_{IV}}{\partial B_{IV}} & \frac{\partial V_V}{\partial B_{IV}} \\ \frac{\partial V_I}{\partial B_V} & \frac{\partial V_{II}}{\partial B_V} & \frac{\partial V_{III}}{\partial B_V} & \frac{\partial V_{IV}}{\partial B_V} & \frac{\partial V_V}{\partial B_V} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial V_I} \\ \frac{\partial u}{\partial V_{II}} \\ \frac{\partial u}{\partial V_{III}} \\ \frac{\partial u}{\partial V_{IV}} \\ \frac{\partial u}{\partial V_V} \end{pmatrix} = (K) \begin{pmatrix} \partial_1 u_V \\ \partial_2 u_V \\ \partial_3 u_V \\ \partial_4 u_V \\ \partial_5 u_V \end{pmatrix}$$

6. Mais les calculs sont compliqués car les expressions de $\mathbf{N}_t \otimes \dot{\mathbf{V}}$ et de $(\mathbf{V} \otimes \mathbf{N}_t) \otimes \dot{\mathbf{V}}$ font intervenir un tenseur anti symétrique \mathbf{A} d'expression compliquée (voir (E.15) page 229).

La matrice K est la matrice jacobienne du changement de variables de l'énergie interne massique u . Inversement, on a :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial V_I} \\ \frac{\partial u}{\partial V_{II}} \\ \frac{\partial u}{\partial V_{III}} \\ \frac{\partial u}{\partial V_{IV}} \\ \frac{\partial u}{\partial V_V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial B_I}{\partial V_I} & \frac{\partial B_{II}}{\partial V_I} & \frac{\partial B_{III}}{\partial V_I} & \frac{\partial B_{IV}}{\partial V_I} & \frac{\partial B_V}{\partial V_I} \\ \frac{\partial B_I}{\partial V_{II}} & \frac{\partial B_{II}}{\partial V_{II}} & \frac{\partial B_{III}}{\partial V_{II}} & \frac{\partial B_{IV}}{\partial V_{II}} & \frac{\partial B_V}{\partial V_{II}} \\ \frac{\partial B_I}{\partial V_{III}} & \frac{\partial B_{II}}{\partial V_{III}} & \frac{\partial B_{III}}{\partial V_{III}} & \frac{\partial B_{IV}}{\partial V_{III}} & \frac{\partial B_V}{\partial V_{III}} \\ \frac{\partial B_I}{\partial V_{IV}} & \frac{\partial B_{II}}{\partial V_{IV}} & \frac{\partial B_{III}}{\partial V_{IV}} & \frac{\partial B_{IV}}{\partial V_{IV}} & \frac{\partial B_V}{\partial V_{IV}} \\ \frac{\partial B_I}{\partial V_V} & \frac{\partial B_{II}}{\partial V_V} & \frac{\partial B_{III}}{\partial V_V} & \frac{\partial B_{IV}}{\partial V_V} & \frac{\partial B_V}{\partial V_V} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial B_I} \\ \frac{\partial u}{\partial B_{II}} \\ \frac{\partial u}{\partial B_{III}} \\ \frac{\partial u}{\partial B_{IV}} \\ \frac{\partial u}{\partial B_V} \end{pmatrix} = (K)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial B_I} \\ \frac{\partial u}{\partial B_{II}} \\ \frac{\partial u}{\partial B_{III}} \\ \frac{\partial u}{\partial B_{IV}} \\ \frac{\partial u}{\partial B_V} \end{pmatrix}$$

Les relations de 4.4.3 donnent la matrice $(K)^{-1}$:

$$(K)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 V_I & -2 V_{III} & 0 & 0 & 2 V_I V_V - V_{II} V_{IV} + V_{III} \\ -2 & 2 V_{II} & 0 & 0 & -V_V - V_I V_{IV} \\ 0 & -2 V_I & 2 V_{III} & 0 & V_I + V_{IV} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & V_{III} - V_I V_{II} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & V_I^2 - V_{II} \end{pmatrix}$$

et donc la matrice (K) est :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \frac{V_{II}}{V_I V_{II} - V_{III}} & \frac{1}{2} \frac{V_{III}}{V_I V_{II} - V_{III}} & 0 & \frac{1}{2} \frac{2 V_I V_{II} V_V + V_{II} V_{III} - V_I V_{III} V_{IV} - V_{III} V_V - V_{II}^2 V_{IV}}{(V_I V_{II} - V_{III})^2} & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{1}{V_I V_{II} - V_{III}} & \frac{1}{2} \frac{V_I}{V_I V_{II} - V_{III}} & 0 & \frac{1}{2} \frac{V_I V_V + V_{III} - V_I^2 V_{IV} - V_{II} V_{IV}}{(V_I V_{II} - V_{III})^2} & 0 \\ \frac{1}{2 V_{III}} \frac{V_I}{V_I V_{II} - V_{III}} & \frac{1}{2 V_{III}} \frac{V_I^2}{V_I V_{II} - V_{III}} & \frac{1}{2 V_{III}} & \frac{1}{2 V_{III}} \frac{V_I^2 V_{II} - V_I^3 V_{IV} + V_I^2 V_V - V_{III} V_{IV}}{(V_I V_{II} - V_{III})^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{V_I^2 - V_{II}}{V_I V_{II} - V_{III}} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{V_I V_{II} - V_{III}} & 0 \end{pmatrix}$$

Forme générale des lois isotropes transverses en utilisant \mathbf{V}

Il suffit de remplacer dans la loi en \mathbf{B} les tenseurs, les invariants et les dérivées de l'énergie interne massique par leurs expressions en fonction de \mathbf{V} avec les changements précédents. On obtient après un calcul fastidieux:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \frac{\rho_0}{V_{III}} [\partial_3 u_V V_{III} \mathbf{G} + (\partial_1 u_V + V_I \partial_2 u_V) \mathbf{V} - \partial_2 u_V \mathbf{V}^2] \\ &+ \frac{\rho_0 \partial_4 u_V}{V_{III}} \left[\frac{V_{III} (V_I + V_{IV})}{V_I V_{II} - V_{III}} \mathbf{G} - \frac{V_I^2 V_{IV} - V_I V_V - V_{III} + V_{II} V_{IV}}{V_I V_{II} - V_{III}} \mathbf{V} + \frac{V_I V_{IV} + V_V}{V_I V_{II} - V_{III}} \mathbf{V}^2 \right] \\ &+ \frac{2 \rho_0}{V_{III}} [\partial_4 u_V (\mathbf{V} \otimes \bar{\mathbf{N}}_t + \bar{\mathbf{N}}_t \otimes \mathbf{V}) + \partial_5 u_V (\mathbf{V}^2 \otimes \bar{\mathbf{N}}_t + \bar{\mathbf{N}}_t \otimes \mathbf{V}^2)] \\ &- \frac{2 \rho_0}{V_{III}} \left[\left(\partial_4 u_V \frac{V_I V_{III} + V_I V_{II} V_{IV} - V_{III} V_{IV}}{V_I V_{II} - V_{III}} + \partial_5 u_V V_V \right) \bar{\mathbf{N}}_t + \frac{\partial_4 u_V}{V_I V_{II} - V_{III}} \mathbf{V}^2 \otimes \bar{\mathbf{N}}_t \otimes \mathbf{V}^2 \right] \end{aligned} \quad (4.9)$$

Si u_V n'est pas fonction des invariants V_{IV} et V_V , on a alors $\partial_4 u_V = \partial_5 u_V = 0$, et on retrouve la loi isotrope (2.7) page 107.

Remarque :

Une forme de loi utilisant le tenseur de Hill gauche $\mathbf{M} = \mathbf{L} \mathbf{n} \mathbf{V}$ serait très compliquée à obtenir⁷.

Pour l'élasticité anisotrope, l'utilisation du tenseur de déformation \mathbf{B} conduit à la forme générale de loi de comportement la plus maniable.

7. Les invariants de \mathbf{V} ne s'expriment pas simplement en fonction des invariants de \mathbf{M} .

Chapitre 5

Exemple de construction d'une loi de comportement isotrope transverse

5.1 Une décomposition de la transformation

On va décomposer la transformation \mathbf{F} de la manière suivante :

$$\mathbf{F} = \underbrace{[\mathbf{G} + (k - 1) \mathbf{N}_t]}_{\mathbf{F}_3} \otimes \underbrace{[k' \mathbf{G} + (1 - k') \mathbf{N}_t]}_{\mathbf{F}_2} \otimes \mathbf{F}_1$$

La transformation \mathbf{F}_3 est une extension dans la direction finale d'anisotropie \mathbf{n}_t (voir C.2 page 214). On a : $\mathbf{F}_3 \otimes \mathbf{n}_t = k \mathbf{n}_t$

La transformation \mathbf{F}_2 est une dilatation isotrope autour de la direction d'anisotropie \mathbf{n}_t (voir C.3 page 216). On a : $\mathbf{F}_2 \otimes \mathbf{n}_t = \mathbf{n}_t$

On a donc $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2^{-1} \otimes \mathbf{F}_3^{-1} \otimes \mathbf{F}$; $\mathbf{F}_1^{-1} = \mathbf{F}^{-1} \otimes \mathbf{F}_3 \otimes \mathbf{F}_2$; $\mathbf{F}_1^T = \mathbf{F}^T \otimes \mathbf{F}_3^{-T} \otimes \mathbf{F}_2^{-T}$.

Dans la première transformation \mathbf{F}_1 , la dilatation linéique d'un segment matériel de direction finale \mathbf{n}_t est donnée par (5.2) page 41 :

$$K_{l, \mathbf{n}_t} = \frac{1}{\|\mathbf{F}_1^{-1} \otimes \mathbf{n}_t\|} = \frac{1}{\|\mathbf{F}^{-1} \otimes \mathbf{F}_3 \otimes \mathbf{F}_2 \otimes \mathbf{n}_t\|} = \frac{1}{k \|\mathbf{F}^{-1} \otimes \mathbf{n}_t\|}$$

Dans la transformation \mathbf{F}_1 , la dilatation surfacique d'une facette matérielle de normale finale \mathbf{n}_t est donnée par (5.9) page 44 :

$$K_{s, \mathbf{n}_t} = \frac{\det \mathbf{F}_1}{\|\mathbf{F}_1^T \otimes \mathbf{n}_t\|} = \frac{\det(\mathbf{F}_2^{-1} \otimes \mathbf{F}_3^{-1} \otimes \mathbf{F})}{\|\mathbf{F}^T \otimes \mathbf{F}_3^{-T} \otimes \mathbf{F}_2^{-T} \otimes \mathbf{n}_t\|} = \frac{\frac{\det \mathbf{F}}{k k'}}{\frac{1}{k} \|\mathbf{F}^T \otimes \mathbf{n}_t\|} = \frac{\det \mathbf{F}}{k' \|\mathbf{F}^T \otimes \mathbf{n}_t\|}$$

Si on choisit

$$k = \frac{1}{\|\mathbf{F}^{-1} \otimes \mathbf{n}_t\|} \quad \text{et} \quad k' = \frac{\det \mathbf{F}}{\|\mathbf{F}^T \otimes \mathbf{n}_t\|}$$

la transformation \mathbf{F}_1 ne dilate pas la direction d'anisotropie \mathbf{n}_t et ne dilate pas les facettes normales à la direction d'anisotropie \mathbf{n}_t . On peut donc l'assimiler au cisaillement combiné étudié en C.6 page 222. Les interprétations des invariants de $\mathbf{B}_1 = \mathbf{F}_1 \overline{\otimes} \mathbf{F}_1^T$ sont les suivantes :

$$(B_1)_I = 3 + \gamma^2 \quad (\text{ne dépend que du cisaillement isovolume}) \quad (5.1)$$

$$(B_1)_{II} = 2 + \cos^2 \alpha + 2 \gamma \cos \phi \sin \phi \sin^2 \alpha + \gamma^2 (\sin^2 \alpha \cos^2 \phi + \cos^2 \alpha) \quad (5.2)$$

$$(B_1)_{III} = \cos^2 \alpha \quad (\text{ne dépend que du cisaillement pur}) \quad (5.3)$$

ϕ est un angle qui détermine l'orientation relative des deux cisaillements (voir C.6 page 222).

5.2 Quelques calculs sur la transformation \mathbf{F}_1

On a $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2^{-1} \overline{\otimes} \mathbf{F}_3^{-1} \overline{\otimes} \mathbf{F}$. Son tenseur de déformation de Cauchy-Green gauche est :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 &= \mathbf{F}_1 \overline{\otimes} \mathbf{F}_1^T \\ &= \mathbf{F}_2^{-1} \overline{\otimes} \mathbf{F}_3^{-1} \overline{\otimes} \mathbf{F} \overline{\otimes} \mathbf{F}^T \overline{\otimes} \mathbf{F}_3^{-T} \overline{\otimes} \mathbf{F}_2^{-T} \\ &= \left[\frac{\mathbf{G}}{k'} + \left(1 - \frac{1}{k'}\right) \mathbf{N}_t \right] \overline{\otimes} \left[\mathbf{G} + \left(\frac{1}{k} - 1\right) \mathbf{N}_t \right] \overline{\otimes} \mathbf{B} \overline{\otimes} \\ &\quad \left[\mathbf{G} + \left(\frac{1}{k} - 1\right) \mathbf{N}_t \right] \overline{\otimes} \left[\frac{\mathbf{G}}{k'} + \left(1 - \frac{1}{k'}\right) \mathbf{N}_t \right] \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{\mathbf{G}}{k'} + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k'}\right) \mathbf{N}_t \right] \overline{\otimes} \mathbf{B} \overline{\otimes} \left[\frac{\mathbf{G}}{k'} + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k'}\right) \mathbf{N}_t \right] \\ &= \frac{\mathbf{B}}{k'^2} + \frac{1}{k'} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k'}\right) (\mathbf{B} \overline{\otimes} \mathbf{N}_t + \mathbf{N}_t \overline{\otimes} \mathbf{B}) + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k'}\right)^2 \mathbf{N}_t \overline{\otimes} \mathbf{B} \overline{\otimes} \mathbf{N}_t \end{aligned} \quad (5.5)$$

À partir de (5.4) on calcule \mathbf{B}_1^{-1} , et en développant, il vient :

$$\mathbf{B}_1^{-1} = k'^2 \mathbf{B}^{-1} + k' (k - k') (\mathbf{B}^{-1} \overline{\otimes} \mathbf{N}_t + \mathbf{N}_t \overline{\otimes} \mathbf{B}^{-1}) + (k - k')^2 \mathbf{N}_t \overline{\otimes} \mathbf{B}^{-1} \overline{\otimes} \mathbf{N}_t \quad (5.6)$$

La trace de \mathbf{B}_1 se calcule avec (5.5) :

$$\begin{aligned} (B_1)_I &= \frac{B_I}{k'^2} + \frac{2}{k'} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k'}\right) B_{IV} + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k'}\right)^2 B_{IV} \\ (B_1)_I &= \frac{B_I}{k'^2} + \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k'^2}\right) B_{IV} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Le déterminant de \mathbf{B}_1 se calcule avec (5.4) :

$$(B_1)_{III} = \frac{B_{III}}{k^2 k'^4} \quad (5.8)$$

Le second invariant de \mathbf{B}_1 se calcule avec (5.6) :

$$\begin{aligned} (B_1)_{II} &= (B_1^{-1})_I B_{III} \\ &= (\mathbf{B}^2 - B_I \mathbf{B} + B_{II} \mathbf{G})_I \quad (\text{Cayley-Hamilton}) \\ &= (\mathbf{B}^2)_I - B_I^2 + 3 B_{II} \\ &= (B_I^2 - 2 B_{II}) - B_I^2 + 3 B_{II} \\ (B_1)_{II} &= B_{II} \end{aligned} \quad (5.9)$$

On sait donc calculer les invariants du cisaillement combiné en fonction de ceux de \mathbf{B} , de k et k' .

D'autre part, pour que \mathbf{F}_1 soit un cisaillement combiné, il faut

$$\begin{aligned}
k &= \frac{1}{\|\mathbf{F}^{-1} \otimes \mathbf{n}_t\|} \\
k^2 &= \frac{1}{\|\mathbf{F}^{-1} \otimes \mathbf{n}_t\|^2} = \frac{1}{\mathbf{B}^{-1} \otimes \mathbf{N}_t} \\
&= \frac{B_{III}}{(\mathbf{B}^2 - B_I \mathbf{B} + B_{II} \mathbf{G}) \otimes \mathbf{N}_t} \quad (\text{Cayley-Hamilton}) \\
k^2 &= \frac{B_{III}}{B_V - B_I B_{IV} + B_{II}} \tag{5.10}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
k' &= \frac{\det \mathbf{F}}{\|\mathbf{F}^T \otimes \mathbf{n}_t\|} \\
k'^2 &= \frac{\det(\mathbf{F} \otimes \mathbf{F}^T)}{\mathbf{B} \otimes \mathbf{N}_t} = \frac{B_{III}}{B_{IV}} \tag{5.11}
\end{aligned}$$

Finalement, en reportant (5.10) et (5.11) dans (5.7) et (5.8), les invariants du cisaillement combiné sont :

$$(B_1)_I = \frac{B_{IV}}{B_{III}} (B_I - B_{IV} + B_V - B_I B_{IV} + B_{II}) = 3 + \gamma^2 \tag{5.12}$$

$$(B_1)_{II} = B_{II} \quad (\text{fonction de } \phi)$$

$$(B_1)_{III} = \frac{B_{IV}^2}{B_{III}^2} (B_V - B_I B_{IV} + B_{II}) = \cos^2 \alpha \tag{5.13}$$

5.3 Choix d'une énergie

On considère donc la composition fictive suivante :

$$E_0 \xrightarrow{\mathbf{F}_1} E_1 \xrightarrow{\mathbf{F}_2} E_2 \xrightarrow{\mathbf{F}_3} E_t$$

L'évolution de la direction d'anisotropie est

$$\mathbf{n}_0 \xrightarrow{\mathbf{F}_1} \mathbf{n}_t \xrightarrow{\mathbf{F}_2} \mathbf{n}_t \xrightarrow{\mathbf{F}_3} \mathbf{n}_t$$

et l'énergie interne massique finale s'écrit :

$$u_t = \delta u_0^1 + \delta u_1^2 + \delta u_2^t = u_1 + \delta u_1^2 + \delta u_2^t$$

Pour simplifier, on supposera que :

- Les variations d'énergie interne des transformation \mathbf{F}_2 (dilatation isotrope autour de \mathbf{n}_t) et \mathbf{F}_3 (dilatation uniforme dans la direction \mathbf{n}_t) ne dépendent pas du cisaillement combiné initial.
- L'énergie du cisaillement combiné \mathbf{F}_1 est indépendante de l'orientation ϕ entre les deux cisaillements.
- Dans le cisaillement combiné \mathbf{F}_1 , la variation d'énergie du cisaillement pur est indépendante du cisaillement isovolume initial.

Sous ces hypothèses, on peut poser une énergie interne par unité de volume de la forme :

$$u = g_1(\gamma^2) + f_1(\cos^2 \alpha) + f_2(k'^2) + f_3(k^2)$$

où γ^2 , $\cos^2 \alpha$, k'^2 et k^2 s'expriment en fonction des 5 invariants par les formules (5.10), (5.11), (5.12) et (5.13).

Les fonctions g_1 , f_1 , f_2 et f_3 doivent respecter les conditions raisonnables suivantes :

$$\begin{array}{lll} g_1(0) = 0 & \lim_{x \rightarrow \infty} g_1(x) = \infty & \left[\frac{dg_1}{dx} \right]_{x>0} > 0 \\ f_1(1) = 0 & \lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) = \infty & \left[\frac{df_1}{dx} \right]_{0<x<1} < 0 \\ f_2(1) = 0 & \lim_{x \rightarrow \infty} f_2(x) = \infty & \left[\frac{df_2}{dx} \right]_{x>0} > 0 \\ & \lim_{x \rightarrow 0} f_2(x) = \infty & \left[\frac{df_2}{dx} \right]_{0<x<1} < 0 \\ f_3(1) = 0 & \lim_{x \rightarrow \infty} f_3(x) = \infty & \left[\frac{df_3}{dx} \right]_{x>0} > 0 \\ & \lim_{x \rightarrow 0} f_3(x) = \infty & \left[\frac{df_3}{dx} \right]_{0<x<1} < 0 \end{array}$$

Le choix de ces fonctions peut être guidé par des essais simples de cisaillement isovolume, de cisaillement pur, de traction dans la direction d'anisotropie et perpendiculairement à la direction d'anisotropie.

L'énergie interne massique étant connue, la loi de comportement est celle donné en (4.8) page 130. Puisqu'on sait exprimer les invariants de \mathbf{B} en fonction de ceux de \mathbf{V} (voir 4.4.3 page 131), on peut aussi bien utiliser la loi (4.9) page 132. De par leur construction ces lois ont bien une dissipation nulle.

Remarque:

La décomposition de la transformation qui a été suggérée ici n'est pas absolument nécessaire, elle n'a pour but que de faciliter l'identification. On peut chercher à identifier les coefficients d'expressions quelconques de l'énergie interne massique en fonction des cinq invariants isotropes transverses. Toute expression de l'énergie interne massique donnera un comportement élastique (dissipation nulle) si on utilise la loi (4.8) page 130 ou la loi (4.9) page 132, mais il faut la choisir pour que le comportement soit régulier et cohérent aux limites (au voisinage de la transformation rigide et comportement vers l'infini).

Chapitre 6

Thermo-élasticité

6.1 Définition

Un milieu thermo-élastique est un milieu élastique, tels qu'il a été défini au chapitre 1 page 101. On en résume ici l'essentiel :

- Il existe un état naturel dans lequel la contrainte est nulle, la déformation est mesurée à partir de cet état, la température est T_0 . Dans les problèmes pratiques, on suppose qu'à l'instant initial t_0 , toutes les particules du corps sont dans leur état naturel.
- Les variables d'état sont la température T , la déformation (mesurée par un tenseur de déformation \mathbf{X}), et d'éventuelles directions actuelles d'anisotropie si le milieu est anisotrope.

Après réduction de la dimension de l'espace des états, les variables d'état *scalaires et indépendantes* sont $(T, X_I, X_{II}, X_{III})$, éventuellement complétées par les invariants d'anisotropie $(\mathbf{X} \otimes \overline{\mathbf{N}}_t^{(i)}, \mathbf{X}^2 \otimes \overline{\mathbf{N}}_t^{(i)}, \dots)$. Quand on veut les désigner toutes, on les note $(\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_n)$.

- La dissipation intrinsèque est nulle (voir (4.9) page 95) :

$$0 = \rho (T \dot{s} - \dot{u}) + \boldsymbol{\sigma} \otimes \overline{\mathbf{D}} \quad (6.1)$$

$$0 = \rho (T \partial_0 s - \partial_0 u) \dot{T} + \rho \sum_{i=1}^n (T \partial_i s - \partial_i u) \dot{\chi}_i + \boldsymbol{\sigma} \otimes \overline{\mathbf{D}} \quad (6.2)$$

pour tout état et pour toute évolution thermo-mécanique infinitésimale autour de cet état

La thermo-élasticité se distingue de l'élasticité isotherme par le fait que les évolutions ne sont pas isothermes, et que les températures ne sont pas uniformes. Les évolutions ne sont donc pas isentropiques et la dissipation se réduit à la dissipation thermique :

$$\phi = \phi_{th} = - \frac{\mathbf{q} \otimes \overline{\mathbf{grad}}_E T}{T} \geq 0$$

pour tout état et pour toute évolution thermo-mécanique infinitésimale autour de cet état

6.2 Conséquence de la réversibilité intrinsèque

Tant qu'on ne précise pas la signification physique des (χ_1, \dots, χ_n) , on ne peut rien conclure de (6.2), car on ne peut rien préciser sur l'indépendance entre les dérivés particuliers $\dot{T}, \dot{\chi}_1, \dots, \dot{\chi}_n$

et \mathbf{D}^1 .

Or, dans le cas de la thermo-élasticité, les χ_i ($i = 1 \dots, n$) sont :

- la température $\chi_0 = T$,
- les invariants de déformation ($\chi_1 = X_I, \chi_2 = X_{II}, \chi_3 = X_{III}$) pour la thermo-élasticité isotrope,
- éventuellement complétés en thermo-élasticité anisotrope par variables d'état (χ_4, \dots, χ_n) = $(\mathbf{X} \otimes \overline{\mathbf{N}}_t^{(p)}, \mathbf{X}^2 \otimes \overline{\mathbf{N}}_t^{(p)}, \mathbf{N}_t^{(p)} \otimes \overline{\mathbf{N}}_t^{(q)}, \dots)$, qui représentent «l'orientation relative» de la déformation par rapport aux directions d'anisotropie.

