

Mécanique des milieux continus

Jean GARRIGUES
Jean.Garrigues@esm2.imt-mrs.fr

Mars 2002



Avertissement

Les résultats donnés dans ce cours sont tous donnés sous forme tensorielle. Il sont donc valables dans tout système de coordonnées.

Les étudiants sont informés qu'ils ont à leur disposition dans le logiciel de calcul formel «Maple», une bibliothèque maison, nommée «tens3d», destinée à leur faciliter le travail pour l'écriture des équations de la mécanique des milieux continus dans un système de coordonnées quelconque en base naturelle ou en base naturelle normée. Ils sont vivement encouragés à l'utiliser pour la résolution des travaux dirigés.



Chapitre 1

Description des milieux continus

1.1 Définitions élémentaires

1.1.1 Milieu continu

On suppose que l'espace dans lequel nous vivons est mathématiquement représentable par l'espace Euclidien de dimension 3 noté \mathcal{E}_3 .

Soit Ω un domaine volumique de \mathcal{E}_3 .

On dit que Ω est rempli d'un milieu matériel continu, si à tout instant t et en chaque point M de Ω on peut définir des champs de grandeurs physiques locales relatives à ce milieu matériel.

Ces grandeurs peuvent être mathématiquement représentées par

- des champs scalaires sur Ω (masse volumique, température, ...)
- des champs vectoriels sur Ω (vitesse, accélération, ...)
- des champs tensoriels sur Ω (tenseur des déformations, tenseur des contraintes, ...)

On suppose de plus que ces champs sont différentiables presque partout¹ sur Ω .

Discussion

La définition mathématique précédente suppose que pour deux points très proches, la définition de la grandeur physique a encore un sens. Or, les connaissances de physique moléculaire et atomique sont en contradiction flagrante avec cette hypothèse ! En effet les notions de masse volumique de pression ou de vitesse du milieu n'ont aucun sens à cette échelle, puisque la matière vue à cette échelle est essentiellement constituée de vide.

Par exemple, si on observe macroscopiquement un bocal fermé rempli d'air au repos, un observateur «macroscopique» observant l'air (en vélocimétrie laser par exemple) constatera que la vitesse est partout nulle partout dans le bocal. Par contre, un observateur «microscopique», verrait des molécules se déplaçant dans le vide de manière erratique et à grande vitesse (le célèbre mouvement Brownien).

1. Le sens de la locution « presque partout » est celui qu'on définit dans la théorie de la mesure. Il signifie que l'ensemble des points où les grandeurs physiques ne sont pas différentiables est de volume nul. On admet donc des points de discontinuité isolés, des lignes de discontinuité et des surfaces de discontinuité. Pour les puristes : toutes les intégrales écrites dans ce texte doivent donc être prises au sens de Lebesgue.

La différence entre les deux conclusions vient de l'échelle d'observation: Un «point» pour l'observateur macroscopique est en fait un petit volume², qui contient un grand nombre de molécules³. La vitesse observée est une moyenne statistique du mouvement Brownien sur ce petit volume. Un «point» pour l'observateur «microscopique» pourrait être inférieur à la taille d'une molécule d'hydrogène. Au moment de l'observation, ce point peut se trouver, soit sur une molécule et on mesure alors la vitesse du mouvement Brownien, soit dans le vide intermoléculaire où la notion de vitesse n'a pas de sens.

De même, la notion de pression constante dans le bocal perd son sens à l'échelle microscopique: la pression macroscopique est le résultat statistique moyen de l'impact du mouvement Brownien sur la surface sensible du manomètre. Si on disposait d'un micromanomètre à l'échelle moléculaire, on mesurerait de temps en temps un impact, ce qui est fort loin de la notion de pression constante.

La mécanique des milieux continus se place donc résolument dans le cadre macroscopique, en supposant que la différentiabilité mathématique est vraie.

La mécanique des milieux continus est donc un modèle mathématique utilisé pour représenter de manière simple et maniable une réalité extrêmement complexe.

Les prédictions de cette théorie ne seront correctes que dans la mesure où les vérifications expérimentales se feront sur de petits volumes macroscopiques, mais qui contiendront encore un nombre suffisamment grand de molécules pour que la mesure soit encore une moyenne statistiquement significative.

Ces notions fixent les limites de validité de la théorie. Par exemple, si on étudiait un gaz fortement raréfié⁴, où le libre parcours moyen des molécules est de l'ordre du mètre, il faudrait des instruments dont le «point» de mesure ait un volume de 1 million de km³ pour que les prévisions de la théorie et les mesures coïncident raisonnablement⁵.

1.1.2 Point matériel

L'espace \mathcal{E}_3 est constitué de *points géométriques*. Le milieu matériel est constitué de *points matériels* appelés aussi *particules*.

Si le milieu matériel est en mouvement, les points matériels se déplacent et leur position coïncide à chaque instant avec des points géométriques différents.

On appelle *position de la particule P à l'instant t* le point géométrique M qui coïncide avec la particule P à l'instant t . La position à l'instant t est donc un vecteur \mathbf{OM} de \mathcal{E}_3 .

A chaque particule sont attachées des grandeurs physiques (pressions, température, vitesse, tenseur des contraintes, tenseur des déformations, etc.) qui définissent des champs différentiables *sur le milieu matériel en mouvement*. Ils sont aussi différentiables sur le domaine géométrique Ω_t que le milieu matériel occupe à l'instant t .

1.1.3 Remarque importante

Dans les milieux continus de ce cours, on considère qu'on connaît complètement la position du milieu si on connaît la position de toutes les particules. On dit que le milieu est *non polarisé*.

2. par exemple de l'ordre du dixième de millimètre cube
 3. on rappelle qu'une mole d'air (22,4 litres) contient $6,02 \cdot 10^{23}$ molécules. Combien y a-t-il de molécules dans $0,1 \text{ m}^3$?
 4. par exemple l'air dans les hautes couches de l'atmosphère terrestre
 5. Certains calculs en astronomie considèrent les galaxies comme des fluides, mais le "point de mesure" a une dimension de l'ordre de milliers d'années-lumière au cube