Les formules de l'annexe E page 227 ainsi que F.5 et F.7 page 237, montrent que les dérivées particulières des variables d'état ($\dot{\chi}_1, \dots, \dot{\chi}_n$) sont liées au mouvement infinitésimal (\mathbf{D}, \mathbf{W}), mais indépendantes de $\dot{\chi}_0 = \dot{T}$. On peut donc définir une évolution infinitésimale arbitraire autour d'un état, en donnant une valeur arbitraire à \dot{T} indépendamment des dérivées particulières des autres variables d'état ($\dot{\chi}_1, \dots, \dot{\chi}_n$) (qui traduisent la variation de déformation).

\dot{T} étant arbitraire et indépendant des dérivées particulières des autres variables d'état et de \mathbf{D} , la réversibilité intrinsèque (6.2) page 137 pour toute évolution thermo-dynamique infinitésimale entraîne les deux égalités :

$$0 = T \partial_0 s - \partial_0 u \quad (6.3)$$

$$0 = \rho \sum_{i=1}^n (T \partial_i s - \partial_i u) \dot{\chi}_i + \boldsymbol{\sigma} \otimes \overline{\mathbf{D}} = \rho \sum_{i=1}^n \partial_i (T s - u) \dot{\chi}_i + \boldsymbol{\sigma} \otimes \overline{\mathbf{D}} \quad (6.4)$$

L'introduction de l'énergie libre massique $\psi = u - T s$ permet de simplifier l'écriture de la seconde égalité :

$$0 = T \partial_0 s - \partial_0 u = -\partial_0 \psi - s \quad (6.5)$$

$$0 = -\rho \sum_{i=1}^n \partial_i \psi \dot{\chi}_i + \boldsymbol{\sigma} \otimes \overline{\mathbf{D}} \quad (6.6)$$

On déduit de (6.5) que les deux fonctions d'état u et s peuvent s'exprimer en fonction de l'énergie libre ψ :

$$s = -\partial_0 \psi = -\frac{\partial \psi}{\partial T} \quad (6.7)$$

$$u = \psi + T s = \psi - T \frac{\partial \psi}{\partial T} \quad (6.8)$$

Bien noter que ce résultat est dû à l'indépendance de \dot{T} vis à vis des autres dérivées particulières $\dot{\chi}_i$. On verra un peu plus loin qu'il n'est pas transposable au cas de la thermo-élasticité incompressible.

1. À ce stade, un très grand nombre d'auteurs font une supposition sur l'indépendance de \dot{T} vis à vis des $\dot{\chi}_i$ et \mathbf{D} . Cette supposition, souvent appelée «postulat de Helmholtz», permet de déduire $T \partial_0 s - \partial_0 u = 0$. Elle est prématurée tant qu'on n'a pas donné de signification physique aux χ_i . D'autre part, le statut de postulat est sans doute un peu usurpé, car il ne s'applique pas à tous les milieux continus. Par exemple, on verra en 2 page 175 que les liquides n'ont qu'une seule variable d'état indépendante, T , car la masse volumique est uniquement déterminée par la température par une loi de dilatation $\rho = f_\rho(T)$. La conservation de la masse (1.5) page 72 $\text{Tr} \mathbf{D} = -\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -\frac{f'_\rho(T)}{f_\rho(T)} \dot{T}$ montre clairement que \dot{T} et \mathbf{D} ne peuvent pas être supposés indépendants. Il ne s'applique pas non plus aux milieux thermo-élastiques incompressibles (voir 6.7 page 146). D'une manière générale, le «postulat» de Helmholtz ne peut pas s'appliquer chaque fois que le milieu est soumis à une «liaison interne» qui limite les déformations possibles (incompressibilité, inextensibilité dans une direction matérielle, etc.)

2. u et s étant des fonctions d'état et T une variable d'état, la grandeur ψ est une fonction de $(T, \chi_1, \dots, \chi_n)$. ψ est donc une fonction d'état.

Pour modéliser complètement un milieu thermo-élastique, il suffit de définir la fonction ψ en fonction des variables d'état. On pose donc

$$\psi = \psi_{\mathbf{X}}(X_I, X_{II}, X_{III}, \dots)$$

On déduit de (6.6) la forme générale des lois de comportement thermo-élastiques :

dans le cas isotrope, en faisant des calculs similaires à la section 2.2 page 104 (il suffit de remplacer $u_{\mathbf{X}}$ par $\psi_{\mathbf{X}}$), on trouve comme dans (2.4) page 106 :

$$\dot{\psi} = \partial_0 \psi_{\mathbf{X}} \dot{T} + [(\partial_1 \psi_{\mathbf{X}} + X_I \partial_2 \psi_{\mathbf{X}} + X_{II} \partial_3 \psi_{\mathbf{X}}) \mathbf{G} - (\partial_2 \psi_{\mathbf{X}} + X_I \partial_3 \psi_{\mathbf{X}}) \mathbf{X} + \partial_3 \psi_{\mathbf{X}} \mathbf{X}^2] \overline{\otimes} \dot{\mathbf{X}}$$

La réversibilité intrinsèque (6.6) des milieux thermo-élastiques isotropes s'écrit donc :

$$-\rho [(\partial_1 \psi_{\mathbf{X}} + X_I \partial_2 \psi_{\mathbf{X}} + X_{II} \partial_3 \psi_{\mathbf{X}}) \mathbf{G} - (\partial_2 \psi_{\mathbf{X}} + X_I \partial_3 \psi_{\mathbf{X}}) \mathbf{X} + \partial_3 \psi_{\mathbf{X}} \mathbf{X}^2] \overline{\otimes} \dot{\mathbf{X}} + \boldsymbol{\sigma} \overline{\otimes} \mathbf{D} = 0$$

En comparant avec l'expression de la réversibilité intrinsèque de l'élasticité isotrope isotherme (2.5) page 106 qu'on rappelle ici

$$-\rho [(\partial_1 u_{\mathbf{X}} + X_I \partial_2 u_{\mathbf{X}} + X_{II} \partial_3 u_{\mathbf{X}}) \mathbf{G} - (\partial_2 u_{\mathbf{X}} + X_I \partial_3 u_{\mathbf{X}}) \mathbf{X} + \partial_3 u_{\mathbf{X}} \mathbf{X}^2] \overline{\otimes} \dot{\mathbf{X}} + \boldsymbol{\sigma} \overline{\otimes} \mathbf{D} = 0$$

on voit que la forme générale des lois de comportement mécanique d'un milieu thermo-élastique isotrope est formellement la même que celle des milieux élastiques isothermes. Il suffit de refaire les mêmes raisonnements en remplaçant l'énergie interne par l'énergie libre.

dans le cas anisotrope, la conclusion est identique. On peut s'en convaincre en se reportant, par exemple, à l'isotropie transverse section 4.4.1 page 129 et suivantes.

En thermo-élasticité, les formes générales de la loi de comportement mécanique sont formellement les mêmes qu'en élasticité isotherme : il suffit de remplacer l'énergie interne par l'énergie libre.

Par exemple, pour les milieux thermo-élastiques isotropes :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\rho_0}{e_{M_I}} [(\partial_1 \psi_M + M_I \partial_2 \psi_M + M_{II} \partial_3 \psi_M) \mathbf{G} - (\partial_2 \psi_M + M_I \partial_3 \psi_M) \mathbf{M} + \partial_3 \psi_M \mathbf{M}^2] \quad (6.9)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\rho_0}{V_{III}} [V_{III} \partial_3 \psi_V \mathbf{G} + (\partial_1 \psi_V + V_I \partial_2 \psi_V) \mathbf{V} - \partial_2 \psi_V \mathbf{V}^2] \quad (6.10)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = 2 \frac{\rho_0}{B_{III}^{\frac{1}{2}}} [B_{III} \partial_3 \psi_B \mathbf{G} + (\partial_1 \psi_B + B_I \partial_2 \psi_B) \mathbf{B} - \partial_2 \psi_B \mathbf{B}^2] \quad (6.11)$$

et pour les milieux thermo-élastiques isotropes transverses :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \frac{2\rho_0}{B_{III}^{\frac{1}{2}}} [\partial_3 \psi_B B_{III} \mathbf{G} + (\partial_1 \psi_B + B_I \partial_2 \psi_B) \mathbf{B} - \partial_2 \psi_B \mathbf{B}^2] \\ &+ \frac{2\rho_0}{B_{III}^{\frac{1}{2}}} [\partial_4 \psi_B (\mathbf{B} \overline{\otimes} \mathbf{N}_t + \mathbf{N}_t \overline{\otimes} \mathbf{B}) + \partial_5 \psi_B (\mathbf{B}^2 \overline{\otimes} \mathbf{N}_t + \mathbf{N}_t \overline{\otimes} \mathbf{B}^2)] \\ &+ \frac{2\rho_0}{B_{III}^{\frac{1}{2}}} [-(\partial_4 \psi_B B_{IV} + \partial_5 \psi_B B_V) \mathbf{N}_t + \partial_5 \psi_B \mathbf{B} \overline{\otimes} \mathbf{N}_t \overline{\otimes} \mathbf{B}] \end{aligned} \quad (6.12)$$

où l'énergie libre est une fonction de T , des invariants de déformation, et des éventuels invariants d'anisotropie.

6.3 Conséquences du second principe de la thermodynamique

Le second principe implique que la dissipation est non négative. Pour les milieux thermo-élastiques, il se réduit donc à

$$\Phi_{th} = -\frac{\mathbf{q} \overline{\otimes} \mathbf{grad}_E T}{T} \geq 0$$

Puisque T est positif, il vient

$$-\mathbf{q} \otimes \overline{\mathbf{grad}_E T} \geq 0 \quad (6.13)$$

pour tout état et pour toute évolution thermo-mécanique infinitésimale autour de cet état

où $\mathbf{grad}_E T$ ne dépend que de l'environnement de la particule et peut donc prendre des valeurs quelconques.

Pour que le second principe soit respecté dans toute évolution, il faut que le produit scalaire des vecteurs \mathbf{q} et $\mathbf{grad}_E T$ soit positif $\forall \mathbf{grad}_E T$. Le vecteur courant de chaleur \mathbf{q} est donc nécessairement au moins une fonction de $\mathbf{grad}_E T$. On a donc :

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}_q(\mathbf{grad}_E T, \dots)$$

La fonction \mathbf{f}_q est appelée *loi de comportement thermique* ou encore *loi de conductivité thermique*. Elle doit être choisie telle que $-\mathbf{f}_q(\mathbf{grad}_E T, \dots) \otimes \overline{\mathbf{grad}_E T} \geq 0 \quad \forall \mathbf{grad}_E T$ et telle qu'elle soit universelle, c'est-à-dire que pour deux observateurs O et \tilde{O} , on doit avoir $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{f}_q(\mathbf{grad}_E \tilde{T}, \dots)$ avec le même \mathbf{f}_q . Or,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{q}} &= \mathbf{Q}_t \otimes \overline{\mathbf{q}} \quad (\text{objectivité de } \mathbf{q}, \text{ voir 3.3.6 page 88}) \\ \mathbf{grad}_E \tilde{T} &= \mathbf{Q}_t \otimes \overline{\mathbf{grad}_E T} \quad (\text{objectivité de } T, \text{ voir 4.2 page 92 et (3.1) page 23}) \end{aligned}$$

L'universalité de la fonction \mathbf{f}_q implique donc que³

$$\boxed{\mathbf{f}_q(\mathbf{grad}_E \tilde{T}, \dots) = \mathbf{Q}_t \otimes \overline{\mathbf{f}_q(\mathbf{grad}_E T, \dots)}} \quad (6.14)$$

Si le milieu est thermiquement isotrope, on peut prendre la loi de conductivité classique, dite de Fourier

$$\mathbf{q} = \underbrace{-\alpha(T) \mathbf{grad}_E T}_{\mathbf{f}_q(\mathbf{grad}_E T, T)}$$

où $\alpha(T) > 0$ est le coefficient de conductibilité thermique isotrope à la température T^4 . Il est facile de vérifier qu'elle satisfait bien aux conditions (6.14) et (6.13) page 140.

Si le milieu n'est pas thermiquement isotrope, le courant de chaleur \mathbf{q} dépend non seulement de $\mathbf{grad}T$, mais aussi des directions actuelles d'anisotropie :

$$\mathbf{q} = -\mathbf{f}_q(T, \mathbf{grad}_E T, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \dots)$$

Pour un milieu thermiquement anisotrope transverse (une seule direction d'anisotropie), on peut prendre par exemple :

$$\mathbf{q} = \underbrace{-\alpha(T) (\mathbf{grad}_E T \otimes \overline{\mathbf{n}_t}) \mathbf{n}_t - \beta(T) [\mathbf{grad}_E T - (\mathbf{grad}_E T \otimes \overline{\mathbf{n}_t}) \mathbf{n}_t]}_{\mathbf{f}_q(\mathbf{grad}_E T, T, \mathbf{n}_t)} \quad (6.15)$$

où

- $\alpha(T) > 0$ est le coefficient de conductibilité thermique dans la direction d'anisotropie \mathbf{n}_t

3. Cette relation est la condition pour que la fonction à valeur vectorielle \mathbf{f}_q soit une fonction isotrope de ses arguments. Bien noter que dans la section 4.2 page 35, on n'a donné les implications de l'isotropie (mathématique) que pour des fonctions à valeur scalaire.

4. On peut prendre des conductibilités thermiques isotropes plus compliquées, par exemple la fonction $\alpha = f_\alpha(T, \|\mathbf{grad}T\|)$ est bien une fonction isotrope de ses arguments. Il suffit d'assurer que la fonction $f_\alpha(T, \|\mathbf{grad}T\|)$ soit à valeur positive.

– $\beta(T) > 0$ est le coefficient de conductibilité thermique transverse

Il est facile de vérifier qu'elle satisfait bien aux conditions (6.14) page 140 et (6.13) page 140.

Remarque :

Une forme assez générale de loi de conductivité thermique est par exemple :

$$\mathbf{q} = \underbrace{-\mathbf{A}(\chi_0, \dots, \chi_n, \mathbf{grad}_E T)}_{\mathbf{f}_q(\chi_0, \dots, \chi_n, \mathbf{grad}_E T)} \overline{\otimes} \mathbf{grad}_E T \quad (6.16)$$

où $\mathbf{A}(\chi_0, \dots, \chi_n, \mathbf{grad}_E T)$ est un tenseur symétrique défini positif⁵ et objectif⁶. On vérifie facilement qu'elle satisfait à l'inégalité $\phi_{th} \geq 0$ et à la condition (6.14).

■

Le choix de la fonction \mathbf{f}_q ne peut être guidé que par des mesures expérimentales.

6.4 Capacités calorifiques et dilatations

La capacité calorifique dans une évolution infinitésimale *non isotherme* a été définie en (4.11) page 97 :

$$C = \frac{\mathcal{P}_{cal vol ext} + \mathcal{P}_{cal vol int}}{\rho \dot{T}} = T \partial_0 s + T \sum_{i=1}^n \partial_i s \frac{\dot{\chi}_i}{\dot{T}}$$

La valeur de C dépend de l'évolution infinitésimale, car pour chaque évolution infinitésimale dans l'espace des états, les rapports $\frac{\dot{\chi}_i}{\dot{T}}$ sont différents. D'autre part, elle dépend aussi *a priori* de l'état.

Dans les milieux thermo-élastiques, la dissipation intrinsèque est nulle.

La réversibilité intrinsèque implique en particulier la relation (6.7) page 138, et on peut écrire C avec l'énergie libre :

$$C = -T \partial_0 \psi - T \sum_{i=1}^n \partial_0 \psi \frac{\dot{\chi}_i}{\dot{T}}$$

D'autre part, la réversibilité intrinsèque implique aussi $\mathcal{P}_{cal vol int} = 0$. On peut alors écrire C avec l'énergie interne :

$$\begin{aligned} C &= \frac{\mathcal{P}_{cal vol ext}}{\rho \dot{T}} \\ &= \frac{\dot{u}}{\dot{T}} - \frac{\boldsymbol{\sigma} \overline{\otimes} \mathbf{D}}{\rho \dot{T}} \quad (\text{Premier principe (3.3) page 90}) \\ C &= \partial_0 u + \sum_{i=1}^n \partial_i u \frac{\dot{\chi}_i}{\dot{T}} - \frac{\boldsymbol{\sigma} \overline{\otimes} \mathbf{D}}{\rho \dot{T}} \end{aligned}$$

Finalement, pour un milieu thermo-élastique, la capacité calorifique dans une évolution non isotherme peut s'exprimer en fonction de l'une quelconque des fonctions d'état u , s ou ψ :

$$C = T \partial_0 s + T \sum_{i=1}^n \partial_i s \frac{\dot{\chi}_i}{\dot{T}} = -T \partial_0 \psi - T \sum_{i=1}^n \partial_0 \psi \frac{\dot{\chi}_i}{\dot{T}} = \partial_0 u + \sum_{i=1}^n \partial_i u \frac{\dot{\chi}_i}{\dot{T}} - \frac{\boldsymbol{\sigma} \overline{\otimes} \mathbf{D}}{\rho \dot{T}}$$

5. On en construit facilement: il suffit de construire un tenseur diagonal \mathbf{A} de $n+2$ termes diagonaux $\lambda_i = f_i(\chi_0, \dots, \chi_n, \mathbf{grad}_E T) \geq 0$. Le tenseur $\mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1} \overline{\otimes} \mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{T}$, où \mathbf{T} est un tenseur du second ordre inversible quelconque. \mathbf{A} convient car il est bien symétrique défini positif.

6. pour assurer l'objectivité de \mathbf{q} . Si on se réfère à la note précédente, il suffit de prendre le tenseur diagonal \mathbf{A} objectif (c'est-à-dire que les λ_i sont des fonctions scalaires isotropes pour leurs arguments) sur une base objective (par exemple contruite sur les directions d'anisotropie), et un tenseur \mathbf{T} objectif (\mathbf{G} ou un tenseur de déformation).

Parmi toutes les évolutions infinitésimales non isothermes autour d'un état, on va en considérer deux particulières, qui sont expérimentalement intéressantes :

- la capacité calorifique à déformation constante C_d : c'est la capacité calorifique des transformations avec $\mathbf{D} = \mathbf{0}$. Elle représente la quantité de chaleur nécessaire pour élever de $1^\circ K$ une masse de $1 Kg$ de matériau à déformation bloquée.
- la capacité calorifique à contrainte nulle : c'est la capacité calorifique des transformations avec $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$. Elle représente la quantité de chaleur nécessaire pour élever de $1^\circ K$ une masse de $1 Kg$ de matériau libre de se dilater.

Dans ces deux évolutions particulières, la puissance mécanique des efforts extérieurs est nulle.

6.4.1 Capacité calorifique à déformation constante

Si l'évolution infinitésimale est à déformation constante, alors on a $\mathbf{D} = \mathbf{0}$, ce qui entraîne⁷ $\dot{\chi}_1 = \dots = \dot{\chi}_n = 0$.

La capacité calorifique à déformation constante C_d est alors :

$$C_d = T \partial_0 s = -T \partial_{00} \psi = \partial_0 u$$

En principe⁸, on a $C_d \geq 0$ ⁹. On en déduit des conditions sur les expressions de u_X , s_X et ψ_X . Ces conditions doivent être satisfaites par toute expression de u , s ou ψ modélisant un milieu thermo-élastique.

C_d peut être mesuré expérimentalement en étudiant les échauffements à déformation bloquée.

6.4.2 Capacité calorifique à contrainte nulle

On considère maintenant des transformations infinitésimales à *contrainte nulle*. Les seules sollicitations extérieures sont des échanges thermiques. Dans ces évolutions, la température et la déformation varient sous l'effet des échanges de chaleur. On les appelle les *dilatations libres*.

Si la fonction ψ est bien choisie, de telles transformations existent, sont physiquement raisonnables et sont uniques. On donne en annexe G page 239 les conditions nécessaires sur l'expression de ψ et quelques conditions suffisantes pour que la solution en déformation de l'équation $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$ soit raisonnable et unique. *Ces conditions limitent les choix d'expressions possibles de ψ en fonction des variables d'état.*

La capacité calorifique à contrainte nulle est

$$C_\sigma = \bar{\partial}_0 u + \sum_{i=1}^n \bar{\partial}_i u \frac{\dot{\chi}_i}{T}$$

où $\bar{\partial}_i u_X$ désignent les valeurs des dérivées partielles pour la déformation particulière à contrainte nulle.

Selon le type de milieu thermo-élastique envisagé (isotrope ou non), l'expression de C_σ change car les χ_i ont des significations physiques différentes et les déformations physiquement admissibles sont différentes.

7. voir par exemple (E.4), (E.5), (E.6) page 228, et (F.6), (F.8) page 237

8. La dissipation intrinsèque est nulle. Il n'y a donc pas de phénomène physico-chimique endo ou exothermique.

9. un apport de chaleur ne peut pas diminuer la température, une perte de chaleur ne peut pas l'augmenter.

Cas isotrope

Les variables d'état sont $\chi_0 = T, \chi_1 = X_I, \chi_2 = X_{II}, \chi_3 = X_{III}$.

Si ψ est bien choisi¹⁰, les transformations géométriques subies par le milieu sont des dilatations sphériques¹¹ dont les tenseurs de déformation sont sphériques. On a donc :

$$X_{II} = \frac{X_I^2}{3} \quad \Rightarrow \quad \dot{X}_{II} = \frac{2 X_I}{3} \dot{X}_I \quad ; \quad X_{III} = \frac{X_I^3}{27} \quad \Rightarrow \quad \dot{X}_{III} = \frac{X_I^2}{9} \dot{X}_I$$

Dans une dilatation sphérique, les $\dot{\chi}_i$ ne sont donc pas indépendants.

La capacité calorifique à contrainte nulle pour un milieu thermo-élastique isotrope est donc :

$$C_\sigma = \bar{\partial}_0 u_X + \bar{\partial}_1 u_X \frac{\dot{X}_I}{T} + \bar{\partial}_2 u_X \frac{\dot{X}_{II}}{T} + \bar{\partial}_3 u_X \frac{\dot{X}_{III}}{T} = \bar{\partial}_0 u_X + \left(\bar{\partial}_1 u_X + \frac{2 X_I}{3} \bar{\partial}_2 u_X + \frac{X_I^2}{9} \bar{\partial}_3 u_X \right) \frac{\dot{X}_I}{T}$$

où $\bar{\partial}_i u_X = \partial_i u_X \left(X_I, \frac{X_I^2}{3}, \frac{X_I^3}{27} \right)$

Le rapport $\frac{\dot{X}_I}{T}$ est déterminé par la *loi de dilatation volumique à contrainte nulle* du milieu thermoélastique, qui peut être facilement déterminée expérimentalement :

$$K_{v,\sigma} = f_{K_{v,\sigma}}(T - T_0) \quad \text{avec} \quad f_{K_{v,\sigma}}(0) = 1$$

$$\dot{K}_{v,\sigma} = f'_{K_{v,\sigma}} \dot{T}$$

Suivant le tenseur de déformation utilisé, on a

$$K_{v,\sigma} = e^{M_I} \quad \Rightarrow \quad M_I = \ln K_{v,\sigma} \quad \Rightarrow \quad \dot{M}_I = \frac{\dot{K}_{v,\sigma}}{K_{v,\sigma}} = \frac{f'_{K_{v,\sigma}}}{f_{K_{v,\sigma}}} \dot{T}$$

$$K_{v,\sigma} = V_{III} = \frac{V_I^3}{27} \quad \Rightarrow \quad V_I = 3 K_{v,\sigma}^{\frac{1}{3}} \quad \Rightarrow \quad \dot{V}_I = \frac{\dot{K}_{v,\sigma}}{K_{v,\sigma}^{\frac{2}{3}}} = \frac{f'_{K_{v,\sigma}}}{f_{K_{v,\sigma}}^{\frac{2}{3}}} \dot{T}$$

$$K_{v,\sigma} = B_{III}^{\frac{1}{3}} = \frac{B_I^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{27}} \quad \Rightarrow \quad B_I = 3 K_{v,\sigma}^{\frac{2}{3}} \quad \Rightarrow \quad \dot{B}_I = \frac{2 \dot{K}_{v,\sigma}}{K_{v,\sigma}^{\frac{1}{3}}} = \frac{2 f'_{K_{v,\sigma}}}{f_{K_{v,\sigma}}^{\frac{1}{3}}} \dot{T}$$

La capacité calorifique à contrainte nulle pour un milieu thermo-élastique isotrope est donc :

$$C_\sigma = \bar{\partial}_0 u_M + \left(\bar{\partial}_1 u_M + \frac{2 M_I}{3} \bar{\partial}_2 u_M + \frac{M_I^2}{9} \bar{\partial}_3 u_M \right) \frac{f'_{K_{v,\sigma}}}{f_{K_{v,\sigma}}} \quad \text{où} \quad \bar{\partial}_i u_M = \partial_i u_M \left(M_I, \frac{M_I^2}{3}, \frac{M_I^3}{27} \right)$$

$$= \bar{\partial}_0 u_V + \left(\bar{\partial}_1 u_V + \frac{2 V_I}{3} \bar{\partial}_2 u_V + \frac{V_I^2}{9} \bar{\partial}_3 u_V \right) \frac{f'_{K_{v,\sigma}}}{f_{K_{v,\sigma}}^{\frac{2}{3}}} \quad \text{où} \quad \bar{\partial}_i u_V = \partial_i u_V \left(V_I, \frac{V_I^2}{3}, \frac{V_I^3}{27} \right)$$

$$= \bar{\partial}_0 u_B + \left(\bar{\partial}_1 u_B + \frac{2 B_I}{3} \bar{\partial}_2 u_B + \frac{B_I^2}{9} \bar{\partial}_3 u_B \right) \frac{2 f'_{K_{v,\sigma}}}{f_{K_{v,\sigma}}^{\frac{1}{3}}} \quad \text{où} \quad \bar{\partial}_i u_B = \partial_i u_B \left(B_I, \frac{B_I^2}{3}, \frac{B_I^3}{27} \right)$$

On peut l'exprimer avec l'énergie libre en utilisant (6.8) page 138 :

$$\bar{\partial}_0 u_X = -\bar{\partial}_{0,0} \psi_X \quad \text{et} \quad \bar{\partial}_i u_X = \bar{\partial}_i \psi_X - T \bar{\partial}_{0,i} \psi_X \quad ; \quad i = 1, 2, 3$$

L'expérience montre que $C_\sigma \geq 0$ ¹², ce qui impose des conditions sur les expressions de u_X et ψ_X .

C_σ et $f_{K_{v,\sigma}}$ peuvent être mesurés expérimentalement en étudiant l'échauffement et la dilatation à contrainte nulle.

10. voir section G.1 page 239

11. voir section C.1 page 213.

12. un apport de chaleur ne peut pas diminuer la température, une perte de chaleur ne peut pas l'augmenter.

Cas isotrope transverse

Les variables d'état sont :

$$\chi_0 = T, \chi_1 = B_I, \chi_2 = B_{II}, \chi_3 = B_{III}, \chi_4 = B_{IV} = \mathbf{B} \otimes \overline{\mathbf{N}}_t, \chi_5 = B_V = \mathbf{B}^2 \otimes \overline{\mathbf{N}}_t.$$

Si ψ est bien choisi¹³, les transformations géométriques possibles d'un milieu thermo-élastique à contrainte nulle sont des compositions d'une dilatation dans la direction d'anisotropie¹⁴ et d'une dilatation isotrope autour de la direction d'anisotropie¹⁵ dont les tenseurs de déformation sont de la forme

$$\mathbf{B} = \frac{B_I - B_{IV}}{2} \mathbf{G} + \frac{3 B_{IV} - B_I}{2} \mathbf{N}_t$$

Les invariants sont :

$$\begin{aligned} B_{II} &= \frac{3 B_I^2 - 2 B_I B_{IV} + 3 B_{IV}^2}{4} &\Rightarrow \dot{B}_{II} &= \frac{3 B_I - B_{IV}}{2} \dot{B}_I + \frac{3 B_{IV} - B_I}{2} \dot{B}_{IV} \\ B_{III} &= \frac{B_{IV}(B_I - B_{IV})^2}{4} &\Rightarrow \dot{B}_{III} &= \frac{B_{IV}(B_I - B_{IV})}{2} \dot{B}_I + \frac{(B_I - B_{IV})(B_I - 3 B_{IV})}{4} \dot{B}_{IV} \\ B_V &= B_{IV}^2 &\Rightarrow \dot{B}_V &= 2 B_{IV} \dot{B}_{IV} \end{aligned}$$

La capacité calorifique à contrainte nulle pour un milieu thermo-élastique isotrope transverse est donc :

$$\begin{aligned} C_\sigma &= \bar{\partial}_0 u_B + \left[\bar{\partial}_1 u_B + \frac{3 B_I - B_{IV}}{2} \bar{\partial}_2 u_B + \frac{B_{IV}(B_I - B_{IV})}{2} \bar{\partial}_3 u_B \right] \frac{\dot{B}_I}{T} \\ &+ \left[\frac{3 B_{IV} - B_I}{2} \bar{\partial}_2 u_B + \frac{(B_I - B_{IV})(B_I - 3 B_{IV})}{4} \bar{\partial}_3 u_B + \bar{\partial}_4 u_B + 2 B_{IV} \bar{\partial}_5 u_B \right] \frac{\dot{B}_{IV}}{T} \end{aligned}$$

$$\text{où } \bar{\partial}_i u_B = \partial_i u_B \left(B_I, \frac{3 B_I^2 - 2 B_I B_{IV} + 3 B_{IV}^2}{4}, \frac{B_{IV}(B_I - B_{IV})^2}{4}, B_{IV}, B_{IV}^2 \right).$$

Si on note $K_{l, \mathbf{n}_t} = f_{l, \mathbf{n}_t}(T - T_0)$ la loi de dilatation linéique à contrainte nulle dans la direction d'anisotropie \mathbf{n}_t , et $K_{l, \mathbf{u}} = f_{l, \mathbf{u}}(T - T_0)$ la loi de dilatation linéique à contrainte nulle dans une direction $\mathbf{u} \perp \mathbf{n}_t$, et en utilisant (G.3) et (G.4) page 241, on a :

$$\begin{aligned} B_{IV} &= K_{l, \mathbf{n}_t}^2 &\Rightarrow \dot{B}_{IV} &= 2 f_{l, \mathbf{n}_t} f'_{l, \mathbf{n}_t} \dot{T} \\ \frac{B_I - B_{IV}}{2} &= K_{l, \mathbf{u}}^2 &\Rightarrow \dot{B}_I &= 2 (2 f_{l, \mathbf{u}} f'_{l, \mathbf{u}} + f_{l, \mathbf{n}_t} f'_{l, \mathbf{n}_t}) \dot{T} \end{aligned}$$

La capacité calorifique à contrainte nulle d'un milieu isotrope transverse est donc :

$$\begin{aligned} C_\sigma &= \bar{\partial}_0 u_B + 2 \left[\bar{\partial}_1 u_B + \frac{3 B_I - B_{IV}}{2} \bar{\partial}_2 u_B + \frac{B_{IV}(B_I - B_{IV})}{2} \bar{\partial}_3 u_B \right] (2 f_{l, \mathbf{u}} f'_{l, \mathbf{u}} + f_{l, \mathbf{n}_t} f'_{l, \mathbf{n}_t}) \\ &+ 2 \left[\frac{3 B_{IV} - B_I}{2} \bar{\partial}_2 u_B + \frac{(B_I - B_{IV})(B_I - 3 B_{IV})}{4} \bar{\partial}_3 u_B + \bar{\partial}_4 u_B + 2 B_{IV} \bar{\partial}_5 u_B \right] f_{l, \mathbf{n}_t} f'_{l, \mathbf{n}_t} \end{aligned}$$

$$\text{où } \bar{\partial}_i u_B = \partial_i u_B \left(B_I, \frac{3 B_I^2 - 2 B_I B_{IV} + 3 B_{IV}^2}{4}, \frac{B_{IV}(B_I - B_{IV})^2}{4}, B_{IV}, B_{IV}^2 \right).$$

On peut l'exprimer avec l'énergie libre en utilisant (6.8) page 138 :

$$\bar{\partial}_0 u_B = -\bar{\partial}_{0,0} \psi_B \quad \text{et} \quad \bar{\partial}_i u_B = \bar{\partial}_i \psi_B - T \bar{\partial}_{0,i} \psi_B ; \quad i = 1, 2, 3, 4, 5$$

L'expérience montre que $C_\sigma \geq 0$ ¹⁶, ce qui impose des conditions sur les expressions de u_B et ψ_B .

C_σ , $f_{K_{l, \mathbf{n}_t}}$ et $f_{K_{l, \mathbf{u}}}$ peuvent être mesurés expérimentalement en étudiant dilatations et échauffement à contrainte nulle.

13. voir section G.2 page 241

14. voir section C.2 page 214

15. voir section C.3 page 216

16. un apport de chaleur ne peut pas diminuer la température, une perte de chaleur ne peut pas l'augmenter.

6.5 Identification expérimentale d'un milieu thermo-élastique

Si l'introduction de l'énergie libre simplifie l'expression de la forme générale de la loi de comportement des milieux thermo-élastiques, il n'en reste pas moins que la mesure expérimentale d'une énergie libre ne peut se faire directement. La seule fonction d'état commodément identifiable est l'énergie interne massique u . En effet, entre l'état naturel à vitesse nulle E_0 et un état quelconque $E = (T, X_I, X_{II}, X_{III}, \dots)$ à vitesse nulle, le premier principe s'écrit :

$$U_E = W_0^E + Q_0^E$$

On évalue donc facilement l'énergie interne massique u ¹⁷ par une mesure du travail et de la chaleur échangées pour passer de E_0 à E_1 . Avec suffisamment de mesures convenablement réparties dans l'espace des états, on peut aboutir à une expression mathématique de la fonction $u = u_X(T, X_I, X_{II}, X_{III}, \dots)$.

L'énergie libre est alors solution de l'équation différentielle (voir (6.8) page 138) :

$$\psi_X(T, X_I, X_{II}, X_{III}, \dots) - T \frac{\partial \psi_X(T, X_I, X_{II}, X_{III}, \dots)}{\partial T} = u_X(T, X_I, X_{II}, X_{III}, \dots)$$

avec $\psi_X(T_0, 0, 0, 0, \dots) = 0$

qui peut être résolue quand on connaît $u_X(T, X_I, X_{II}, X_{III}, \dots)$.

On peut aussi chercher à construire directement une expression mathématique de la fonction ψ_X .

Une forme particulièrement simple, souvent utilisée, est de supposer que les coefficients d'élasticité isotherme sont indépendants de la température et que la capacité calorifique à déformation constante est constante (en T et \mathbf{X}). L'énergie interne est alors supposée de la forme : $u_X = C(T - T_0) + f(X_I, X_{II}, X_{III}, \dots)$ où $f(X_I, X_{II}, X_{III}, \dots)$ est l'expression de l'énergie interne d'un milieu élastique *isotherme*.

L'énergie libre est alors $\psi_X = C \left(T - T_0 - \ln \frac{T}{T_0} \right) + \left(1 - \frac{T}{T_0} \right) f(X_I, X_{II}, X_{III}, \dots)$

6.6 Conclusion

Pour modéliser complètement un milieu thermo-élastique, il suffit de donner une expression de l'énergie libre massique en fonction des variables d'état $\psi = \psi_X(T, X_I, X_{II}, X_{III}, \dots)$, ou une expression de l'énergie interne $u = u_X(T, X_I, X_{II}, X_{III}, \dots)$. Les autres fonctions d'état s'en déduisent avec (6.7) et (6.8) page 138.

Toutefois, pour faire une modélisation raisonnable, ces expressions doivent satisfaire un certain nombre de conditions :

- Les tenseurs de déformation dans une dilatation à contrainte nulle doivent être physiquement raisonnables (voir annexe G page 239).
- Les chaleurs massiques doivent être non négatives et correspondre à des mesures expérimentales.
- La loi de comportement qui s'en déduit doit correspondre à des essais expérimentaux à différentes températures¹⁸.

De plus, pour les milieux isotropes, il faut se donner la loi de dilatation volumique à contrainte nulle $K_{v,\sigma} = f_{K_{v,\sigma}}(T - T_0)$ et pour les milieux isotropes transverses les lois de dilatation linéiques à contrainte nulle $K_{l,\mathbf{n}_t} = f_{l,\mathbf{n}_t}(T - T_0)$ et $K_{l,\mathbf{u}} = f_{l,\mathbf{u}}(T - T_0)$

¹⁷ si les particules du corps d'épreuve sont dans un état raisonnablement uniforme

¹⁸ on peut s'inspirer des exemples de construction de loi qui sont données chapitre 3 page 119 et chapitre 5 page 133. La seule différence est que la fonction ψ_X est une fonction de la température.

Une fois la fonction d'état ψ ou u choisie, la loi de comportement mécanique $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X})$ ou $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, \mathbf{N}_t)$ et la capacité calorifique à déformation constante C_d sont complètement déterminées.

Une fois données les lois de dilatation à contrainte nulle, les chaleurs massiques C_σ sont déterminées.

La forme générale de la loi de comportement thermique (appelée aussi loi de conduction thermique) $\mathbf{q} = \mathbf{f}_q(T, X_I, X_{II}, X_{III}, \dots, \mathbf{grad}_E T)$ doit satisfaire le second principe et doit être universelle. Pour les milieux intrinsèquement réversibles, elle est indépendante du choix de ψ .

6.7 Thermo-élasticité «incompressible»

La méthode la plus simple¹⁹ pour modéliser des milieux «incompressibles» est de les considérer comme «peu compressibles», c'est-à-dire de choisir une énergie interne qui augmente très vite avec les variations de volume K_v .

Toutefois, on va montrer ici, à titre d'illustration, comment on peut construire une thermodynamique correcte des milieux thermo-élastiques parfaitement incompressibles²⁰. La plupart des exemples se limiteront au cas isotrope. L'extension milieux thermo-élastiques anisotropes ne fait que rajouter quelques variables d'état²¹.

L'hypothèse de milieu incompressible isotrope est souvent faite pour modéliser les élastomères.

6.7.1 Définition de l'incompressibilité

On dit qu'un milieu est incompressible si sa dilatation volumique est uniquement une fonction de la température²²: $K_v = \frac{\rho_0}{\rho} = f_{K_v}(T - T_0)$ (avec évidemment $f_{K_v}(0) = 1$).

La conservation de la masse établie en (1.5) page 72 entraîne :

$$\boxed{\text{Tr} \mathbf{D} = -\frac{\dot{\rho}}{\rho} = \frac{\dot{K}_v}{K_v} = \frac{f'_{K_v}}{f_{K_v}} \dot{T}} \quad (6.17)$$

L'hypothèse d'incompressibilité a donc une conséquence importante :

l'espace des variables d'état indépendantes a une dimension réduite de 1.

Exemples:

- si on utilise \mathbf{V} comme tenseur de déformation, pour un milieu thermo-élastique *isotrope incompressible*, les variables d'état *indépendantes* se réduisent aux trois variables (T, V_I, V_{II}) car $V_{III} = K_v = f_{K_v}(T)$.
- si on utilise \mathbf{M} comme tenseur de déformation, pour un milieu thermo-élastique *isotrope incompressible*, les variables d'état *indépendantes* se réduisent aux trois variables (T, M_{II}, M_{III}) car $M_I = \ln K_v = \ln f_{K_v}(T)$.
- pour les milieux non isotropes, il suffit d'ajouter les invariants croisés²³.

19. et sans doute la plus physique, l'incompressibilité étant une limite idéale.

20. Pour en déduire l'élasticité incompressible isotherme, il suffira de se restreindre aux évolutions à température constante, $\dot{T} = 0$ et $\dot{\psi} = \dot{u}$, c'est à dire à supprimer T des variables d'état indépendantes.

21. L'hypothèse d'incompressibilité pour les milieux anisotropes est rarement faite. On voit parfois une hypothèse d'inextensibilité dans une direction d'anisotropie $\mathbf{n}_i^{(3)}$, ce qui revient à supprimer la variable d'état scalaire $\mathbf{X} \otimes \mathbf{N}_i^{(3)}$

22. Elle est très souvent monotone croissante, mais on connaît des milieux continus où elle ne l'est pas : par exemple, la masse volumique de l'eau présente un maximum autour de 4°C.

23. voir note 21 page 146

6.7.2 Conséquences de la réversibilité intrinsèque

En (6.2) page 137, on a vu que la réversibilité intrinsèque s'écrit :

$$\rho (T \partial_0 s - \partial_0 u) \dot{T} + \rho \sum_{i=1}^n (T \partial_i s - \partial_i u) \dot{\chi}_i + \boldsymbol{\sigma} \overline{\otimes} \mathbf{D} = 0$$

pour tout état et pour toute évolution thermo-mécanique infinitésimale autour de cet état

Par exemple, pour un milieu thermo-élastique *isotrope incompressible*, si on utilise \mathbf{V} comme tenseur de déformation, la quantité $\chi_3 = V_{III} = K_v = f_{K_v}(T)$ est une fonction de T , et n'est donc plus une variable d'état indépendante. La réversibilité intrinsèque s'écrit donc :

$$\rho (T \partial_0 s_V - \partial_0 u_V) \dot{T} + \rho (T \partial_1 s_V - \partial_1 u_V) \dot{V}_I + \rho (T \partial_2 s_V - \partial_2 u_V) \dot{V}_{II} + \boldsymbol{\sigma} \overline{\otimes} \mathbf{D} = 0$$

pour tout état et pour toute évolution thermo-mécanique infinitésimale autour de cet état

En utilisant les dérivées des invariants (voir (B.1) page 212), il vient :

$$\rho (T \partial_0 s_V - \partial_0 u_V) \dot{T} + \rho (T \partial_1 s_V - \partial_1 u_V) \mathbf{G} \overline{\otimes} \dot{\mathbf{V}} + \rho (T \partial_2 s_V - \partial_2 u_V) (V_I \mathbf{G} - \mathbf{V}) \overline{\otimes} \dot{\mathbf{V}} + \boldsymbol{\sigma} \overline{\otimes} \mathbf{D} = 0$$

et en utilisant (E.16) page 229

$$\rho (T \partial_0 s_V - \partial_0 u_V) \dot{T} + [\rho (T \partial_1 s_V - \partial_1 u_V) \mathbf{V} + \rho (T \partial_2 s_V - \partial_2 u_V) (V_I \mathbf{V} - \mathbf{V}^2) + \boldsymbol{\sigma}] \overline{\otimes} \mathbf{D} = 0$$

On allège l'écriture en introduisant l'énergie libre :

$$\begin{aligned} -\rho (s_V + \partial_0 \psi_V) \dot{T} + [-\rho \partial_1 \psi_V \mathbf{V} - \rho \partial_2 \psi_V (V_I \mathbf{V} - \mathbf{V}^2) + \boldsymbol{\sigma}] \overline{\otimes} \mathbf{D} &= 0 \\ -\rho (s_V + \partial_0 \psi_V) \dot{T} + [-\rho (\partial_1 \psi_V + V_I \partial_2 \psi_V) \mathbf{V} + \rho \partial_2 \psi_V \mathbf{V}^2 + \boldsymbol{\sigma}] \overline{\otimes} \mathbf{D} &= 0 \end{aligned}$$

pour tout état et pour toute évolution thermo-mécanique infinitésimale autour de cet état

La grande différence avec les raisonnements précédents est dans l'exploitation de cette égalité pour toute évolution thermo-mécanique autour d'un état : l'hypothèse d'incompressibilité introduit une relation entre $\text{Tr} \mathbf{D}$ et \dot{T} à cause de la conservation de la masse (voir (6.17) page 146). Pour tirer des conclusions saines de cette égalité, il faut la transformer. On pose

$$\mathbf{D} = \frac{1}{3} \text{Tr} \mathbf{D} \mathbf{G} + \text{Dev} \mathbf{D} = \frac{1}{3} \frac{f'_{K_v}(T)}{f_{K_v}(T)} \dot{T} \mathbf{G} + \text{Dev} \mathbf{D}$$

et donc pour tout tenseur \mathbf{X} ²⁴ :

$$\mathbf{X} \overline{\otimes} \mathbf{D} = \frac{1}{3} \frac{f'_{K_v}(T)}{f_{K_v}(T)} \text{Tr} \mathbf{X} \dot{T} + \text{Dev} \mathbf{X} \overline{\otimes} \text{Dev} \mathbf{D}$$

Par exemple, avec le tenseur de déformation \mathbf{V} , la réversibilité intrinsèque s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \left[-\rho (s_V + \partial_0 \psi_V) + \frac{1}{3} \frac{f'_{K_v}(T)}{f_{K_v}(T)} (-\rho (\partial_1 \psi_V + V_I \partial_2 \psi_V) \text{Tr} \mathbf{V} + \rho \partial_2 \psi_V \text{Tr}(\mathbf{V}^2) + \text{Tr} \boldsymbol{\sigma}) \right] \dot{T} + \\ [-\rho (\partial_1 \psi_V + V_I \partial_2 \psi_V) \text{Dev} \mathbf{V} + \rho \partial_2 \psi_V \text{Dev}(\mathbf{V}^2) + \text{Dev} \boldsymbol{\sigma}] \overline{\otimes} \text{Dev} \mathbf{D} = 0 \end{aligned}$$

24. On rappelle que $\mathbf{G} \overline{\otimes} \text{Dev} \mathbf{T} = \text{Tr} \text{Dev} \mathbf{T} = 0 \quad \forall \mathbf{T}$.

soit encore, en exprimant les traces,

$$\left[-\rho (s_V + \partial_0 \psi_V) + \frac{1}{3} \frac{f'_{K_v}(T)}{f_{K_v}(T)} (-\rho (\partial_1 \psi_V + V_I \partial_2 \psi_V) V_I + \rho \partial_2 \psi_V (V_I^2 - 2 V_{II}) + \text{Tr} \boldsymbol{\sigma}) \right] \dot{T} +$$

$$\left[-\rho (\partial_1 \psi_V + V_I \partial_2 \psi_V) \text{Dev} \mathbf{V} + \rho \partial_2 \psi_V \text{Dev}(\mathbf{V}^2) + \text{Dev} \boldsymbol{\sigma} \right] \overline{\otimes} \text{Dev} \mathbf{D} = 0$$

et finalement en simplifiant,

$$\left[-\rho (s_V + \partial_0 \psi_V) + \frac{1}{3} \frac{f'_{K_v}(T)}{f_{K_v}(T)} (-\rho \partial_1 \psi_V V_I - 2 \rho \partial_2 \psi_V V_{II} + \text{Tr} \boldsymbol{\sigma}) \right] \dot{T} +$$

$$\left[-\rho (\partial_1 \psi_V + V_I \partial_2 \psi_V) \text{Dev} \mathbf{V} + \rho \partial_2 \psi_V \text{Dev}(\mathbf{V}^2) + \text{Dev} \boldsymbol{\sigma} \right] \overline{\otimes} \text{Dev} \mathbf{D} = 0 \quad (6.18)$$

Sous cette forme, on peut tirer des conclusions de la nullité de la dissipation intrinsèque pour toute évolution infinitésimale, car on décrit librement toutes ces évolutions en prenant \dot{T} (ou $\text{Tr} \mathbf{D}$) et $\text{Dev} \mathbf{D}$ *arbitraires et indépendants*, et les facteurs de \dot{T} et $\text{Dev} \mathbf{D}$ sont nécessairement nuls. On en déduit la forme générale du comportement mécanique des milieux thermo-élastiques isotropes incompressibles (en utilisant \mathbf{V} comme tenseur de déformation :

$$\begin{aligned} \text{Tr} \boldsymbol{\sigma} &= \frac{3 f_{K_v}(T)}{f'_{K_v}(T)} \rho (s_V + \partial_0 \psi_V) + \rho \partial_1 \psi_V V_I + 2 \rho \partial_2 \psi_V V_{II} \\ &= \frac{3 f_{K_v}(T)}{f'_{K_v}(T)} \frac{\rho_0}{f_{K_v}(T)} (s_V + \partial_0 \psi_V) + \frac{\rho_0}{f_{K_v}(T)} (V_I \partial_1 \psi_V + 2 V_{II} \partial_2 \psi_V) \\ &= \frac{3 \rho_0}{f'_{K_v}(T)} (s_V + \partial_0 \psi_V) + \frac{\rho_0}{f_{K_v}(T)} (V_I \partial_1 \psi_V + 2 V_{II} \partial_2 \psi_V) \\ \text{Dev} \boldsymbol{\sigma} &= \frac{\rho_0}{f_{K_v}(T)} (\rho (\partial_1 \psi_V + V_I \partial_2 \psi_V) \text{Dev} \mathbf{V} - \rho \partial_2 \psi_V \text{Dev}(\mathbf{V}^2)) \end{aligned}$$

Finalement, la forme générale des loi de comportement mécanique des milieux thermo-élastiques incompressibles, en utilisant \mathbf{V} comme tenseur de déformation, est :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{3 \rho_0}{f'_{K_v}(T)} (s_V + \partial_0 \psi_V) \mathbf{G} +$$

$$\frac{\rho_0}{f_{K_v}(T)} [(V_I \partial_1 \psi_V + 2 V_{II} \partial_2 \psi_V) \mathbf{G} + (\partial_1 \psi_V + V_I \partial_2 \psi_V) \text{Dev} \mathbf{V} - \partial_2 \psi_V \text{Dev}(\mathbf{V}^2)] \quad (6.19)$$

Comme on peut le constater, contrairement à la thermo-élasticité non incompressible, la stricte application de la réversibilité intrinsèque conduit à la nécessité de donner deux fonctions d'état $((u, s)$ ou $(\psi, s))$ pour modéliser le milieu.

On laisse le soin au lecteur de construire la forme générale des lois de comportement des milieux thermo-élastiques incompressibles en utilisant d'autres tenseurs de déformation (\mathbf{B} ou \mathbf{M}).

Toutefois, on peut toujours «éliminer» le premier terme en prenant une entropie telle que $s = -\partial_0 \psi$ ²⁵; dans ce cas, la définition de l'énergie libre ψ serait suffisante pour modéliser un milieu continu thermo-élastique incompressible, et il resterait :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\rho_0}{f_{K_v}(T)} [(V_I \partial_1 \psi_V + 2 V_{II} \partial_2 \psi_V) \mathbf{G} + (\partial_1 \psi_V + V_I \partial_2 \psi_V) \text{Dev} \mathbf{V} - \partial_2 \psi_V \text{Dev}(\mathbf{V}^2)]$$

25. mais cette simplification n'est pas déduite de la réversibilité intrinsèque comme en thermo-élasticité non incompressible. Il faut en donner une justification physique. Par exemple, si on constate expérimentalement que le coefficient de dilatation thermique $f_{K_v}(T)$ est constant en fonction de T , alors $f'_{K_v}(T) = 0$, et il faut que $s = -\partial_0 \psi$ pour que la contrainte reste finie.

Même si on fait l'hypothèse $s = -\partial_0\psi$, cette loi n'est pas un cas particulier de la loi de comportement thermo-élastique non incompressible²⁶ donnée en (6.10) page 139, qu'on reporte ici pour comparaison :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\rho_0}{V_{III}} [V_{III}\partial_3\psi_V \mathbf{G} + (\partial_1\psi_V + V_I\partial_2\psi_V) \mathbf{V} - \partial_2\psi_V \mathbf{V}^2]$$

On constate de plus, que même dans le cas incompressible, la partie sphérique de $\boldsymbol{\sigma}$ est non seulement une fonction de la température mais aussi de la déformation²⁷. En effet, la partie sphérique de $\boldsymbol{\sigma}$ est :

$$\text{Sph}\boldsymbol{\sigma} = \frac{3\rho_0}{f'_{K_v}(T)} (s_V + \partial_0\psi_V) \mathbf{G} + \frac{\rho_0}{f_{K_v}(T)} (V_I\partial_1\psi_V + 2V_{II}\partial_2\psi_V) \mathbf{G}$$

qui, sauf forme très particulière de ψ_V , dépend de T , de V_I et de V_{II} .

Dans le cas de l'élasticité isotherme ($\dot{T} = 0$ et $\psi = u$), la condition de réversibilité (6.18) page 148 montre que $\text{Tr}\boldsymbol{\sigma}$ est indéterminé, c'est-à-dire que la réversibilité n'impose aucune relation entre $\text{Tr}\boldsymbol{\sigma}$ et les variables d'état T et \mathbf{V} . Elle implique que seule la partie déviatorique $\text{Dev}\boldsymbol{\sigma}$ est fonction des variables d'état.

$$\boldsymbol{\sigma} = \alpha \mathbf{G} + \underbrace{\rho_0 [(\partial_1 u_V + V_I\partial_2 u_V) \text{Dev}\mathbf{V} - \partial_2 u_V \text{Dev}(\mathbf{V}^2)]}_{\text{Dev}\boldsymbol{\sigma}}$$

La partie sphérique $\alpha \mathbf{G}$ de $\boldsymbol{\sigma}$ n'est pas fonction des variables d'état²⁸.

6.7.3 Capacités calorifiques

Pour un milieu thermo-élastique isotrope incompressible, la capacité calorifique²⁹ dans une évolution non isotherme est :

$$C = T \partial_0 s + T \partial_1 s \frac{\dot{\chi}_1}{\dot{T}} + T \partial_2 s \frac{\dot{\chi}_2}{\dot{T}}$$

Par exemple, si on utilise \mathbf{V} comme tenseur de déformation,

$$C = T \partial_0 s_V + T \partial_1 s_V \frac{\dot{V}_I}{\dot{T}} + T \partial_2 s_V \frac{\dot{V}_{II}}{\dot{T}}$$

Pour un milieu thermo-élastique isotrope incompressible, on ne peut pas définir de capacité calorifique à déformation constante, car $V_{III} = Cte \Rightarrow T = Cte$ et l'évolution serait isotherme³⁰.

Par contre, on peut définir une capacité calorifique à contrainte nulle. Il est facile de voir qu'avec la loi de comportement des milieux thermo-élastiques isotropes incompressibles (6.19) page 148, la solution de l'équation $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$ est $\text{Dev}\mathbf{V} = \mathbf{0}$ et donc que les déformations à contrainte nulle sont sphériques. On a donc :

$$\begin{aligned} V_I = 3 V_{III}^{\frac{1}{3}} = 3 f_{K_v}^{\frac{1}{3}} & \Rightarrow \dot{V}_I = \frac{f'_{K_v}}{f_{K_v}^{\frac{2}{3}}} \dot{T} \\ V_{II} = 3 V_{III}^{\frac{2}{3}} = 3 f_{K_v}^{\frac{2}{3}} & \Rightarrow \dot{V}_{II} = 2 \frac{f'_{K_v}}{f_{K_v}^{\frac{1}{3}}} \dot{T} \end{aligned}$$

26. En particulier, il ne suffit pas de poser, comme on le lit parfois, que $V_{III} = 1$ ou $V_{III} = f_{K_v}(T)$ dans l'énergie libre et dans la loi de comportement pour tenir compte de l'incompressibilité. Le résultat est fondamentalement différent car les variables d'état indépendantes des deux milieux continus sont différentes.

27. voir remarque page 115.

28. on peut l'appeler «pression», mais ce n'est pas une fonction d'état.

29. voir (4.11) page 97

30. On peut noter ici une certaine absurdité physique du modèle thermoélastique incompressible : il interdit de chauffer un tel milieu à déformation bloquée. Il y a donc des expériences interdites!

La capacité calorifique à contrainte nulle dans un milieu thermo-élastique isotrope incompressible est donc :

$$C_\sigma = T \partial_0 s_V + T \left(\frac{\partial_1 s_V}{f_{K_v}^{\frac{2}{3}}} + \frac{2 \partial_2 s_V}{f_{K_v}^{\frac{1}{3}}} \right) f'_{K_v} \geq 0$$

Il est à noter qu'on n'en déduit aucune condition sur l'énergie libre sauf si on fait l'hypothèse simplificatrice $s = -\partial_0 \psi$.³¹

6.7.4 Conséquences du second principe de la thermodynamique

Pour les milieux à dissipation intrinsèque nulle, il se réduit à

$$\mathbf{q} \otimes \text{grad}_E T \geq 0$$

Puisque les fonctions d'état u , s et ψ n'interviennent pas, on aboutit aux mêmes lois de comportement thermique que celles proposées en section 6.3 page 139.

6.8 En bref...

Les idées essentielles :

- La thermo-élasticité est l'étude des milieux élastiques (dissipation intrinsèque nulle) dans une évolution quelconque (en particulier non isotherme).
- Leur modélisation complète (loi de comportement mécanique, dilatations, capacité calorifiques) est donnée par l'expression de l'énergie libre ψ en fonction des variables d'état.
- La loi de comportement thermique (loi de conductivité thermique) est indépendante de ψ .
- La thermo-élasticité incompressible n'est pas un cas particulier de la thermoélasticité générale : l'hypothèse d'incompressibilité introduit une relation qui diminue le nombre de variables d'état indépendantes.

³¹. voir note 25 page 148.

Chapitre 7

Le problème thermo-élastique

7.1 Définition du corps et de son modèle de comportement

Les données du problème sont les suivantes :

- On se donne un solide thermo-élastique¹ par sa position initiale Ω_0 à l'instant t_0 pour un observateur O^2 . À l'instant t_0 , la position initiale d'une particule P est $m_0 \in \Omega_0$, et à un instant t quelconque sa position actuelle est $m_t = m_0 + \xi(P, t) \in \Omega_t$.
- On se donne le champ des directions d'anisotropie *initiales* éventuelles $(\mathbf{n}_0^{(1)}(P), \mathbf{n}_0^{(2)}(P), \dots)$.
- On se donne un modèle de matériau thermo-élastique par l'expression de son énergie libre massique $\psi = \psi_{\mathbf{X}}(T, X_I, X_{II}, X_{III}, \dots)$ ³ où \mathbf{X} est le tenseur de déformation objectif choisi (parmi \mathbf{B} , \mathbf{V} ou \mathbf{M}) pour mesurer les déformations.
La loi de comportement mécanique se déduit de $\psi_{\mathbf{X}}$ par :

$$\boldsymbol{\sigma} = K_G \mathbf{G} + K_X \mathbf{X} + K_{X^2} \mathbf{X}^2 + \dots$$

où les coefficients $(K_G, K_X, K_{X^2}, \dots)$ sont des expressions connues calculées à partir de $\psi_{\mathbf{X}}$ ⁴
La loi de comportement thermique est de la forme :

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}_q \left(T, X_I, X_{II}, X_{III}, \dots, \mathbf{grad}_E T, \mathbf{grad}_E T \overline{\otimes} \mathbf{n}_t^{(1)}, \dots \right)$$

où \mathbf{f}_q est une fonction connue.

- On suppose qu'à l'instant t_0 toutes les particules sont dans leur état naturel, c'est-à-dire :

$$\boldsymbol{\sigma}(P, t_0) = \mathbf{0} ; \mathbf{X}(P, t_0) = \mathbf{0} ; T(P, t_0) = T_0 ; \psi(P, t_0) = 0 \quad \forall P$$

- On se donne des sollicitations extérieures dont la description sera détaillée dans la section 7.2 page 152.

1. non incompressible. Dans le cas de l'hypothèse d'incompressibilité, voir la section 7.10 page 161.
2. Dans toute la suite, les équations sont écrites pour cet observateur, qu'il soit galiléen ou non. On rappelle que pour les observateurs non galiléens, le champ des actions à distance \mathbf{f} doit contenir les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis.
3. les variables d'état supplémentaires sont celles introduites par l'anisotropie éventuelle.
4. Si on traite de l'élasticité isotherme, on a $\psi = u$ (en prenant $s = 0$ à l'état naturel).

À tout instant t , on peut évaluer les valeurs *actuelles* des champs de tenseurs⁵ suivants (ainsi que leurs invariants) en fonction de la description de Lagrange $T_L(m_0, t) = T(P, t)$ du champ de températures *actuel* et en fonction de la description de Lagrange $\xi_L(m_0, t) = \xi(P, t)$ du champ de déplacement *actuel* à l'aide des formules suivantes (à évaluer dans l'ordre donné):

$$\mathbf{H}_L(P, t) = \mathbf{grad}_L \xi(P, t) = \mathbf{grad} \xi_L(m_0, t) \quad (7.1)$$

$$\mathbf{F}(P, t) = \mathbf{H}_L + \mathbf{G} \quad (7.2)$$

$$\mathbf{B}(P, t) = \mathbf{F} \overline{\otimes} \mathbf{F}^T \quad (7.3)$$

$$\mathbf{V}(P, t) = \mathbf{B}^{\frac{1}{2}} \quad (7.4)$$

$$\mathbf{M}(P, t) = \mathbf{Ln} \mathbf{V} \quad (7.5)$$

$$\mathbf{n}_t^{(i)}(P, t) = \frac{\mathbf{F} \overline{\otimes} \mathbf{n}_0^{(i)}}{\|\mathbf{F} \overline{\otimes} \mathbf{n}_0^{(i)}\|} \quad (7.6)$$

$$\mathbf{N}_t^{(i)}(P, t) = \mathbf{n}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(i)} \quad (7.7)$$

$$\mathbf{grad}_E T(P, t) = \mathbf{grad}_L T \overline{\otimes} \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{grad} T_L(m_0, t) \overline{\otimes} \mathbf{F}^{-1} \quad (7.8)$$

$$\psi(P, t) = \psi_{\mathbf{X}}(T, X_I, X_{II}, X_{III}, \dots) \quad (7.9)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(P, t) = K_G \mathbf{G} + K_X \mathbf{X} + K_{X^2} \mathbf{X}^2 + \dots \quad (7.10)$$

$$\mathbf{q}(P, t) = \mathbf{f}_q \left(T, X_I, X_{II}, X_{III}, \dots, \mathbf{grad}_E T, \mathbf{grad}_E T \overline{\otimes} \mathbf{n}_t^{(1)}, \dots \right) \quad (7.11)$$

où dans les équations (7.9), (7.10) et (7.11), le tenseur de déformation \mathbf{X} est choisi parmi \mathbf{B} , \mathbf{V} ou \mathbf{M} , et où les fonctions $\psi_{\mathbf{X}}$, \mathbf{f}_q , K_G , K_X , K_{X^2} , \dots sont des fonctions connues caractéristiques du matériau thermo-élastique.

7.2 Définition des sollicitations extérieures

En plus des équations (7.1) à (7.11) et des équations traduisant les principes fondamentaux qui seront détaillées plus loin⁶, la définition d'un problème de thermo-élasticité doit être complétée par la description des sollicitations exercées par le milieu extérieur au corps.

On tente ici de classer les sollicitations extérieures les plus courantes qu'on peut trouver dans les problèmes de mécanique.

7.2.1 Efforts appliqués

On peut exercer sur un corps deux sortes de sollicitations mécaniques :

des actions à distance sur les particules du corps : on les modélise par des champs matériels de forces massiques $\mathbf{f}(P, t)$ (homogènes à des accélérations), dont la description naturelle est la description d'Euler $\mathbf{f}_E(m_t, t)$. Le plus souvent, il s'agit de la pesanteur, mais aussi, quand l'équation de mouvement est écrite pour un observateur non galiléen⁷, des champs de forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis⁸.

5. On peut aussi bien les décrire par la méthode de Lagrange ou la méthode d'Euler.

6. Ces équations sont à satisfaire *par tous les problèmes* de thermo-élasticité.

7. Dans l'équation de mouvement, les accélérations sont des accélérations relatives à l'observateur O .

8. Le champ des accélérations de Coriolis n'apparaît que s'il y a des vitesses pour l'observateur non galiléen. Pour les problèmes de statique elles disparaissent.

des actions de contact sur la frontière (ou une partie de la frontière) du corps : on les modélise par des champs matériels de forces surfaciques $\overline{\mathbf{C}}(P, t)$ (des contraintes) dont la description naturelle est la description d'Euler $\overline{\mathbf{C}}_E(m_t, t)$. On les appelle *conditions aux limites en contraintes* :

$$\sigma_E(m_t, t) \otimes \overline{\mathbf{n}} = \overline{\mathbf{C}}_E(m_t, t) \quad m_t \in \partial\Omega_t \quad ; \quad \mathbf{n} \perp \partial\Omega_t \text{ en } m_t$$

La fonction vectorielle imposée $\overline{\mathbf{C}}_E(m_t, t)$ est éventuellement nulle⁹ sur une partie de la frontière ou à certains instants. En principe, la condition de contrainte imposée doit être telle que $\overline{\mathbf{C}}(m_0, t_0) = \mathbf{0}$ ¹⁰.

7.2.2 Déplacements imposés

On peut imposer sur la frontière du corps¹¹ des conditions sur son champ de déplacement.

Les conditions aux frontières portant sur les déplacements sont appelées *conditions aux limites en déplacement*. Elles peuvent prendre diverses formes :

- la condition porte sur la valeur des déplacements des particules sur la frontière :

$$\xi_E(m_t, t) = \overline{\xi}(m_t, t) \quad m_t \in \partial\Omega_t$$

La fonction imposée $\overline{\xi}(m_t, t)$ est éventuellement nulle¹² à tout instant sur une partie de la frontière ou à certains instants. En principe, la condition de déplacement imposé doit être telle que $\overline{\xi}(m_0, t_0) = \mathbf{0}$ ¹³.

On peut aussi imposer des conditions¹⁴ sur $\xi(m_t, t)$ dans certaines directions seulement.

- la condition porte sur la valeur de dérivées spatiales ou particulières de $\xi(m_t, t)$ ¹⁵.

7.2.3 Conditions thermiques

On en trouve généralement de trois sortes :

- des températures imposées à la frontière (ou à une partie de la frontière) :

$$T_E(m_t, t) = \overline{T}(m_t, t) \quad m_t \in \partial\Omega_t$$

En principe, la condition de température imposée doit être telle que $\overline{T}(m_0, t_0) = T_0$ ¹⁶.

- un courant de chaleur imposé à la frontière (ou à une partie de la frontière) :

$$\mathbf{q}_E(m_t, t) = \overline{\mathbf{q}}(m_t, t) \quad m_t \in \partial\Omega_t$$

ou plus couramment un flux thermique imposé à la frontière

$$\mathbf{q}_E(m_t, t) \otimes \overline{\mathbf{n}}_t = \overline{\mathbf{q}}_n(m_t, t) \quad m_t \in \partial\Omega_t \quad ; \quad \mathbf{n}_t \perp \partial\Omega_t$$

9. Dans ce cas, on l'appelle souvent *condition de bord libre*. Il s'agit néanmoins d'une condition que doit respecter le tenseur des contraintes.

10. à moins qu'on ne cherche le mouvement du corps sous l'effet d'un effort appliqué brutalement à $t = t_0$.

11. Il n'est pas strictement interdit d'imposer des conditions sur le déplacement de particules à l'intérieur du corps («des déplacements imposés à distance»), mais on voit mal leur signification physique. Toutefois, on le fait parfois quand on recherche des solutions particulières, par exemple présentant des symétries ou encore si on fait des hypothèses simplificatrices sur le champ de déplacement $\xi(P, t)$ recherché.

12. Dans ce cas, on l'appelle souvent *liaison*. On peut aussi imposer des conditions de la forme $\xi(P, t) \otimes \overline{\mathbf{k}} = \mathbf{0}$ où \mathbf{k} est une direction fixe, arbitrairement mobile ou dont la mobilité est liée au mouvement du corps.

13. à moins qu'on ne cherche le mouvement du corps sous l'effet d'un déplacement appliqué brutalement à $t = t_0$, ce qui est physiquement peu réaliste !

14. éventuellement non linéaires, sous forme d'inégalités, dans une condition de contact par exemple.

15. Par exemple, on peut imposer $\mathbf{D} \otimes \overline{\mathbf{t}} = \mathbf{0}$ sur une partie de frontière rigide mais de mouvement libre.

16. à moins qu'on ne cherche le mouvement du corps sous l'effet d'une température appliquée brutalement à $t = t_0$

- une source de chaleur massique à distance $r_E(m_t, t)$, due par exemple à un rayonnement extérieur qui interfère avec la matière.

7.2.4 Quelques remarques

Les sollicitations extérieures peuvent être classées en deux catégories :

- les sollicitations massiques $\mathbf{f}(P, t)$ et $r(P, T)$,
- les sollicitations surfaciques qui imposent des conditions sur la solution aux frontières du domaine Ω_t et qu'on appelle généralement *conditions aux limites* mais qu'on devrait appeler *histoire des conditions aux limites*. Elles peuvent être très diverses¹⁷. On peut les rassembler en disant qu'on impose des conditions sur les champs inconnus et sur leurs dérivées spatiales et temporelles. La difficulté est d'éviter de poser des conditions aux limites pour lesquelles il n'y aurait pas de solution. Dans le cas de la mécanique des solides déformables, un certain «bon sens mécanique» aide intuitivement à éviter ce problème¹⁸.

Dans un problème d'évolution, les conditions imposées sont des fonctions de la particule et du temps. On donne *l'histoire des conditions imposées* entre l'instant t_0 et un instant final t_f . Elles sont donc précisées en particulier à $t = t_0$. Les «conditions initiales» sont donc comprises dans l'histoire des conditions imposées.

Dans un problème de statique, les conditions imposées sont les valeurs *finales* et on ne cherche qu'une solution *statique* finale¹⁹ (les dérivés particulières²⁰ de tous les champs²¹ sont nulles), sans chercher à savoir par quel chemin on peut aboutir à cet état final.

On parle aussi de problèmes dits «quasi-statiques». Ce sont des problèmes d'évolution dans lesquels on admet que les dérivées particulières de tous les champs sont négligeables pendant l'évolution.

7.3 Le problème d'évolution

On se donne un corps à son état initial, et une histoire de conditions imposées depuis l'instant t_0 jusqu'à l'instant t_f . Il faut déterminer son évolution, c'est-à-dire les valeurs pour toute particule et à tout instant de tout ou partie des champs définis dans les formules (7.1) à (7.11) page 152.

En plus des équations (7.1) à (7.11), les champs inconnus doivent satisfaire *en toute particule et à tout instant* aux principes fondamentaux :

La conservation de la masse : d'après (1.6) page 72, et (1.2) page 71, on peut l'écrire :

$$\text{sous sa forme intégrée :} \quad \rho(P, t) = \frac{\rho_0}{\det \mathbf{F}} \quad (7.12)$$

$$\text{ou sous sa forme différentielle :} \quad \frac{\dot{\rho}}{\rho} = -\text{Tr} \mathbf{D} \quad (7.13)$$

Le principe fondamental de la mécanique : d'après (2.1) page 73, il s'écrit :

$$\rho \ddot{\xi}(P, t) = \rho \mathbf{f}(P, t) + \text{div}_E \boldsymbol{\sigma}(P, t) \quad (7.14)$$

17. La tentative de classification précédente n'est probablement pas complète!

18. Le choix des conditions aux limites qui modélisent un problème de physique est une partie très importante du travail de l'ingénieur et ce choix est sous son entière responsabilité. Les conditions aux limites ont évidemment une influence importante sur la solution trouvée.

19. si elle existe. Il se peut aussi qu'elle ne soit pas unique.

20. pour l'observateur O

21. notamment les vitesses et les accélérations

Le premier principe de la thermodynamique: pour les milieux thermo-élastiques, d'après (3.3) page 90 il s'écrit :

$$-\rho T \frac{\partial^2 \psi_{\mathbf{X}}}{\partial T^2} \dot{T} = r + \operatorname{div}_E \mathbf{q} \quad (7.15)$$

Le second principe de la thermodynamique ne donne pas lieu à des équations supplémentaires. Il est normalement complètement satisfait par la construction de la loi de comportement mécanique (dissipation intrinsèque nulle) et de la loi de comportement thermique (dissipation thermique non négative).

En effectuant des substitutions, il est possible de ramener l'ensemble des équations (7.1) à (7.15), à un ensemble de deux équations différentielles ne portant que sur les champs inconnus T et ξ :

- l'équation différentielle vectorielle (7.14) (principe fondamental de la mécanique),
- l'équation différentielle scalaire (7.15) (premier principe de la thermodynamique).

Le résultat de ces substitutions serait très compliqué à écrire et ne présente aucun intérêt.

Il est à noter que seule une partie des sollicitations extérieures intervient dans ces équations générales : ce sont les sollicitations massiques à distance $\mathbf{f}(P, t)$ et $r(P, t)$. La forme du corps et les autres sollicitations n'interviennent que dans les conditions aux limites.

La résolution de ces équations différentielles, complétées par l'histoire des conditions aux limites depuis l'instant t_0 jusqu'à l'instant t_f donne l'évolution complète du corps entre t_0 et t_f .

On ne peut généralement pas espérer une solution analytique d'un problème non linéaire aussi complexe ! On n'est même pas certain de l'unicité de la solution : un tel système différentiel non linéaire peut présenter des bifurcations qui conduisent à des solutions multiples.

Le seul recours est de tenter une résolution numérique (par la méthode des éléments finis par exemple), mais il faut bien avoir conscience de deux problèmes essentiels :

1. les solutions numériques sont des solutions approchées : il y a une erreur de méthode²² et une erreur de troncature²³.
2. en présence de solutions multiples (bifurcations), on contrôle mal (ou pas du tout !) la branche solution qui sera suivie par l'algorithme. Si un algorithme converge vers une solution (approchée), ce n'est peut-être pas celle qu'on espérait²⁴.

7.4 Le problème statique

On trouve souvent que la solution du problème d'évolution précédent est trop riche. Elle fournit toutes les «vibrations» du corps pendant son évolution entre t_0 et t_f . Il arrive souvent qu'on ne soit intéressé que par un «état final à l'équilibre». On pourrait penser que la solution du problème statique est atteinte par un problème d'évolution avec une histoire des conditions aux limites se stabilisant à partir d'un certain temps, mais en l'absence de phénomènes dissipatifs²⁵ dans le modèle, il y a peu d'espoir de trouver un équilibre final²⁶ à un problème d'évolution thermo-élastique. On cherche donc à trouver la solution d'équilibre final plus directement.

22. par exemple, la méthode des éléments finis cherche des solutions approchées puisées dans un espace fonctionnel restreint.

23. car la représentation interne des nombres dans les ordinateurs est finie.

24. Rien, dans les équations générales données ci-dessus, ne garantit une quelconque stabilité de la solution trouvée. La stabilité doit être prouvée autrement.

25. par exemple une dissipation visqueuse

26. et certainement au bout d'un temps de calcul prohibitif.

En espérant qu'une solution statique²⁷ existe, on se pose donc le problème suivant :

Trouver les champs inconnus *finaux* (donc indépendants de t) satisfaisant aux équations (7.1) à (7.12)²⁸, et aux équations simplifiées suivantes :

$$\mathbf{0} = \rho \mathbf{f}(P) + \operatorname{div}_E \boldsymbol{\sigma}(P) \quad (\text{Principe fondamental de la mécanique}) \quad (7.16)$$

$$0 = \rho r(P) - \operatorname{div}_E \mathbf{q}(P) \quad (\text{Premier principe de la thermodynamique}) \quad (7.17)$$

Ce problème est apparemment plus simple que le précédent, mais il est toujours non linéaire par ses équations différentielles aux dérivées partielles²⁹ et par ses conditions aux limites. Là encore, on peut rarement obtenir une solution analytique et il faut recourir à des méthodes numériques avec les mêmes soucis que précédemment.

Le problème à résoudre numériquement étant fondamentalement non linéaire, on doit utiliser des algorithmes itératifs dans les méthodes de résolution numérique. Certains d'entre eux peuvent avoir une interprétation mécanique : on peut imaginer qu'on aboutit à l'état final en résolvant un problème d'évolution avec une *histoire fictive* des conditions imposées. Ce problème d'évolution est souvent choisi «quasi-statique»³⁰. Mais la solution d'un système différentiel non linéaire n'est pas nécessairement unique (il peut y avoir des bifurcations), de plus, la solution trouvée peut dépendre de l'histoire fictive choisie.

Remarque :

Les deux équations statiques (ou «quasi-statiques») (7.16) et (7.17) sont parfois considérées comme «faiblement couplées» : si on peut supposer que $\rho = \frac{\rho_0}{\det \mathbf{F}} \sim \rho_0$ ³¹, et que \mathbf{q} est indépendant des déformations³², l'équation (7.17) peut être résolue indépendamment et aboutir à un champ de températures $T(P)$ qu'on peut considérer comme donné dans l'équation (7.16). Bien que difficilement acceptable en grandes déformations, cette manière de résoudre les problèmes thermo-élastiques est couramment pratiquée.

7.5 Le «problème» des vibrations libres

Ce concept est un héritage des habitudes prises en élasticité linéaire (petites déformations, petits déplacements, loi de comportement linéaire, conditions aux limites linéaires). Les systèmes différentiels *linéaires* non dissipatifs du second ordre ont le bon goût d'avoir des *modes propres*.

On peut toujours se poser la question de l'évolution libre, c'est-à-dire sans sollicitations extérieures pendant le mouvement, d'un corps seulement soumis à des conditions initiales. Mais la non linéarité des équations différentielles ne garantit pas l'existence de modes propres.

7.6 Formulations intégrales

Les formulations intégrales³³ des systèmes différentiels du problème d'évolution ou du problème statique sont surtout utiles pour leur application dans les méthodes de résolution numérique, et en particulier la méthode des éléments finis.

27. c'est-à-dire avec toutes les dérivées particulières nulles.

28. dans lesquelles t n'est plus une variable.

29. Il n'y a plus que des variables d'espace.

30. c'est-à-dire que les équations statiques *sont satisfaites pendant le mouvement fictif*, ce qui revient à négliger les dérivées particulières pendant le mouvement fictif. Le seul intérêt du concept de «problème quasi-statique» se trouve là : il sert à approcher une solution statique par une histoire fictive des conditions aux limites.

31. c'est-à-dire que la dilatation volumique est proche de 1. En toute rigueur, cette approximation est difficilement admissible en grandes déformations. Pour être cohérent, il faudrait faire la même approximation dans (7.16) et dire finalement qu'on travaille sur les milieux continus thermoélastiques incompressibles.

32. par exemple avec la conductivité thermique de Fourier $\mathbf{q} = -\alpha(T) \operatorname{grad}_E T$.

33. On dit aussi «formulation variationnelle» ou encore «formulation faible».

On rappelle brièvement le principe : on remplace le système d'équations différentielles à résoudre par des égalités (scalaires) d'intégrales sur le domaine Ω_t en utilisant l'équivalence³⁴ suivante :

$$\mathcal{D}(\mathbf{g}(\mathbf{m}_t)) = 0 \iff \int_{\Omega_t} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{m}_t) \bullet \mathcal{D}(\mathbf{g}(\mathbf{m}_t)) dv_t = 0 \quad \forall \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{m}_t) \quad (7.18)$$

où

- \mathbf{m}_t est un vecteur de \mathbb{R}^3 . C'est la variable spatiale qui représente les points de Ω_t .
- $\mathbf{g}(\mathbf{m}_t)$ est le champ inconnu (scalaire, vectoriel ou tensoriel).
- \mathcal{D} un opérateur qui renvoie p équations. $\mathcal{D}(\mathbf{g}(\mathbf{m}_t)) = 0$ est le système de p équations d'inconnue \mathbf{g} à résoudre.
- $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{m}_t)$ est un champ vectoriel de \mathbb{R}^p appelé *champ test* défini sur Ω_t ,
- « \bullet » est le produit scalaire de \mathbb{R}^p .

Remarque importante sur le nombre d'équations et d'inconnues :

La manière de compter les champs inconnus et les équations varie suivant le point de vue :

sur le nombre d'équations : Les équations du problème thermo-élastique sont :

- les équations (7.1) à (7.11) (vectorielles ou tensorielles) qui définissent différents champs de grandeurs physiques,
- la conservation de la masse (équation scalaire) (7.12) (ou (7.13)),
- le principe fondamental de la mécanique (équation tensorielle symétrique)(7.14), ou (7.16) pour un problème de statique,
- le premier principe de la thermodynamique (équation vectorielle) (7.15), ou (7.17) pour un problème de statique.

D'un point de vue purement mathématique, toutes ces équations (scalaires vectorielles ou tensorielles) sont à résoudre, et les inconnues sont tous les champs qui apparaissent dans ces équations ($\boldsymbol{\xi}$, \mathbf{H}_L , \mathbf{F} , \mathbf{B} , \mathbf{V} , \mathbf{M} , \mathbf{D} , \mathbf{n}_t^i , \mathbf{N}_t^i , ψ , T , $\boldsymbol{\sigma}$ et \mathbf{q}). Pour réduire le nombre d'équations (et donc le nombre d'inconnues qui y apparaissent), on peut effectuer des substitutions. Par exemple, l'inconnue ρ et l'équation de conservation de la masse (7.12) disparaissent si on substitue $\rho = \frac{\rho_0}{\det \mathbf{F}}$ dans toutes les autres équations.

En effectuant plus ou moins de substitutions, on *choisit*, en fait, le nombre d'équations et le nombre d'inconnues restantes à traiter. Les inconnues restantes sont appelées *inconnues principales*.

Par exemple, on a vu en section 7.1 que le problème thermo-élastique, par substitutions successives, peut se ramener à deux champs inconnus principaux T et $\boldsymbol{\xi}$ et à deux équations : l'équation de la mécanique (7.14) (ou (7.16) en statique) et l'équation de l'énergie (7.15) (ou (7.17) en statique). Mais on pouvait aussi bien choisir de garder comme inconnues principales les champs T , $\boldsymbol{\xi}$ et $\boldsymbol{\sigma}$ et garder l'équation de la loi de comportement mécanique (7.10).

D'un point de vue mathématique, tous les systèmes d'équations et d'inconnues qu'on peut construire en effectuant plus ou moins de substitutions sont complètement équivalents. Une fois le système résolu, on trouve les inconnues secondaires en utilisant les équations qui ont servi aux substitutions.

Par contre, ces systèmes d'équations et d'inconnues *ne sont pas numériquement équivalents* ! En effet, la méthode numérique résout (en général approximativement) des systèmes d'équations différents et fournit donc des solutions numériquement différentes. Le choix de l'ensemble des inconnues principales est un compromis entre le coût du calcul (qui augmente

34. Consulter un cours d'analyse fonctionnelle pour avoir un sens précis de cette équivalence.

avec le nombre d'inconnues principales) et la qualité des solutions approchées des inconnues secondaires (qui sont calculées à partir de la solution approchée des inconnues principales)³⁵.

En ce qui concerne les problèmes de mécanique, le choix fait dans les logiciels³⁶ est très souvent T et ξ pour les inconnues principales³⁷, mais aussi parfois T , ξ et σ .

sur le décompte du nombre d'inconnues: Une fois choisies les équations et les inconnues principales, on peut compter le nombre p d'inconnues et d'équations de différentes manières: Par exemple, si T et ξ sont les inconnues principales choisies, on peut dire

- soit $p = 2$: une inconnue scalaire T et une inconnue vectorielle ξ
- soit $p = 4$: 4 inconnues scalaires T , ξ_1 , ξ_2 et ξ_3
- soit $p = 1$: une inconnue vectorielle de \mathbb{R}^4 : (T, ξ_1, ξ_2, ξ_3) .

Ces distinctions sont de peu d'importance, elles ne changent que la définition du produit scalaire « \bullet » dans l'équivalence (7.18) page 157. Dans la suite on choisit de garder les inconnues groupées par signification physique, c'est-à-dire dans cet exemple $p = 2$.

7.7 Formulation intégrale du problème thermo-élastique d'évolution

La méthode de résolution des problèmes d'évolution est presque toujours une méthode de différences finies en t , c'est-à-dire qu'on calcule la solution à des instants t_i intermédiaires. La différence $t_i - t_{i-1}$ est appelée *pas de temps*. À l'instant t_i , on dispose donc d'une estimation³⁸ des dérivées particulières ξ et $\dot{\xi}$ qu'on considère comme des données. On est donc amené à résoudre un problème purement spatial à chaque t_i . Les formulations intégrales qui suivent sont donc écrites cet instant t_i intermédiaire entre t_0 et t_f .

7.7.1 Formulation à deux champs inconnus T et ξ

En utilisant l'équivalence (7.18) page 157 appliquée à l'équation mécanique (7.14) page 154, il vient :

$$\int_{\Omega_t} \rho_E \ddot{\xi}_E \otimes \varphi_1 dv_t = \int_{\Omega_t} \rho_E \mathbf{f}_E \otimes \varphi_1 dv_t + \int_{\Omega_t} \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma} \otimes \varphi_1 dv_t \quad \forall \varphi_1 \quad (7.19)$$

où φ_1 est un champ vectoriel arbitraire défini sur Ω_t

La même équivalence appliquée à l'équation de l'énergie (7.15) page 155 donne :

$$- \int_{\Omega_t} \rho_E T_E \frac{\partial^2 \psi_{\mathbf{X}}}{\partial T^2} \dot{T}_E \varphi_2 dv_t = \int_{\Omega_t} r_E \varphi_2 dv_t + \int_{\Omega_t} \mathbf{div}_E \mathbf{q} \varphi_2 dv_t \quad \forall \varphi_2 \quad (7.20)$$

où φ_2 est un champ scalaire arbitraire défini sur Ω_t .

35. Les lecteurs familiers de la méthode des éléments finis comprendront aisément que :

- si on garde T et ξ comme inconnues principales, et si on utilise des éléments conformes, la solution approchée est une interpolation continue C_0 de valeurs aux nœuds de ces champs. Les inconnues secondaires, par exemple σ , seront calculées à partir de ces valeurs interpolées, avec des dégradations de continuité bien connues.
- si on garde T , ξ et σ comme inconnues principales, le calcul est plus coûteux, mais la solution approchée, et notamment le champ σ , sera une interpolation de valeurs aux nœuds et donc continue C_0 .

36. Il existe très peu de logiciels qui laissent la liberté de choix des inconnues principales. Seules les «boîtes à outils logicielles», dans lesquelles l'utilisateur doit définir (en programmant un peu) la formulation intégrale à résoudre, permettent cette liberté.

37. pour diminuer le coût du calcul

38. explicite ou implicite. Pour plus de précisions, consulter un cours d'analyse numérique.

Dans les deux équations qui précèdent, on a pris soin de mettre un indice E aux champs matériels pour indiquer que dans ces intégrales sur Ω_t , ce sont les descriptions d'Euler des champs actuels qui doivent être utilisées.

De plus, pour simplifier l'écriture, on n'a pas fait les substitutions qui expriment certains champs inconnus secondaires en fonction des inconnues principales :

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\rho_0}{\det \mathbf{F}} = \frac{\rho_0}{\det(\mathbf{H}_L + \mathbf{G})} = \frac{\rho_0}{\det(\mathbf{grad}_L \boldsymbol{\xi} + \mathbf{G})} \\ \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{div}_E (K_G \mathbf{G} + K_X \mathbf{X} + K_{X^2} \mathbf{X}^2 + \dots) = \dots \\ \mathbf{div}_E \mathbf{q} &= \mathbf{div}_E \left(\mathbf{f}_q \left(T, X_I, X_{II}, X_{III}, \dots, \mathbf{grad}_E T, \mathbf{grad}_E T \bar{\otimes} \mathbf{n}_t^{(1)}, \dots \right) \right) = \dots \end{aligned}$$

L'écriture manuelle de ces substitutions est inutile, elles sont faites informatiquement : c'est le logiciel qui calcule les valeurs actuelles des champs ρ , $\mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma}$ et $\mathbf{div}_E \mathbf{q}$ en fonction des valeurs actuelles des inconnues principales avec les formules (programmées) (7.1) à (7.11). Il suffit de se souvenir que ces substitutions sont possibles.

On obtient d'autres formulations intégrales équivalentes en utilisant des transformations d'intégrales³⁹ qui font apparaître des intégrales sur la frontière $\partial\Omega_t$ (intégrales de bord) :

$$\int_{\Omega_t} \rho_E \ddot{\boldsymbol{\xi}}_E \bar{\otimes} \boldsymbol{\varphi}_1 dv_t = \int_{\Omega_t} \rho_E \mathbf{f}_E \bar{\otimes} \boldsymbol{\varphi}_1 dv_t - \int_{\Omega_t} \boldsymbol{\sigma}_E \bar{\otimes} \mathbf{grad}_E \boldsymbol{\varphi}_1 dv_t + \int_{\partial\Omega_t} \boldsymbol{\varphi}_1 \bar{\otimes} \boldsymbol{\sigma} \bar{\otimes} \mathbf{n}_t dS_t \quad \forall \boldsymbol{\varphi}_1 \quad (7.21)$$

$$- \int_{\Omega_t} \rho_E T_E \frac{\partial^2 \psi_{\mathbf{X}}}{\partial T^2} \dot{T}_E \boldsymbol{\varphi}_2 dv_t = \int_{\Omega_t} \rho_E r_E \boldsymbol{\varphi}_2 dv_t + \int_{\Omega_t} \mathbf{q}_E \bar{\otimes} \mathbf{grad}_E \boldsymbol{\varphi}_2 dv_t - \int_{\partial\Omega_t} \boldsymbol{\varphi}_2 \mathbf{q}_E \bar{\otimes} \mathbf{n}_t dS_t \quad \forall \boldsymbol{\varphi}_2 \quad (7.22)$$

Cette dernière formulation intégrale présente plusieurs avantages :

- Il n'est plus nécessaire d'évaluer les valeurs actuelles des divergences $\mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma}$ et $\mathbf{div}_E \mathbf{q}$.
- Certaines conditions aux limites peuvent être prises en compte dans le calcul des intégrales de bord. Par exemple, si à l'instant actuel t on a une condition aux limites en contrainte de la forme $\boldsymbol{\sigma}_E \bar{\otimes} \mathbf{n}_t = \bar{\mathbf{C}}_E$ sur la partie de frontière $\partial\Omega_{t,f}$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_t} \boldsymbol{\varphi}_1 \bar{\otimes} \boldsymbol{\sigma}_E \bar{\otimes} \mathbf{n}_t dS_t &= \int_{\partial\Omega_{t,f}} \boldsymbol{\varphi}_1 \bar{\otimes} \boldsymbol{\sigma}_E \bar{\otimes} \mathbf{n}_t dS_t + \int_{\partial\Omega_t - \partial\Omega_{t,f}} \boldsymbol{\varphi}_1 \bar{\otimes} \boldsymbol{\sigma}_E \bar{\otimes} \mathbf{n}_t dS_t \\ &= \int_{\partial\Omega_{t,f}} \boldsymbol{\varphi}_1 \bar{\otimes} \bar{\mathbf{C}}_E dS_t + \int_{\partial\Omega_t - \partial\Omega_{t,f}} \boldsymbol{\varphi}_1 \bar{\otimes} \boldsymbol{\sigma}_E \bar{\otimes} \mathbf{n}_t dS_t \end{aligned}$$

De même, certaines conditions aux limites en température peuvent être prises en compte dans la formulation intégrale.

On a donc moins de conditions aux limites à imposer à la solution cherchée.

- Il y a un avantage technique, particulier à la méthode des éléments finis⁴⁰, à ce que les champs tests $\boldsymbol{\varphi}_1$ et $\boldsymbol{\varphi}_2$ apparaissent sous leur gradient.

On peut continuer à transformer des intégrales pour obtenir de nouvelles formulations intégrales équivalentes⁴¹. Celle donnée ci-dessus est la plus couramment utilisée dans les logiciels spécialisés en mécanique⁴².

39. qu'on peut voir comme une généralisation de l'intégration par parties. On peut trouver les formules de transformation d'intégrales dans un cours d'analyse fonctionnelle ou d'éléments finis.

40. quand on utilise la méthode d'approximation de Galerkin (économie dans le degré d'interpolation des éléments)

41. et éventuellement prendre en compte de nouvelles conditions aux limites dans les nouvelles intégrales de bord.

42. essentiellement parce qu'on n'a pas à calculer les divergences eulériennes de $\boldsymbol{\sigma}$ et \mathbf{q} .

7.7.2 Formulation à trois champs inconnus T , ξ et σ

Ici, on choisit de garder trois inconnues principales T , ξ et σ . Par substitutions, on ramène donc le problème à trois équations différentielles :

1. le principe fondamental de la dynamique (7.14) page 154 (équation différentielle vectorielle)
2. le premier principe de la thermodynamique (7.15) page 155 (équation différentielle scalaire)
3. la loi de comportement mécanique (7.10) page 152 (équation différentielle tensorielle du second ordre symétrique)

Aux formulations intégrales du principe fondamental de la dynamique et du premier principe de la thermodynamique, sous la forme (7.19) et (7.20) page 158, ou sous la forme (7.21) et (7.22) page 159 (dans lesquelles la substitution de σ n'est pas faite), il faut donc ajouter une formulation intégrale de la loi de comportement mécanique :

$$\int_{\Omega_t} \sigma(P, t) \overline{\otimes} \varphi_3 dv_t = \int_{\Omega_t} (K_G \mathbf{G} + K_X \mathbf{X} + K_{X^2} \mathbf{X}^2 + \dots) \overline{\otimes} \varphi_3 dv_t \quad \forall \varphi_3$$

où φ_3 est un champ tensoriel du second ordre symétrique arbitraire défini sur Ω_t et où il faut faire les substitutions en fonction des inconnues principales dans le membre de droite.

Dans la littérature spécialisée, cette formulation à trois champs inconnus est souvent appelée «formulation mixte». Le lecteur comprendra aisément qu'on peut faire des formulations avec d'autres ou plus de champs inconnus : il suffit de ne pas faire les substitutions des inconnues principales qu'on a choisi de garder. Le coût du calcul est augmenté mais la qualité des solutions approchées des inconnues principales est meilleure.

7.7.3 Remarque

Quelque soit la formulation intégrale retenue, il faut comprendre que la méthode des éléments finis satisfera de manière «faible»⁴³ les équations intégrales et les conditions aux limites prise en compte dans les intégrales de bord. Les autres conditions aux limites sont à imposer à la solution⁴⁴.

7.8 Formulation intégrale du problème thermo-élastique statique

Elle se déduit directement des formulations intégrales du problème d'évolution. Il suffit d'annuler toutes les dérivées particulières et de donner les conditions aux limites finales. Par exemple, pour la formulation à deux champs inconnus T et ξ on obtient :

$$\mathbf{0} = \int_{\Omega_t} \rho_E \mathbf{f}_E \overline{\otimes} \varphi_1 dv_t + \int_{\Omega_t} \mathbf{div}_E \sigma \overline{\otimes} \varphi_1 dv_t \quad \forall \varphi_1 \quad (7.23)$$

$$0 = \int_{\Omega_t} r_E \varphi_2 dv_t + \int_{\Omega_t} \mathbf{div}_E \mathbf{q} \varphi_2 dv_t \quad \forall \varphi_2 \quad (7.24)$$

⁴³. c'est-à-dire approximativement. Plus précisément, les conditions $\forall \varphi_1$ et $\forall \varphi_2$ sont remplacées par les conditions «pour certains φ_1 » et «pour certains φ_2 » bien choisis.

⁴⁴. De manière «forte» si on s'impose de chercher la solution approchée dans un espace fonctionnel qui les respecte strictement (les champs de déplacement qui respectent strictement les seules conditions de *déplacement* sont dits «cinématiquement admissibles») ou de manière «faible» si on les impose numériquement par une méthode de pénalisation ou de multiplicateurs de Lagrange. Pour plus de précisions consulter un cours d'analyse numérique sur la résolution de systèmes d'équations avec contraintes.

ou encore après transformation d'intégrales :

$$\mathbf{0} = \int_{\Omega_t} \rho_E \mathbf{f}_E \otimes \overline{\varphi}_1 dv_t - \int_{\Omega_t} \boldsymbol{\sigma}_E \otimes \overline{\mathbf{grad}}_E \varphi_1 dv_t + \int_{\partial\Omega_t} \varphi_1 \otimes \overline{\boldsymbol{\sigma}} \otimes \overline{\mathbf{n}}_t dS_t \quad \forall \varphi_1 \quad (7.25)$$

$$0 = \int_{\Omega_t} \rho_E r_E \varphi_2 dv_t + \int_{\Omega_t} \mathbf{q}_E \otimes \overline{\mathbf{grad}}_E \varphi_2 dv_t - \int_{\partial\Omega_t} \varphi_2 \mathbf{q}_E \otimes \overline{\mathbf{n}}_t dS_t \quad \forall \varphi_2 \quad (7.26)$$

où il faut faire les substitutions en fonction des inconnues principales dans les intégrales.

Si on veut résoudre le problème statique par approche de la solution finale avec une histoire fictive des sollicitations extérieures, alors la formulation est celle d'un problème d'évolution. Si on admet que l'évolution fictive est «quasi-statique» on annule les dérivées particulières.

7.9 Cas de l'élasticité isotherme

Dans ce cas, l'énergie libre ψ est à remplacer par l'énergie interne u . D'autre part, le premier principe de la thermodynamique (7.15) page 155 est identiquement vérifié ($\dot{T} = 0$, $r = 0$ et $\mathbf{q} = \mathbf{0}$). Il suffit donc de supprimer son équation intégrale.

7.10 Cas de la thermo-élasticité incompressible

Si on tient absolument à la thermo-élasticité incompressible, il faut faire quelques changements dans les équations (7.1) à (7.15) :

- La liste des variables d'état indépendantes est réduite.
- L'énergie libre, la loi de comportement mécanique et le premier principe de la thermodynamique *ont des expressions différentes* (voir section 6.7 page 146).
- L'hypothèse d'incompressibilité introduit une équation supplémentaire qu'on peut écrire :

$$\begin{aligned} \text{sous sa forme différentielle :} \quad & \text{Tr} \mathbf{D} = \frac{f'_{K_v}(T)}{f_{K_v}(T)} \dot{T} \\ \text{ou sous sa forme intégrée :} \quad & \det \mathbf{F} = f_{K_v}(T) \end{aligned}$$

où f_{K_v} est une fonction connue caractéristique du matériau.

On laisse le soin au lecteur d'écrire les formulations intégrales correspondantes : (principe fondamental de la mécanique, premier principe de la thermodynamique et condition d'incompressibilité plus d'autres si on choisit de garder plus d'inconnues principales).

On donne toutefois quelques détails sur la formulation intégrale de l'incompressibilité :

- si on utilise la forme différentielle, la formulation intégrale de la condition d'incompressibilité s'écrit :

$$\int_{\Omega_t} \text{Tr} \mathbf{D} \varphi_4 dv_t = \int_{\Omega_t} \frac{f'_{K_v}(T)}{f_{K_v}(T)} \dot{T} \varphi_4 dv_t$$

où φ_4 est un champ scalaire arbitraire défini sur Ω_t . Quand $\boldsymbol{\xi}$ est une inconnue principale, il est préférable de faire une transformation d'intégrale sur le terme de gauche.

D'après (6.4) page 60 on a $\text{Tr} \mathbf{D} = \text{div}_E \boldsymbol{\xi}$. On a donc :

$$\int_{\Omega_t} \text{Tr} \mathbf{D} \varphi_4 dv_t = \int_{\Omega_t} \text{div}_E \boldsymbol{\xi} \varphi_4 dv_t = - \int_{\Omega_t} \boldsymbol{\xi} \otimes \overline{\mathbf{grad}} \varphi_4 dv_t + \int_{\partial\Omega_t} \boldsymbol{\xi} \otimes \overline{\mathbf{n}} \varphi_4 dS_t$$

Une formulation intégrale plus commode de la condition différentielle d'incompressibilité est donc :

$$-\int_{\Omega_t} \dot{\xi} \otimes \overline{\mathbf{grad}} \varphi_4 \, dv_t + \int_{\partial\Omega_t} \dot{\xi} \otimes \overline{\mathbf{n}} \varphi_4 \, dS_t = \int_{\Omega_t} \frac{f'_{K_v}(T)}{f_{K_v}(T)} \dot{T} \varphi_4 \, dv_t$$

- si on utilise la forme intégrée, la formulation intégrale de la condition d'incompressibilité s'écrit :

$$\int_{\Omega_t} \det \mathbf{F} \varphi_4 \, dv_t = \int_{\Omega_t} f_{K_v}(T) \varphi_4 \, dv_t \quad \forall \varphi_4$$

et il n'est pas nécessaire de faire de transformations d'intégrale. C'est cette forme qu'il faut utiliser dans les problèmes de thermo-élasticité statiques ou quasi-statiques. Elle est aussi bien utilisable dans les problèmes d'évolution.

Dans le cas de l'élasticité isotherme, la condition d'incompressibilité se réduit à :

$$\det \mathbf{F} = 1$$

dont la formulation intégrale est :

$$\int_{\Omega_t} \det \mathbf{F} \varphi_4 \, dv_t = \int_{\Omega_t} \varphi_4 \, dv_t \quad \forall \varphi_4$$

7.11 Remarques

Les formulations intégrales ont été écrites naturellement avec des intégrales sur Ω_t . Dans la littérature, beaucoup d'auteurs choisissent de les ramener, par changement de variables⁴⁵, à des intégrales sur le domaine initial Ω_0 .

On obtient des formulations intégrales équivalentes, mais d'expression plus compliquée.

Dans la méthode des éléments finis,

- les intégrales sur Ω_t sont des sommes d'intégrales sur les éléments $\Omega_t^{(j)}$:

$$\int_{\Omega_t} \mathcal{A}_E \, dv_t = \sum_j \int_{\Omega_t^{(j)}} \mathcal{A}_E \, dv_t$$

où les $\Omega_t^{(j)}$ forment une partition de Ω_t ,

- les intégrales sur $\partial\Omega_t$ sont des sommes d'intégrales sur certaines frontières d'éléments $\partial\Omega_t^{(k)}$:

$$\int_{\partial\Omega_t} \mathcal{B}_E \, dS_t = \sum_k \int_{\partial\Omega_t^{(k)}} \mathcal{B}_E \, dS_t$$

où les $\partial\Omega_t^{(k)}$ forment une partition de $\partial\Omega_t$.

45. On rappelle que pour tout champ matériel $\mathcal{A}(P, t)$ scalaire, vectoriel ou tensoriel, de description de Lagrange $\mathcal{A}_L(m_0, t)$ et de description d'Euler $\mathcal{A}_E(m_t, t)$, et si on note \mathbf{n}_t une normale à $\partial\Omega_t$ et \mathbf{n}_0 , une normale à $\partial\Omega_0$, on a les égalités suivantes :

$$\int_{\Omega_t} \mathcal{A}_E \, dv_t = \int_{\Omega_0} \mathcal{A}_L \det \mathbf{F}_L \, dv_0 \quad (\text{voir (5.6) page 42})$$

$$\int_{S_t} \mathcal{A}_E \, dS_t = \int_{S_0} \mathcal{A}_L \det \mathbf{F}_L \|\mathbf{F}_L^{-T} \otimes \overline{\mathbf{n}}_0\| \, dS_0 \quad (\text{voir (5.9) page 44})$$

$$\mathbf{n}_t = \frac{\mathbf{F}^{-T} \otimes \overline{\mathbf{n}}_0}{\|\mathbf{F}^{-T} \otimes \overline{\mathbf{n}}_0\|} \quad (\text{voir (5.10) page 44})$$

Pour calculer ces intégrales élémentaires sur les $\Omega_t^{(j)}$ et les $\partial\Omega_t^{(k)}$, le logiciel les ramène le plus souvent à des intégrales sur un élément de référence standard⁴⁶. On fait donc de toutes façons (en interne au code) un changement de variables. On ne voit pas bien l'utilité d'en faire un supplémentaire pour passer de Ω_t à Ω_0 . Autant prendre les équations et les conditions aux limites telles qu'elles se présentent naturellement.

Point de vue personnel:

Dans beaucoup d'exposés sur la méthode des éléments finis, on utilise les descriptions de Lagrange pour décrire les valeurs actuelles champs⁴⁷, sous prétexte que les valeurs sont associées à des «nœuds de position fixe». De fait, ces valeurs actuelles sont bien attachées à des nœuds, mais le fait qu'ils soient «fixes» ou non est sans objet: en effet, il me semble malsain de considérer les éléments finis comme de petits bouts de matière munis d'une loi de comportement et avec des «nœuds mobiles». Il ne faut pas considérer les nœuds (concept purement numérique introduit par la méthode des éléments finis) comme des particules qui se déplacent (cette «interprétation» n'a pas de sens si le champ inconnu n'est pas un déplacement⁴⁸), mais seulement comme des points de Ω_t sur lesquels on appuie une solution approchée des valeurs actuelles des champs inconnus.

Cette idée est tenace sans doute pour des raisons historiques⁴⁹. Elle est un héritage d'habitudes prises en petites déformations et petits déplacements, où Ω_t et Ω_0 sont quasi-confondus, et perdue à cause d'un certain amalgame⁵⁰ entre deux spécialités: la *mécanique* et l'*analyse numérique* (qui décrit, entre autres, la méthode des éléments finis pour résoudre des systèmes différentiels).

Je pense personnellement qu'il vaut mieux faire de la bonne mécanique aboutissant à des équations, éventuellement compliquées, puis ensuite les résoudre par une méthode numérique.

■

Dans la suite, on se contentera donc de donner les équations imposées par les définitions des grandeurs et les principes fondamentaux, laissant au lecteur le soin de choisir des inconnues principales et d'écrire les formulations intégrales des équations (différentielles ou non) qu'il a choisi de garder.

46. qui n'est ni Ω_0 ni Ω_t . Voir un cours sur les éléments finis.

47. Il est à noter que ce choix n'implique en rien l'utilisation des expressions dites «lagrangiennes» des équations générales qui ont été signalées dans la partie II page 67 et suivantes, qui font intervenir des groupements de termes physiquement peu significatifs $(\mathbf{\Pi}, \mathbf{S}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}_0, \dots)$. Les formulations intégrales associées aux équations différentielles sont des intégrales de valeurs actuelles sur Ω_t . Vouloir ramener le calcul d'une intégrale de valeurs actuelles sur Ω_t au calcul d'une intégrale de valeurs actuelles sur Ω_0 par changements de variables n'autorise pas à définir de nouvelles grandeurs physiques!

48. comme en thermique, en mécanique des fluides ou en électromagnétisme

49. Les premiers concepteurs et utilisateurs de la méthode des éléments finis étaient des mécaniciens des solides pour qui le champ inconnu est un champ de déplacements, d'où l'importance prêtée aux interprétations «virtuelles» des formulations intégrales.

50. entretenu dans les publications et les traités

Quatrième partie

Milieux continus avec dissipation intrinsèque sans variables internes

Chapitre 1

Gaz simples

1.1 Définition

Un gaz simple est un milieu dont les variables d'état *indépendantes et objectives* sont la température $\chi_0 = T$ et la masse volumique $\chi_1 = \rho^1$. Contrairement aux solides déformables, les gaz n'ont pas de configuration naturelle à partir de laquelle on pourrait mesurer une déformation².

Les variables d'état étant scalaires, on ne peut pas réduire la dimension de l'espace des états.

Les fonctions d'état sont donc de la forme :

$$\begin{aligned} u &= u(T, \rho) & s &= s(T, \rho) \\ \dot{u} &= \frac{\partial u}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial u}{\partial \rho} \dot{\rho} & \dot{s} &= \frac{\partial s}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial s}{\partial \rho} \dot{\rho} \\ &= \partial_0 u \dot{T} + \partial_1 u \dot{\rho} & &= \partial_0 s \dot{T} + \partial_1 s \dot{\rho} \end{aligned}$$

A priori, comme tout milieu continu, un gaz simple est modélisé par ces deux fonctions d'état.

1.2 Conséquences du second principe de la thermodynamique

D'une manière générale, le second principe de la thermodynamique s'écrit (voir (4.9) page 95) :

$$\underbrace{\rho (T \dot{s} - \dot{u}) + \sigma \overline{\otimes} \mathbf{D}}_{\phi_{int}} - \underbrace{\frac{\mathbf{q} \overline{\otimes} \mathbf{grad}_E T}{T}}_{\phi_{th}} \geq 0$$
$$\rho (T \partial_0 s - \partial_0 u) \dot{T} + \rho (T \partial_1 s - \partial_1 u) \dot{\rho} + \sigma \overline{\otimes} \mathbf{D} - \frac{\mathbf{q} \overline{\otimes} \mathbf{grad}_E T}{T} \geq 0$$

pour tout état et pour toute évolution thermo-mécanique infinitésimale autour de cet état.

1. On ne distingue donc l'état des particules que par leur agitation thermique moyenne et par le nombre de «molécules» par unité de volume. On peut construire des gaz non simples en donnant des descriptions plus fines de l'état thermique et matériel, en introduisant $\mathbf{grad}_E T$ ou $\mathbf{grad}_E \rho$ pour affiner la représentation de l'état d'une particule.

2. On peut bien définir un tenseur de déformation dans un mouvement de gaz, à partir d'une configuration choisie arbitrairement, mais il n'est pas une variable d'état : on se refuse de distinguer l'état d'une «particule déformée» et «d'une particule non déformée», on ne veut voir que le nombre de «molécules» par unité de volume.

Or la conservation de la masse $\text{Tr} \mathbf{D} = -\frac{\dot{\rho}}{\rho}$, montre que, dans une évolution thermo-mécanique de gaz simple, $\dot{\rho}$ et \mathbf{D} ne sont pas indépendants. Pour exploiter l'égalité du second principe, il faut la transformer.

En décomposant \mathbf{D} en parties sphériques et déviatoriques :

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \frac{1}{3} \text{Tr} \mathbf{D} \mathbf{G} + \text{Dev} \mathbf{D} \\ \boldsymbol{\sigma} \overline{\otimes} \mathbf{D} &= \frac{1}{3} \text{Tr} \mathbf{D} \text{Tr} \boldsymbol{\sigma} + \text{Dev} \boldsymbol{\sigma} \overline{\otimes} \text{Dev} \mathbf{D} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Le second principe devient :

$$\rho (T \partial_0 s - \partial_0 u) \dot{T} + \left[\frac{1}{3} \text{Tr} \boldsymbol{\sigma} - \rho^2 (T \partial_1 s - \partial_1 u) \right] \text{Tr} \mathbf{D} + \text{Dev} \boldsymbol{\sigma} \overline{\otimes} \text{Dev} \mathbf{D} - \frac{\mathbf{q}}{T} \overline{\otimes} \mathbf{grad}_E T \geq 0$$

pour tout état et pour toute évolution thermo-mécanique infinitésimale autour de cet état.

Or dans une évolution thermo-mécanique infinitésimale de gaz simple autour d'un état, les quantités \dot{T} , $\text{Tr} \mathbf{D}$ (ou $\frac{\dot{\rho}}{\rho}$), $\text{Dev} \mathbf{D}$ et $\mathbf{grad}_E T$ peuvent prendre indépendamment des valeurs arbitraires. Toutes les évolutions thermo-mécaniques autour d'un état sont décrites par ces valeurs arbitraires. On peut alors tirer des conclusions de cette inégalité :

Si on définit les deux vecteurs \mathbf{x} et \mathbf{y} tels que :

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \rho (T \partial_0 s - \partial_0 u) \\ \frac{1}{3} \text{Tr} \boldsymbol{\sigma} - \rho^2 (T \partial_1 s - \partial_1 u) \\ \text{Dev} \boldsymbol{\sigma} \\ -\frac{\mathbf{q}}{T} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \dot{T} \\ \text{Tr} \mathbf{D} \\ \text{Dev} \mathbf{D} \\ \mathbf{grad}_E T \end{pmatrix}$$

autour d'un état (T, ρ) , le second principe s'écrit :

$$\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} \geq 0 \quad \forall \mathbf{y}$$

On en déduit que le vecteur \mathbf{x} est nécessairement *au moins* une fonction de \mathbf{y} . On a donc *a priori* :

$$\rho (T \partial_0 s - \partial_0 u) = f_1 \left(\dot{T}, \text{Tr} \mathbf{D}, \text{Dev} \mathbf{D}, \mathbf{grad}_E T, T, \rho, \dots \right) \quad (1.2)$$

$$\frac{1}{3} \text{Tr} \boldsymbol{\sigma} - \rho^2 (T \partial_1 s - \partial_1 u) = f_2 \left(\dot{T}, \text{Tr} \mathbf{D}, \text{Dev} \mathbf{D}, \mathbf{grad}_E T, T, \rho, \dots \right) \quad (1.3)$$

$$\text{Dev} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}_3 \left(\dot{T}, \text{Tr} \mathbf{D}, \text{Dev} \mathbf{D}, \mathbf{grad}_E T, T, \rho, \dots \right) \quad (1.4)$$

$$-\frac{\mathbf{q}}{T} = \mathbf{f}_4 \left(\dot{T}, \text{Tr} \mathbf{D}, \text{Dev} \mathbf{D}, \mathbf{grad}_E T, T, \rho, \dots \right) \quad (1.5)$$

Dans l'équation 1.2, le terme de gauche est une fonction d'état, qui n'est donc fonction que des variables d'état T et ρ . On a donc :

$$\rho (T \partial_0 s - \partial_0 u) = f_1(T, \rho)$$

De plus, les fonctions f_1 , f_2 , \mathbf{f}_3 et \mathbf{f}_4 doivent être choisies telles que $\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} \geq 0 \quad \forall \mathbf{y}$, c'est-à-dire :

$$f_1 \dot{T} + f_2 \text{Tr} \mathbf{D} + \mathbf{f}_3 \overline{\otimes} \text{Dev} \mathbf{D} + \mathbf{f}_4 \overline{\otimes} \mathbf{grad}_E T \geq 0 \quad \forall \dot{T}, \text{Tr} \mathbf{D}, \text{Dev} \mathbf{D}, \mathbf{grad}_E T$$

$f_1(T, \rho)$ n'étant pas fonction de \dot{T} arbitraire, on a nécessairement $f_1 = 0^3$.

3. Cette conclusion est parfois présentée comme une conséquence du «postulat» de Helmholtz.

Finalement, le second principe implique :

$$0 = T \partial_0 s - \partial_0 u \quad (1.6)$$

$$\frac{1}{3} \text{Tr} \boldsymbol{\sigma} = \rho^2 (T \partial_1 s - \partial_1 u) + f_2 \left(\dot{T}, \text{Tr} \mathbf{D}, \text{Dev} \mathbf{D}, \mathbf{grad}_E T, T, \rho, \dots \right) \quad (1.7)$$

$$\text{Dev} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}_3 \left(\dot{T}, \text{Tr} \mathbf{D}, \text{Dev} \mathbf{D}, \mathbf{grad}_E T, T, \rho, \dots \right) \quad (1.8)$$

$$\mathbf{q} = -T \mathbf{f}_4 \left(\dot{T}, \text{Tr} \mathbf{D}, \text{Dev} \mathbf{D}, \mathbf{grad}_E T, T, \rho, \dots \right) \quad (1.9)$$

$$0 \leq f_2 \text{Tr} \mathbf{D} + \mathbf{f}_3 \overline{\otimes} \text{Dev} \mathbf{D} + \mathbf{f}_4 \overline{\otimes} \mathbf{grad}_E T \quad \forall \dot{T}, \text{Tr} \mathbf{D}, \text{Dev} \mathbf{D}, \mathbf{grad}_E T \quad (1.10)$$

L'égalité 1.6 a une conséquence importante : elle montre que dans un gaz simple, les deux fonctions d'état u et s sont liées. Si on introduit l'énergie libre $\psi = u - T s = \psi(T, \rho)$, elle s'écrit :

$$0 = T \partial_0 s - \partial_0 (\psi + T s) = -\partial_0 \psi - s$$

On a donc

$$s = -\frac{\partial \psi}{\partial T} \quad (1.11)$$

$$u = \psi + T s = \psi - T \frac{\partial \psi}{\partial T} \quad (1.12)$$

Ainsi, pour modéliser les gaz simples⁴, il suffit de se donner une expression de son énergie libre en fonction des variables d'état indépendantes T et ρ .

Les deux fonctions d'état u et s s'en déduisent par les relations ci-dessus.

Les égalités (1.7) et (1.8) donnent la forme générale des lois de comportement mécanique des gaz simples. On peut récrire (1.7) avec l'énergie libre :

$$\frac{1}{3} \text{Tr} \boldsymbol{\sigma} = -\rho^2 \partial_1 \psi + f_2 \left(\dot{T}, \text{Tr} \mathbf{D}, \text{Dev} \mathbf{D}, \mathbf{grad}_E T, T, \rho, \dots \right)$$

L'égalité (1.9) donne la forme générale de la loi de comportement thermique (ou loi de conductivité thermique).

Le choix des fonctions f_2 , \mathbf{f}_3 et \mathbf{f}_4 est restreint par l'inégalité (1.10) exprimant la non négativité de la dissipation :

$$\boxed{0 \leq f_2 \text{Tr} \mathbf{D} + \mathbf{f}_3 \overline{\otimes} \text{Dev} \mathbf{D} + \mathbf{f}_4 \overline{\otimes} \mathbf{grad}_E T \quad \forall \text{Tr} \mathbf{D}, \text{Dev} \mathbf{D}, \mathbf{grad}_E T \text{ arbitraires}} \quad (1.13)$$

Le second principe ne peut rien dire de plus. On modélise les gaz simples par des *choix* de fonctions f_2 , \mathbf{f}_3 et \mathbf{f}_4 satisfaisant l'inégalité (1.13)

1.3 Capacités calorifiques

Pour un gaz simple, la capacité calorifique dans une évolution non isotherme, définie en (4.11) page 97, est :

$$C = T \partial_0 s + T \partial_1 s \frac{\dot{\rho}}{T} \quad (1.14)$$

En utilisant (1.11) page 169, on peut l'écrire avec l'énergie libre :

$$C = -T \partial_{00} \psi - T \partial_{01} \psi \frac{\dot{\rho}}{T} \quad (1.15)$$

4. c'est-à-dire dont les variables d'état indépendantes sont T et ρ .

En particulier, la capacité calorifique dans une évolution à masse volumique constante ($\dot{\rho} = 0$), c'est-à-dire à volume constant massique est :

$$C_v = T \partial_0 s = -T \partial_{00} \psi$$

1.4 Exemples de gaz simple

On modélise les différents gaz simples par des choix des fonctions f_2 et f_3 (loi de comportement mécanique) et f_4 (loi de comportement thermique).

Pour satisfaire l'inégalité de dissipation des gaz simples (1.13) page 169, on pose :

$$0 \leq \underbrace{f_2 \text{Tr} \mathbf{D}}_{\phi_{vol}} + \underbrace{f_3 \overline{\otimes} \text{Dev} \mathbf{D}}_{\phi_{isov}} + \underbrace{f_4 \overline{\otimes} \text{grad}_E T}_{\phi_{th}} \quad \forall \text{Tr} \mathbf{D}, \text{Dev} \mathbf{D}, \text{grad}_E T \text{ arbitraires}$$

c'est-à-dire qu'on suppose que chacun des termes ϕ_{vol} , ϕ_{isov} et ϕ_{th} a une signification physique et qu'il est positif séparément.

Cette phase de la modélisation est le *choix d'un mécanisme de dissipation*. Ce choix devrait être justifié par des considérations physiques⁵ et des constatations expérimentales. En donnant une signification physique à ϕ_{vol} et à ϕ_{isov} , on admet l'existence d'un phénomène de dissipation visqueuse induit par les vitesses de déformation $\text{Tr} \mathbf{D}$ et $\text{Dev} \mathbf{D}$.

1.4.1 Exemple de loi de comportement mécanique : les gaz newtoniens

Les gaz newtoniens sont les gaz simples qui satisfont expérimentalement aux hypothèses suivantes :

$$\begin{aligned} f_2 \left(\dot{T}, \text{Tr} \mathbf{D}, \text{Dev} \mathbf{D}, \text{grad}_E T, T, \rho, \dots \right) &= k(T) \text{Tr} \mathbf{D} \\ f_3 \left(\dot{T}, \text{Tr} \mathbf{D}, \text{Dev} \mathbf{D}, \text{grad}_E T, T, \rho, \dots \right) &= 2 \mu(T) \text{Dev} \mathbf{D} \end{aligned}$$

$k(T) \geq 0$ est appelé *viscosité de volume* à la température T

$\mu(T) \geq 0$ est appelée *viscosité de cisaillement* ou encore *viscosité dynamique*⁶ à la température T .

Il est facile de vérifier qu'avec ces définitions de f_2 et f_3 , les termes ϕ_{vol} et ϕ_{isov} sont bien non négatifs.

La loi de comportement mécanique est alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \text{Tr} \boldsymbol{\sigma} &= -\rho^2 \partial_1 \psi + k \text{Tr} \mathbf{D} \\ \text{Dev} \boldsymbol{\sigma} &= 2 \mu(T) \text{Dev} \mathbf{D} \end{aligned}$$

Soit encore

$$\boldsymbol{\sigma} = 2 \mu(T) \text{Dev} \mathbf{D} + (-\rho^2 \partial_1 \psi + k(T) \text{Tr} \mathbf{D}) \mathbf{G} \quad (1.16)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = 2 \mu(T) \text{Dev} \mathbf{D} + \left(-\rho^2 \partial_1 \psi - k(T) \frac{\dot{\rho}}{\rho} \right) \mathbf{G} \quad (1.17)$$

5. La simplicité n'est pas une justification physique!

6. qu'on pourrait aussi appeler demi-viscosité isovolume. Le rapport $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ est appelé *viscosité cinématique*. Bien que consacrées par l'usage, ces dénominations reflètent peu leur signification profonde qui est la dissipation par unité de volume (2μ) ou par unité de masse (2ν) dans un mouvement isovolume avec frottement.

La contrainte dans un gaz est une fonction des variables d'état (T, ρ) , et du mouvement $(\dot{\rho}, \text{Dev} \mathbf{D})$. Traditionnellement, la loi de comportement est plutôt donnée sous la forme

$$\boldsymbol{\sigma} = 2 \mu(T) \mathbf{D} + \underbrace{\left[-\rho^2 \partial_1 \psi + \left(k(T) - \frac{2 \mu(T)}{3} \right) \text{Tr} \mathbf{D} \right]}_{-p + \lambda \text{Tr} \mathbf{D}} \mathbf{G} \quad (1.18)$$

Le terme $p = \rho^2 \partial_1 \psi$ est appelé *pression absolue*. C'est l'opposé de la contrainte qui règne dans un gaz quand la vitesse de déformation est nulle ($\mathbf{D} = \mathbf{0}$)⁷. C'est une fonction d'état⁸.

L'expérience montre que la pression absolue dans un gaz simple est non négative⁹, la contrainte dans un gaz simple à vitesse de déformation nulle est donc négative. On en déduit une condition sur le choix de l'expression de l'énergie libre :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \rho} > 0$$

Le terme $\lambda = k - \frac{2\mu}{3}$ est appelé *second coefficient de viscosité*¹⁰.

Un cas particulier de gaz newtonien : le gaz de Stokes

Dans un gaz de Stokes, on simplifie le mécanisme de dissipation en supposant que la viscosité de volume k est nulle dans toute évolution. la loi de comportement se réduit à :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2 \mu(T) \text{Dev} \mathbf{D} + \underbrace{-\rho^2 \partial_1 \psi}_{-p} \mathbf{G} = 2 \mu(T) \mathbf{D} + \left[\underbrace{-\rho^2 \partial_1 \psi}_{-p} - \frac{2 \mu(T)}{3} \text{Tr} \mathbf{D} \right] \mathbf{G}$$

1.4.2 Exemple de loi de comportement thermique : la loi de Fourier

La forme générale des lois de conduction est donnée en (1.9). Pour que la dissipation thermique ϕ_{th} soit non négative, on peut choisir :

$$\mathbf{q} = -\alpha(T) \text{grad}_E T$$

où $\alpha(T) \geq 0$ est le coefficient de conductibilité thermique.

Ce choix est l'un des plus simples et devrait être justifié par des constatations expérimentales¹¹.

7. Ce cas particulier est souvent appelé «statique des gaz». En fait, $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ implique seulement que le champ des vitesses du gaz est celui d'un mouvement de solide. On peut alors donc trouver un observateur pour lequel toutes les vitesses sont nulles.

8. c'est-à-dire une fonction des variables d'état *indépendantes* T et ρ .

9. On peut aussi le justifier à partir de la physique statistique.

10. auquel il est difficile de donner une interprétation physique. L'introduction de λ vient du fait que dans les exposés classiques de mécanique des gaz (mécanique des fluides compressibles), la loi de comportement mécanique est posée *a priori* comme une loi $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}(\mathbf{D})$, alors que la dépendance de $\boldsymbol{\sigma}$ en fonction de \mathbf{D} (entre autres) est une nécessité imposée par le second principe *et* par un choix d'un mécanisme de dissipation. Il est clair que la loi $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}(\mathbf{D})$ linéaire isotrope la plus générale est bien de la forme $\boldsymbol{\sigma} = 2 \mu \mathbf{D} + (\lambda \text{Tr} \mathbf{D} + \alpha) \mathbf{G}$, mais comme cette loi est choisie indépendamment de toute analyse du mécanisme de dissipation, les coefficients μ , λ et α n'ont pas *a priori* d'interprétation physique. On ne peut leur en donner une qu'*a posteriori* en étudiant des écoulements particuliers : la statique des gaz donne une interprétation de α et l'écoulement de Couette (isovolume) donne une interprétation de μ .

11. Si les constatations expérimentales le justifient, on peut prendre par exemple une loi non linéaire $\mathbf{q} = -\alpha(T, \|\text{grad}_E T\|) \text{grad}_E T$. On peut se reporter à la remarque page 141 pour la construction de lois de comportement thermiques plus générales.

1.4.3 Les gaz parfaits

On donne ici un exemple de gaz très populaire : le *gaz parfait*¹²

Son énergie libre en fonction des variables d'état est définie par¹³:

$$\psi = r T \ln \rho + g(T)$$

où r est une constante appelée *constante des gaz parfaits*.

On vérifie facilement que la pression obéit bien à la loi de Mariotte-Gay-Lussac :

$$p = \rho^2 \frac{\partial \psi}{\partial \rho} = r \rho T$$

En utilisant (1.11) page 169, on trouve l'expression de son entropie massique :

$$s = -\partial_0 \psi = -r \ln \rho - g'(T)$$

et son énergie interne massique :

$$u = \psi + T s = g(T) - T g'(T)$$

qui ne dépend bien que de la température¹⁴.

Si le gaz parfait est newtonien, sa loi de comportement a été établie en (1.17) page 170. Pour un gaz parfait newtonien, on obtient :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= 2 \mu(T) \text{Dev} \mathbf{D} + \left(-\rho r T - k(T) \frac{\dot{\rho}}{\rho} \right) \mathbf{G} \\ &= 2 \mu(T) \text{Dev} \mathbf{D} + (-p + k(T) \text{Tr} \mathbf{D}) \mathbf{G} \\ &= 2 \mu \mathbf{D} + \left[-p + \left(k(T) - \frac{2 \mu(T)}{3} \right) \text{Tr} \mathbf{D} \right] \mathbf{G} \end{aligned}$$

En utilisant (1.15) page 169, la capacité calorifique d'un gaz parfait dans une évolution non isotherme quelconque est :

$$C = -T g''(T) - \frac{T r}{\rho} \frac{\dot{\rho}}{\dot{T}} \quad (1.19)$$

En particulier, la capacité calorifique à masse volumique constante (à volume constant) est :

$$C_v = -T g''(T)$$

Pour un gaz parfait, on peut définir une capacité calorifique à pression constante. En effet,

$$\rho = \frac{p}{r T} \Rightarrow \frac{\dot{\rho}}{\rho} = \frac{\dot{p}}{p} - \frac{\dot{T}}{T} \Rightarrow \frac{\dot{\rho}}{\rho} \frac{T}{\dot{T}} = \frac{\dot{p}}{p} \frac{T}{\dot{T}} - 1$$

12. Il en existe un s'approchant mieux des gaz réels et couramment utilisé : le gaz de Van der Waals.

13. Cette définition est inhabituelle. D'habitude, les gaz parfaits sont définis par une constatation expérimentale : la loi de Mariotte-Gay-Lussac qui définit la fonction d'état $p : p = r \rho T$. Or, la pression dans un gaz est définie en (1.18) page 171 par $p = \rho^2 \frac{\partial \psi}{\partial \rho}$. L'énergie libre est donc la solution générale de l'équation différentielle $\rho^2 \frac{\partial \psi}{\partial \rho} = r \rho T$.

Pour un gaz de Van der Waals, l'équivalent de la loi de Mariotte-Gay-Lussac est $(p + a \rho^2) \left(\frac{1}{\rho} - b \right) = r T$. L'énergie libre est solution de $\rho^2 \partial_1 \psi = \frac{\rho r T}{1 - b \rho} - \rho^2 a$, c'est-à-dire : $\psi = r T \ln \frac{\rho}{b \rho - 1} - a \rho + g(T)$

14. Ce résultat est parfois présenté comme une hypothèse des gaz parfaits, mais ce n'est en fait qu'une conséquence de (1.11) page 169, c'est-à-dire du fait que le second principe est vrai dans toute évolution thermo-mécanique.

La capacité calorifique d'un gaz parfait (1.19) dans une évolution non isotherme quelconque peut donc encore s'écrire :

$$C = -T g''(T) - r \left(\frac{\dot{p}}{p} \frac{T}{\dot{T}} - 1 \right)$$

et pour une évolution à pression constante on a :

$$C_p = -T g''(T) + r$$

On retrouve bien la relation de Mayer : $C_p - C_v = r$.

La fonction $g(T)$ peut être déterminée par de mesures de C_p ou C_v en fonction de la température.

1.5 Conclusion

Bien que les gaz simples ne soient pas un milieu continu directement concerné par ce cours, ils ont été soigneusement développés pour illustrer comment on exploite le second principe de la thermodynamique dans un milieu dissipatif.

Les gaz simples sont modélisés par la donnée de l'une quelconque des fonctions d'état énergie interne massique u , entropie massique s ou énergie libre massique ψ en fonction des variables d'état T et ρ .

Pour compléter la modélisation, il faut faire un choix de mécanisme de dissipation, ce qui revient à choisir les fonctions f_2 , f_3 et f_4 , telles que le second principe soit respecté dans tout évolution thermo-mécanique infinitésimale autour d'un état. Le choix des fonctions f_2 et f_3 qui a été proposé conduit au mécanisme de dissipation classique newtonien. Il est possible d'en construire de plus compliqués.

Chapitre 2

Liquides simples

2.1 Définition

De même que pour les gaz, les liquides n'ont pas de forme propre, et donc pas de configuration naturelle à partir de laquelle on pourrait mesurer des déformations. Par contre, ils ont une masse volumique naturelle ρ_0 à une température T_0 , et la masse volumique est fonction de la température. La masse volumique d'un liquide simple est donnée par la loi de dilatation

$$\rho = f_\rho(T) \quad \text{avec} \quad \rho_0 = f_\rho(T_0)$$

Normalement, cette loi est issue de constatations expérimentales¹.

Les liquides peuvent donc être vus comme des gaz comportant une «liaison interne» d'incompressibilité reliant la masse volumique à la température.

Les liquides simples ont donc une seule variable d'état : la température T ². Les fonctions d'état u et s sont donc uniquement fonction de T , et leurs dérivées particulières sont :

$$\dot{u} = \frac{du}{dT} \dot{T} = u' \dot{T} \quad \text{et} \quad \dot{s} = \frac{ds}{dT} \dot{T} = s' \dot{T}$$

A priori, comme tout milieu continu, un liquide simple est modélisé par ces deux fonctions d'état.

2.2 Conséquences du second principe de la thermodynamique

D'une manière générale, le second principe de la thermodynamique s'écrit (voir (4.9) page 95) :

$$\underbrace{\rho (T \dot{s} - \dot{u}) + \sigma \overline{\otimes} \mathbf{D}}_{\phi_{int}} - \underbrace{\frac{\mathbf{q} \overline{\otimes} \mathbf{grad}_E T}{T}}_{\phi_{th}} \geq 0$$
$$\rho (T s' - u') \dot{T} + \sigma \overline{\otimes} \mathbf{D} - \frac{\mathbf{q} \overline{\otimes} \mathbf{grad}_E T}{T} \geq 0$$

pour tout état et pour toute évolution thermo-mécanique infinitésimale autour de cet état.

1. Elle est le plus souvent monotone décroissante, mais ce n'est pas obligatoire: par exemple, la masse volumique de l'eau possède un maximum aux environs de $4^\circ\text{C} \simeq 277^\circ\text{K}$

2. On peut construire des liquides non simples en décrivant plus finement l'état de la matière avec des variables d'état supplémentaires comme $\mathbf{grad}_E T$, $\mathbf{grad}_E \mathbf{grad}_E T$ etc.

Or la conservation de la masse $\text{Tr} \mathbf{D} = -\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -\frac{f'_\rho(T)}{f_\rho(T)} \dot{T}$, montre que, dans une évolution thermo-mécanique de liquide simple, \dot{T} et \mathbf{D} ne sont pas indépendants. Pour exploiter l'égalité du second principe, il faut la transformer.

En décomposant \mathbf{D} en parties sphériques et déviatoriques :

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \frac{1}{3} \text{Tr} \mathbf{D} \mathbf{G} + \text{Dev} \mathbf{D} \\ \boldsymbol{\sigma} \overline{\otimes} \mathbf{D} &= \frac{1}{3} \text{Tr} \mathbf{D} \text{Tr} \boldsymbol{\sigma} + \text{Dev} \boldsymbol{\sigma} \overline{\otimes} \text{Dev} \mathbf{D} = -\frac{f'_\rho(T)}{3 f_\rho(T)} \dot{T} + \text{Dev} \boldsymbol{\sigma} \overline{\otimes} \text{Dev} \mathbf{D} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Le second principe pour un liquide simple s'écrit donc :

$$\left(\rho (T s' - u') - \frac{f'_\rho(T)}{3 f_\rho(T)} \text{Tr} \boldsymbol{\sigma} \right) \dot{T} + \text{Dev} \boldsymbol{\sigma} \overline{\otimes} \text{Dev} \mathbf{D} - \frac{\mathbf{q} \overline{\otimes} \mathbf{grad}_E T}{T} \geq 0$$

pour tout état et pour toute évolution thermo-mécanique infinitésimale autour de cet état.

Or dans une évolution thermo-mécanique infinitésimale de liquide simple autour d'un état, les quantités \dot{T} , $\text{Dev} \mathbf{D}$ et $\mathbf{grad}_E T$ peuvent prendre indépendamment des valeurs arbitraires. Toutes les évolutions thermo-mécaniques autour d'un état sont décrites par ces valeurs arbitraires. On peut alors tirer des conclusions de cette inégalité.

Si on définit les deux vecteurs \mathbf{x} et \mathbf{y} tels que :

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \rho (T s' - u') - \frac{f'_\rho(T)}{3 f_\rho(T)} \text{Tr} \boldsymbol{\sigma} \\ \text{Dev} \boldsymbol{\sigma} \\ -\frac{\mathbf{q}}{T} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \dot{T} \\ \text{Dev} \mathbf{D} \\ \mathbf{grad}_E T \end{pmatrix}$$

autour d'un état (T, ρ) , le second principe s'écrit

$$\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} \geq 0 \quad \forall \mathbf{y}$$

On en déduit que le vecteur \mathbf{x} est nécessairement *au moins* une fonction de \mathbf{y} . On a donc *a priori* :

$$\rho (T s' - u') - \frac{f'_\rho(T)}{3 f_\rho(T)} \text{Tr} \boldsymbol{\sigma} = f_1 \left(\dot{T}, \text{Dev} \mathbf{D}, \mathbf{grad}_E T, T, \dots \right) \quad (2.2)$$

$$\text{Dev} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}_2 \left(\dot{T}, \text{Dev} \mathbf{D}, \mathbf{grad}_E T, T, \dots \right) \quad (2.3)$$

$$-\frac{\mathbf{q}}{T} = \mathbf{f}_3 \left(\dot{T}, \text{Tr} \mathbf{D}, \text{Dev} \mathbf{D}, \mathbf{grad}_E T, T, \rho, \dots \right) \quad (2.4)$$

Les équations (2.2) et (2.3) donnent la forme générale de la loi de comportement mécanique des liquides simples :

$$\frac{1}{3} \text{Tr} \boldsymbol{\sigma} = \frac{f_\rho(T)}{f'_\rho(T)} \left[-f_1 \left(\dot{T}, \text{Dev} \mathbf{D}, \mathbf{grad}_E T, T, \dots \right) + f_\rho(T) (T s' - u') \right] \quad (2.5)$$

$$\text{Dev} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}_2 \left(\dot{T}, \text{Dev} \mathbf{D}, \mathbf{grad}_E T, T, \dots \right) \quad (2.6)$$

L'équation (2.4) donne la forme générale de la loi de comportement thermique (ou loi de conductibilité thermique) des liquides simples :

$$\mathbf{q} = -T \mathbf{f}_3 \left(\dot{T}, \text{Tr} \mathbf{D}, \text{Dev} \mathbf{D}, \mathbf{grad}_E T, T, \rho, \dots \right)$$

Le choix des fonctions f_2 , \mathbf{f}_3 et \mathbf{f}_4 est restreint par l'inégalité (1.10) exprimant la non négativité de la dissipation :

$$\boxed{0 \leq f_1 \dot{T} + \mathbf{f}_2 \overline{\otimes} \text{Dev} \mathbf{D} + \mathbf{f}_3 \overline{\otimes} \mathbf{grad}_E T \quad \forall \dot{T}, \text{Dev} \mathbf{D}, \mathbf{grad}_E T \text{ arbitraires}} \quad (2.7)$$

2.3 Capacités calorifiques

Pour un liquide simple, la capacité calorifique dans une évolution thermodynamique non isotherme, définie en (4.11) page 97, se réduit à :

$$C = T s' \quad (2.8)$$

Pour un liquide simple, l'espace des états est de dimension 1, et toutes les évolutions thermodynamiques sont non isothermes³. Il n'y a donc qu'une seule capacité calorifique. Sa mesure en fonction de T donne directement l'expression de l'entropie massique :

$$s = \int_{T_0}^T \frac{C(T)}{T} dT \quad (2.9)$$

Par exemple, si on constate expérimentalement que C est invariant avec la température, l'entropie massique (en prenant $s(T_0) = 0$) est $s = C \ln \frac{T}{T_0}$.

2.4 Exemple de liquide simple

On modélise les différents liquides simples par des choix des fonctions f_1 et f_2 (loi de comportement mécanique) et f_3 (loi de comportement thermique).

L'inégalité de dissipation des liquides simples (2.7) page 176,

$$0 \leq f_1 \dot{T} + f_2 \overline{\otimes} \text{Dev} \mathbf{D} + f_3 \overline{\otimes} \text{grad}_E T \quad \forall \dot{T}, \text{Dev} \mathbf{D}, \text{grad}_E T$$

Compte tenu de la condition d'incompressibilité $\dot{T} = -\frac{f_\rho(T)}{f'_\rho(T)} \text{Tr} \mathbf{D}$, l'inégalité de dissipation des liquides simples devient :

$$0 \leq \underbrace{-f_1 \frac{f_\rho(T)}{f'_\rho(T)} \text{Tr} \mathbf{D}}_{\phi_{vol}} + \underbrace{f_2 \overline{\otimes} \text{Dev} \mathbf{D}}_{\phi_{isov}} + \underbrace{f_3 \overline{\otimes} \text{grad}_E T}_{\phi_{th}} \quad \forall \dot{T}, \text{Dev} \mathbf{D}, \text{grad}_E T$$

c'est-à-dire qu'on suppose que chacun des termes ϕ_{vol} , ϕ_{isov} et ϕ_{th} a une signification physique et qu'il est positif séparément.

Cette phase de la modélisation est le *choix d'un mécanisme de dissipation*. Ce choix devrait être justifié par des considérations physiques⁴ et des constatations expérimentales. En donnant une signification physique à ϕ_{vol} et à ϕ_{isov} , on admet l'existence d'un phénomène de dissipation visqueuse induit par les vitesses de déformation $\text{Tr} \mathbf{D}$ et $\text{Dev} \mathbf{D}$.

2.4.1 Exemple de loi de comportement mécanique : les liquides newtoniens

Les liquides newtoniens sont des liquides simples qui satisfont expérimentalement aux hypothèses suivantes :

$$\begin{aligned} -f_1 \frac{f_\rho(T)}{f'_\rho(T)} = k(T) \text{Tr} \mathbf{D} &\Leftrightarrow f_1 = -\frac{f'_\rho(T)}{f_\rho(T)} k(T) \text{Tr} \mathbf{D} \\ f_2 = 2 \mu(T) \text{Dev} \mathbf{D} & \end{aligned}$$

3. si la température reste constante, l'état thermodynamique n'évolue pas.

4. La simplicité n'est pas une justification physique!

$k(T) \geq 0$ est appelé *viscosité de volume* à la température T

$\mu(T) \geq 0$ est appelée *viscosité de cisaillement* ou encore *viscosité dynamique*⁵ à la température T .

Il est facile de vérifier qu'avec ces définitions de f_1 et f_2 , les termes ϕ_{vol} et ϕ_{isov} sont bien non négatifs.

La loi de comportement mécanique (2.6) page 176 est alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \text{Tr} \boldsymbol{\sigma} &= \frac{f_\rho(T)}{f'_\rho(T)} \left[k(T) \frac{f'_\rho(T)}{f_\rho(T)} \text{Tr} \mathbf{D} + f_\rho(T) (T s' - u') \right] &= k(T) \text{Tr} \mathbf{D} + \frac{f_\rho(T)^2}{f'_\rho(T)} (T s' - u') \\ &= \frac{f_\rho(T)}{f'_\rho(T)} \left[-k(T) \left(\frac{f'_\rho(T)}{f_\rho(T)} \right)^2 \dot{T} + f_\rho(T) (T s' - u') \right] &= -\frac{k(T) f'_\rho(T)}{f_\rho(T)} \dot{T} + \frac{f_\rho(T)^2}{f'_\rho(T)} (T s' - u') \end{aligned}$$

$$\text{Dev} \boldsymbol{\sigma} = 2 \mu(T) \text{Dev} \mathbf{D}$$

soit encore :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= 2 \mu(T) \text{Dev} \mathbf{D} + \left[-\frac{k(T) f'_\rho(T)}{f_\rho(T)} \dot{T} + \frac{f_\rho(T)^2}{f'_\rho(T)} (T s' - u') \right] \mathbf{G} \\ &= 2 \mu(T) \text{Dev} \mathbf{D} + \left[k(T) \text{Tr} \mathbf{D} + \frac{f_\rho(T)^2}{f'_\rho(T)} (T s' - u') \right] \mathbf{G} \\ &= 2 \mu(T) \mathbf{D} + \left[\left(k(T) - \frac{2 \mu(T)}{3} \right) \text{Tr} \mathbf{D} + \frac{f_\rho(T)^2}{f'_\rho(T)} (T s' - u') \right] \mathbf{G} \end{aligned}$$

Dans un liquide, si la vitesse de déformation est nulle⁶ ($\mathbf{D} = \mathbf{0}$), (et par conséquent la température est constante $\text{Tr} \mathbf{D} = 0 \Rightarrow \dot{T} = 0$), le tenseur des contraintes est sphérique et vaut :

$$\frac{f_\rho(T)^2}{f'_\rho(T)} (T s' - u') \mathbf{G} = -p \mathbf{G}$$

Le terme $p = -\frac{f_\rho(T)^2}{f'_\rho(T)} (T s' - u')$ est appelé *pression absolue*.

Il arrive souvent que dans les liquides on considère la viscosité de volume $k(T)$ comme négligeable. La loi devient⁷ :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= 2 \mu(T) \text{Dev} \mathbf{D} + \frac{f_\rho(T)^2}{f'_\rho(T)} (T s' - u') \mathbf{G} &= 2 \mu(T) \text{Dev} \mathbf{D} - p \mathbf{G} \\ &= 2 \mu(T) \mathbf{D} + \left[-\frac{2 \mu(T)}{3} \text{Tr} \mathbf{D} + \frac{f_\rho(T)^2}{f'_\rho(T)} (T s' - u') \right] \mathbf{G} &= 2 \mu(T) \mathbf{D} - \left(\frac{2 \mu(T)}{3} \text{Tr} \mathbf{D} + p \right) \mathbf{G} \end{aligned}$$

5. voir note 6 page 170

6. voir note 7 page 171.

7. Dans les cours de mécanique des liquides (mécanique des «fluides» incompressibles) élémentaires, la loi donnée est différente: $\boldsymbol{\sigma} = 2 \mu \mathbf{D} - p \mathbf{G}$ car on y suppose implicitement que $\text{Tr} \mathbf{D} = 0$ et donc que $\mathbf{D} = \text{Dev} \mathbf{D}$. Or $\text{Tr} \mathbf{D} = -\frac{\dot{p}}{\rho} = -\frac{f'_\rho(T)}{f_\rho(T)} \dot{T} \neq 0$. Cette loi de comportement n'est acceptable que si le liquide ne se dilate pas sous l'effet de la température, c'est à dire si $f'_\rho(T) = 0$. La supposition $\text{Tr} \mathbf{D} = 0$ est donc incorrecte pour les les fluides visqueux dilatables car leur évolution ne peut pas être isotherme et ils se dilatent, mais si le liquide est non visqueux, $\mu(T) = 0$, la loi redevient correcte car \mathbf{D} disparaît de la loi de comportement ($\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{G}$). La confusion vient probablement de l'idée qu'on veut donner une même forme générale de loi de comportement ($\boldsymbol{\sigma} = 2 \mu \mathbf{D} + (\lambda \text{Tr} \mathbf{D} - p) \mathbf{G}$) à tous les «fluides» (liquides et gaz) alors que ces deux milieux sont de nature profondément différente: le nombre de variables d'état indépendantes est 2 pour les gaz et 1 pour les liquides. On peut facilement vérifier que la loi de comportement $\boldsymbol{\sigma} = 2 \mu \mathbf{D} - p \mathbf{G}$ pourrait conduire à une dissipation intrinsèque négative pour des évolutions rapides de température.

2.4.2 Exemple de loi de comportement thermique: la loi de Fourier

La forme générale des lois de conduction est donnée en (1.9) page 169. Pour que la dissipation thermique ϕ_{th} soit non négative, on peut choisir :

$$\mathbf{q} = -\alpha(T) \mathbf{grad}_E T$$

où $\alpha(T) \geq 0$ est le coefficient de conductibilité thermique.

Ce choix est l'un des plus simples et devrait être justifié par des constatations expérimentales⁸.

2.5 Modélisation des liquides

L'expérience montre que dans un liquide à vitesse de déformation nulle, la pression absolue p est positive et qu'elle peut prendre une valeur quelconque quelque soit l'état du liquide (caractérisé par la seule variable d'état T). La pression p n'est donc pas une fonction de la température, elle n'est donc pas une fonction d'état. Sa valeur n'est fixée que par les actions extérieures à la particule.

De la définition de p et de (2.8) page 177, il vient⁹:

$$u' = T s' - p \frac{f'_\rho}{f_\rho^2} = C(T) - p \frac{f'_\rho}{f_\rho^2}$$

L'énergie interne massique d'un liquide est donc :

$$u(T) = \int_{T_0}^T C(T) dT + p \left(\frac{1}{f_\rho(T)} - \frac{1}{f_\rho(T_0)} \right)$$

et l'entropie est donnée par (2.9) page 177

$$s(T) = \int_{T_0}^T \frac{C(T)}{T} dT$$

La fonction $C(T)$ est connue par une mesure expérimentale de la capacité calorifique (voir (2.9) page 177) et la fonction $f_\rho(T)$ est connue par une mesure de la dilatation en fonction de la température. Un liquide est donc complètement modélisé par ces deux mesures.

8. Si les constatations expérimentales le justifient, on peut prendre par exemple une loi non linéaire $\mathbf{q} = -\alpha(T, \|\mathbf{grad}_E T\|) \mathbf{grad}_E T$. On peut se reporter à la remarque page 141 pour la construction de lois de comportement thermiques plus générales.

9. Dans les traités de thermodynamique, cette équation différentielle est donnée sous la forme $du = T ds - p dv$ où $v = \frac{1}{\rho}$ est le volume massique.

Chapitre 3

Milieux visco-élastiques

3.1 Définition de la viscoélasticité

Comme pour tout solide déformable on suppose qu'il existe un état appelé *état naturel* dans lequel le tenseur des contraintes est nul. Cet état sert de référence pour la mesure des déformations.

Les variables d'état indépendantes sont la température T et un tenseur de déformation \mathbf{X} objectif mesurant les déformations entre l'état naturel et l'état actuel. Si le milieu est anisotrope, il faut leur adjoindre les directions actuelles d'anisotropie $\mathbf{n}_i^{(i)}$. On ramène ces variables d'état tensorielles à un ensemble de variables d'état *scalaires et objectives*¹ ($T, X_I, X_{II}, X_{III}, \mathbf{X} \otimes \mathbf{n}_i^{(1)}, \mathbf{X}^2 \otimes \mathbf{n}_i^{(1)}, \dots$). Leur nombre dépend du nombre de directions d'anisotropie (voir 4.2 page 35). Quand on veut les désigner toutes on les note $(T, \chi_1, \dots, \chi_n)$.

Les fonctions d'état sont donc telles que :

$$u = u_X(T, X_I, X_{II}, X_{III}, \dots) \quad s = s_X(T, X_I, X_{II}, X_{III}, \dots) \quad \psi = \psi_X(T, X_I, X_{II}, X_{III}, \dots)$$

dont les dérivées partielles sont

$$\dot{u} = \partial_0 u \dot{T} + \sum_{i=1}^n \partial_i u \dot{\chi}_i \quad \dot{s} = \partial_0 s \dot{T} + \sum_{i=1}^n \partial_i s \dot{\chi}_i \quad \dot{\psi} = \partial_0 \psi \dot{T} + \sum_{i=1}^n \partial_i \psi \dot{\chi}_i$$

La grande différence avec l'élasticité ou la thermo-élasticité est dans la dissipation intrinsèque qui n'est plus supposée nulle. On va voir que la levée de cette hypothèse introduit nécessairement l'existence d'une dissipation visqueuse.

3.2 Conséquences du second principe

D'une manière générale, le second principe de la thermodynamique s'écrit (voir (4.9) page 95) :

$$0 \leq \underbrace{\rho (T \dot{s} - \dot{u}) + \sigma \otimes \mathbf{D}}_{\phi_{int}} - \underbrace{\frac{\mathbf{q} \otimes \mathbf{grad}_E T}{T}}_{\phi_{th}}$$

$$0 \leq \rho (T \partial_0 s - \partial_0 u) \dot{T} + \rho \sum_{i=1}^n (T \partial_i s - \partial_i u) \dot{\chi}_i + \sigma \otimes \mathbf{D} - \frac{\mathbf{q} \otimes \mathbf{grad}_E T}{T} \quad (3.1)$$

pour tout état et pour toute évolution thermo-mécanique infinitésimale autour de cet état.

1. en choisissant un tenseur de déformations objectif

Dans une évolution thermo-mécanique, les valeurs de $\dot{\mathbf{X}}$ et \mathbf{D} ne sont pas indépendantes, mais \dot{T} peut prendre des valeurs arbitraires indépendamment des dérivées particulières des autres variables d'état et de \mathbf{D} . Le terme $T \partial_0 s - \partial_0 u$ est une fonction d'état qui n'est donc pas fonction de \dot{T} . Pour que la dissipation soit non négative dans toute évolution thermo-mécanique infinitésimale, c'est-à-dire pour toute valeur de \dot{T} , il faut donc que le facteur de \dot{T} soit nul :

$$0 = T \partial_0 s - \partial_0 u = -\partial_0 \psi - s$$

On en déduit comme en thermo-élasticité² (non incompressible) que les deux fonctions d'état u et s peuvent s'exprimer en fonction de l'énergie libre ψ :

$$s = -\partial_0 \psi = -\frac{\partial \psi}{\partial T} \quad (3.2)$$

$$u = \psi + T s = \psi - T \frac{\partial \psi}{\partial T} \quad (3.3)$$

Bien noter que ce résultat est dû à l'indépendance de \dot{T} vis à vis des autres dérivées particulières, de \mathbf{D} et $\mathbf{grad}_E T$. On verra un peu plus loin qu'il n'est pas transposable au cas de la visco-élasticité incompressible³.

Pour modéliser complètement un milieu visco-élastique, il suffit de définir l'énergie libre ψ en fonction des variables d'état. On pose donc

$$\psi = \psi_X (T, X_I, X_{II}, X_{III}, \dots)$$

et le second principe de la thermodynamique pour les milieux visco-élastiques se réduit à :

$$\phi = -\rho \underbrace{\sum_{i=1}^n \partial_i \psi \dot{\chi}_i}_{\phi_{int}} + \underbrace{\sigma \otimes \mathbf{D} - \frac{\mathbf{q} \otimes \mathbf{grad}_E T}{T}}_{\phi_{th} \geq 0} \geq 0$$

pour tout état et pour toute transformation infinitésimale autour de cet état.

Le tenseur \mathbf{D} et les scalaires $\rho, \dot{\chi}_i$ ne sont pas indépendants. Pour exprimer la relation qui les lie il faut choisir un tenseur de déformation. En effet, les dérivées particulières des invariants de déformation ($\chi_1 = X_I, \chi_2 = X_{II}, \chi_3 = X_{III}$) dépendent du tenseur choisi (voir annexe E page 227). De même, les dérivées particulières des invariants supplémentaires (dus aux éventuelles directions d'anisotropie) dépendent du tenseur choisi⁴ (voir F page 235).

Si on choisit un tenseur de déformation parmi \mathbf{B} , \mathbf{V} ou \mathbf{M} , en exprimant les dérivées particulières des invariants, avec des calculs strictement identiques à ceux faits en élasticité (isotrope ou non), on aboutira à une égalité de la forme

$$-\rho \sum_{i=1}^n \partial_i \psi \dot{\chi}_i = -\bar{\sigma} \otimes \mathbf{D}$$

où $\bar{\sigma}$ est une fonction tensorielle des χ_1, \dots, χ_n , du tenseur de déformation choisi et des directions d'anisotropie.

La dissipation dans un milieu visco-élastique peut donc se mettre sous la forme

$$\phi = \underbrace{(-\bar{\sigma} + \sigma) \otimes \mathbf{D}}_{\phi_{int}} - \underbrace{\frac{\mathbf{q} \otimes \mathbf{grad}_E T}{T}}_{\phi_{th} \geq 0} \geq 0$$

pour tout état et pour toute transformation infinitésimale autour de cet état.

2. mais pour des raisons différentes : en thermo-élasticité, la dissipation intrinsèque est posée nulle par définition, alors qu'ici elle est seulement non négative.

3. L'hypothèse d'incompressibilité introduit une relation entre \dot{T} et $\text{Tr} \mathbf{D}$

4. Dans le cas de milieux anisotropes, le tenseur \mathbf{B} donne les résultats les plus maniables.

où $\bar{\sigma}$ est la contrainte dans un milieu thermo-élastique⁵ (isotrope ou non).

Affirmer que la dissipation intrinsèque est non nulle implique que la dissipation ne peut être que d'origine visqueuse (c'est-à-dire fonction de la vitesse de déformation).

Si on définit les vecteurs \mathbf{x} et \mathbf{y}

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -\bar{\sigma} + \sigma \\ -\frac{\mathbf{q}}{T} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{grad}_E T \end{pmatrix}$$

la dissipation s'écrit $\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} \geq 0 \quad \forall \mathbf{y}$. Le vecteur \mathbf{x} est donc nécessairement *au moins* une fonction de \mathbf{y} , et on peut écrire *a priori*:

$$\begin{aligned} -\bar{\sigma} + \sigma &= \mathbf{f}_1(\mathbf{D}, \mathbf{grad}_E T, T, X_I, X_{II}, X_{III}, \dots) \\ -\frac{\mathbf{q}}{T} &= \mathbf{f}_2(\mathbf{D}, \mathbf{grad}_E T, T, X_I, X_{II}, X_{III}, \dots) \end{aligned}$$

les arguments supplémentaires étant les éventuelles variables d'état dues à l'anisotropie. Les fonctions \mathbf{f}_1 et \mathbf{f}_2 doivent être choisies telles que

$$\mathbf{f}_1 \otimes \mathbf{D} + \mathbf{f}_2 \otimes \mathbf{grad}_E T \geq 0$$

Il reste maintenant à *choisir* un mécanisme de dissipation, en principe suggéré par des constatations expérimentales. On peut par exemple supposer que :

- la dissipation intrinsèque ne dépend que de \mathbf{D} et de T et on choisit :

$$-\bar{\sigma} + \sigma = \mathbf{f}_1(\mathbf{D}, T) = k(T) \mathbf{D} \quad k(T) \geq 0$$

- la dissipation thermique ne dépend que de $\mathbf{grad}_E T$ et T et on choisit :

$$-\frac{\mathbf{q}}{T} = \mathbf{f}_2(\mathbf{grad}_E T, T) = \frac{\alpha(T)}{T} \mathbf{grad}_E T \quad \alpha(T) \geq 0$$

La dissipation est alors :

$$\phi = k(T) \|\mathbf{D}\|^2 + \frac{\alpha(T)}{T} \|\mathbf{grad}_E T\|^2$$

On vérifie aisément que, dans ce mécanisme de dissipation, la définition (universelle) de la dissipation entraîne bien que la dissipation est une grandeur scalaire objective.

Dans ce choix de mécanisme de dissipation, la loi de comportement mécanique et loi de comportement thermique sont :

$$\sigma = \bar{\sigma} + k(T) \mathbf{D} \quad \text{et} \quad \mathbf{q} = -\alpha(T) \mathbf{grad}_E T$$

où $\bar{\sigma}$ l'expression de la contrainte dans un milieu thermo-élastique.

Dans un milieu visco-élastique, le tenseur des contraintes est la somme du tenseur des contraintes thermo-élastiques et d'un tenseur des contraintes d'origine visqueuse.

Pour terminer la modélisation du milieu continu, il faut donc donner une expression de l'énergie libre ψ en fonction des variables d'état indépendantes (voir thermo-élasticité).

⁵. ou élastique ($\psi = u$) si on veut faire de la «visco-élasticité isotherme». La visco-élasticité isotherme est un modèle peu raisonnable: une dissipation visqueuse produit de la chaleur et est contradictoire avec une évolution isotherme.

3.3 Capacités calorifiques et dilatations

La capacité calorifique dans une évolution infinitésimale *non isotherme* a été définie en (4.11) page 97 :

$$C = \frac{\mathcal{P}_{cal\ vol\ ext} + \mathcal{P}_{cal\ vol\ int}}{\rho \dot{T}} = T \partial_0 s + T \sum_{i=1}^n \partial_i s \frac{\dot{\chi}_i}{\dot{T}}$$

La valeur de C dépend de l'évolution infinitésimale, car pour chaque évolution infinitésimale dans l'espace des états, les rapports $\frac{\dot{\chi}_i}{\dot{T}}$ sont différents. D'autre part, elle dépend aussi *a priori* de l'état.

3.3.1 Capacité calorifique à déformation constante

Si l'évolution infinitésimale est à déformation constante, alors on a $\mathbf{D} = \mathbf{0}$, ce qui entraîne⁶ $\dot{\chi}_1 = \dots = \dot{\chi}_n = 0$. Dans une telle évolution, la dissipation d'un milieu visco-élastique est nulle, et la capacité calorifique à déformation constante C_d est la même que pour un milieu thermo-élastique :

$$C_d = T \partial_0 s = -T \partial_{00} \psi \geq 0$$

On en déduit des conditions sur les expressions de s_X et ψ_X . Ces conditions doivent être satisfaites par toute expression de s ou ψ modélisant un milieu visco-élastique.

C_d peut être mesuré expérimentalement en étudiant les échauffements à déformation bloquée.

3.3.2 Capacité calorifique et dilatation «à contrainte nulle»

On a vu qu'en visco-élasticité, le tenseur des contraintes est la somme d'une contrainte élastique et d'une contrainte visqueuse qui ne peut s'annuler que si la vitesse de déformation \mathbf{D} est nulle. Il est donc difficile d'envisager des transformations de milieux visco-élastiques à contrainte nulle. On peut toutefois approcher ces transformations idéales avec un apport de chaleur très lent, tel que les contraintes visqueuses (et donc la dissipation) soient négligeables. Dans ces conditions, on trouvera donc les mêmes expressions de la capacité calorifique et du coefficient de dilatation thermique libre qu'en thermo-élasticité (voir 6.4.2 page 142).

3.4 Visco-élasticité incompressible

La manière la plus simple⁷ de modéliser un milieu visco-élastique incompressible est de le considérer comme un milieu visco-élastique peu compressible.

Toutefois, on peut construire une thermodynamique correcte de la visco-élasticité incompressible. Comme en thermo-élasticité, l'hypothèse d'incompressibilité introduit une relation entre la température T et la dilatation volumique. Le nombre de variables d'état indépendantes de déformation est diminué de 1 car la température n'est donc pas indépendante des invariants de déformation. Si on note $\rho = f_\rho(T)$ la loi de dilatation du milieu visco-élastique incompressible, on a :

$$\text{Tr} \mathbf{D} = -\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -\frac{f'_\rho}{f_\rho} \dot{T}$$

6. voir par exemple (E.4), (E.5), (E.6) page 228, et (F.6), (F.8) page 237

7. et la plus physique

on ne peut pas exploiter l'inégalité (3.1) page 181 de la même manière qu'en visco-élasticité compressible,

$$0 \leq \rho (T \partial_0 s - \partial_0 u) \dot{T} + \rho \sum_{i=1}^{n_i} (T \partial_i s - \partial_i u) \dot{\chi}_i + \boldsymbol{\sigma} \overline{\otimes} \mathbf{D} - \frac{\mathbf{q} \overline{\otimes} \mathbf{grad}_E T}{T}$$

car \dot{T} , certains⁸ $\dot{\chi}_i$ et \mathbf{D} ne sont pas indépendants dans une évolution infinitésimale arbitraire (dans l'inégalité ci-dessus, $n_i = n - 1$, où n est le nombre de variables indépendantes scalaires d'un milieu visco-élastique non incompressible de même anisotropie⁹).

Les dérivées des invariants de déformation et d'anisotropie ($\chi_1, \dots, \chi_{n_i}$) s'expriment aussi en fonction de \mathbf{D} (et donc en fonction de $\text{Tr} \mathbf{D}$ et $\text{Dev} \mathbf{D}$). Elles ne peuvent être écrites que lorsqu'on a choisi un tenseur de déformation.

Par exemple, pour un milieu visco-élastique *isotrope*¹⁰ en utilisant \mathbf{V} comme tenseur de déformation, les variables d'état indépendantes sont $\chi_0 = T$, $\chi_1 = V_I$ et $\chi_2 = V_{II}$ ¹¹. Les dérivées particulières sont (voir (E.17) et (E.18) page 229) :

$$\begin{aligned} \dot{V}_I &= \mathbf{V} \overline{\otimes} \mathbf{D} = \frac{V_I \text{Tr} \mathbf{D}}{3} + \text{Dev} \mathbf{V} \overline{\otimes} \text{Dev} \mathbf{D} \\ \dot{V}_{II} &= (V_I \mathbf{V} - \mathbf{V}^2) \overline{\otimes} \mathbf{D} = \underbrace{(V_I^2 - \text{Tr}(\mathbf{V}^2))}_{2V_{II}} \frac{\text{Tr} \mathbf{D}}{3} + (V_I \text{Dev} \mathbf{V} - \text{Dev}(\mathbf{V}^2)) \overline{\otimes} \text{Dev} \mathbf{D} \end{aligned}$$

Dans ces conditions, la dissipation s'écrit :

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{f_\rho^2}{f'_\rho} (T \partial_0 s_V - \partial_0 u_V) + f_\rho \frac{V_I}{3} \underbrace{(T \partial_1 s_V - \partial_1 u_V)}_{-\partial_1 \psi_V} + f_\rho \frac{2V_{II}}{3} \underbrace{(T \partial_2 s_V - \partial_2 u_V)}_{-\partial_2 \psi_V} + \frac{\text{Tr} \boldsymbol{\sigma}}{3} \right] \text{Tr} \mathbf{D} + \\ & \left[f_\rho \underbrace{(T \partial_1 s_V - \partial_1 u_V)}_{-\partial_1 \psi_V} \text{Dev} \mathbf{V} + f_\rho \underbrace{(T \partial_2 s_V - \partial_2 u_V)}_{-\partial_2 \psi_V} (V_I \text{Dev} \mathbf{V} - \text{Dev}(\mathbf{V}^2)) + \text{Dev} \boldsymbol{\sigma} \right] \overline{\otimes} \text{Dev} \mathbf{D} - \\ & \frac{\mathbf{q} \overline{\otimes} \mathbf{grad}_E T}{T} \geq 0 \end{aligned}$$

où $\text{Tr} \mathbf{D}$ (ou \dot{T}), $\text{Dev} \mathbf{D}$ et $\mathbf{grad}_E T$ peuvent prendre des valeurs arbitraires dans toute évolution infinitésimale. Leurs facteurs sont donc *a priori* fonction de ces valeurs arbitraires et de l'état¹².

On en déduit les formes générales des lois de comportement mécanique et thermique :

$$\begin{aligned} \frac{\text{Tr} \boldsymbol{\sigma}}{3} &= \frac{f_\rho^2}{f'_\rho} (T \partial_0 s_V - \partial_0 u_V) + \frac{f_\rho V_I}{3} \partial_1 \psi_V + \frac{2f_\rho V_{II}}{3} \partial_2 \psi_V + f_1 (\text{Tr} \mathbf{D}, \text{Dev} \mathbf{D}, \mathbf{grad}_E T, T, V_I, V_{II}) \\ \text{Dev} \boldsymbol{\sigma} &= f_\rho (\partial_1 \psi_V + V_I \partial_2 \psi_V) \text{Dev} \mathbf{V} - f_\rho \text{Dev}(\mathbf{V}^2) + f_2 (\text{Tr} \mathbf{D}, \text{Dev} \mathbf{D}, \mathbf{grad}_E T, T, V_I, V_{II}) \quad (3.4) \\ \mathbf{q} &= -T \mathbf{f}_3 (\text{Tr} \mathbf{D}, \text{Dev} \mathbf{D}, \mathbf{grad}_E T, T, V_I, V_{II}) \end{aligned}$$

où les fonctions f_1 , \mathbf{f}_2 ¹³ et \mathbf{f}_3 doivent être choisies telles que :

$$\underbrace{f_1 \text{Tr} \mathbf{D}}_{\phi_{vol}} + \underbrace{f_2 \overline{\otimes} \text{Dev} \mathbf{D}}_{\phi_{isov}} + \underbrace{f_3 \overline{\otimes} \mathbf{grad}_E T}_{\phi_{th}} \geq 0$$

8. suivant le tenseur de déformation choisi.

9. pour un milieu isotrope $n_i = 2$, pour un milieu isotrope transverse $n_i = 4$, etc. Mais voir note suivante.

10. L'hypothèse d'incompressibilité d'un milieu anisotrope est rarement faite. On fait parfois une hypothèse d'inextensibilité dans une direction d'anisotropie, ce qui revient à se donner une loi $\mathbf{X} \overline{\otimes} \mathbf{N}_t = f_{n_i}(T)$.

11. $V_{III} = K_v = \frac{\rho_0}{\rho} = \frac{\rho_0}{f_\rho(T)}$ n'est pas indépendant de T .

12. Comme en thermo-élasticité incompressible ou pour les liquides, on constate qu'il n'est généralement pas possible de modéliser un milieu visco-élastique avec la seule énergie libre ψ . Le «postulat» de Helmholtz ne s'applique pas.

13. À noter que l'équation (3.4) impose que la fonction à valeur tensorielle \mathbf{f}_2 renvoie un déviateur pur.

Il reste à choisir à partir de constatations expérimentales un mécanisme de dissipation. On peut prendre par exemple :

$$f_1 = k(T) \operatorname{Tr} \mathbf{D} = -k(T) \frac{f'_\rho}{f_\rho} \dot{T} \quad \mathbf{f}_2 = 2\mu(T) \operatorname{Dev} \mathbf{D} \quad \mathbf{f}_3 = \frac{\alpha(T)}{T} \operatorname{grad}_E T$$

Il est aussi possible de constater que la dissipation de volume ϕ_{vol} est nulle et de prendre $f_1 = 0$.

Pour un milieu visco-élastique incompressible, on ne peut pas définir de capacité calorifique à déformation nulle, mais on peut définir une capacité calorifique à contrainte nulle¹⁴. On obtiendra comme en 6.7.3 page 149 :

$$C_\sigma = T \partial_0 s_V + T \left(\frac{\partial_1 s_V}{f_\rho^{\frac{2}{3}}} + \frac{2 \partial_2 s_V}{f_\rho^{\frac{1}{3}}} \right) f'_\rho \geq 0$$

Cette inégalité est utile pour le choix de l'expression de $s_V(T, V_I, V_{II})$.

3.5 En bref...

Les idées essentielles :

- La visco-élasticité (compressible) est l'étude des milieux à dissipation intrinsèque non nulle, dont les variables d'état sont T , un tenseur de déformation \mathbf{X} , et d'éventuelles directions d'anisotropie.
- Le second principe implique qu'avec ces seules variables d'état, la dissipation intrinsèque ne peut être que d'origine visqueuse. D'autre part, le tenseur des contraintes est nécessairement de la forme¹⁵ $\boldsymbol{\sigma} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{f}_1(\mathbf{D}, T, \chi_1, \dots, \chi_n)$, où $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ est la contrainte thermo-élastique et où $\mathbf{f}_1(\mathbf{D}, T, \chi_1, \dots, \chi_n)$ est le complément de contraintes visqueuses dues à la vitesse de déformation.
Pour construire un modèle de milieu visco-élastique, il suffit donc de disposer d'un modèle de milieu thermo-élastique, et de lui ajouter la définition d'un mécanisme de dissipation visqueuse.
- Le mécanisme de dissipation, linéaire en \mathbf{D} (newtonien ?), qui a été proposé, est le plus simple. On peut évidemment en choisir de plus compliqués. Par exemple, la fonction $\mathbf{f}_1(\mathbf{D}, T)$ pourrait être non linéaire en \mathbf{D} . On pourrait prendre par exemple $\mathbf{f}_1(\mathbf{D}, T) = k_1(T, \|\mathbf{D}\|) \mathbf{D}$. On peut aussi séparer une dissipation sphérique et une dissipation isovolume. De tels choix ne peuvent être faits qu'en fonction de mesures expérimentales sur le milieu continu à modéliser. De plus, les dissipations intrinsèque et thermique ne sont pas nécessairement découplées.
- La visco-élasticité incompressible n'est pas un cas particulier de la visco-élasticité compressible : le nombre de variables d'état est diminué de 1 et la forme générale de la loi de comportement mécanique est différente.

14. mais avec un apport de chaleur très lent pour pouvoir négliger les contraintes d'origine visqueuse (voir 3.3.2 page 184)

15. Les amateurs de «modèles rhéologiques» retrouveront un ressort non linéaire en parallèle avec un amortisseur non linéaire.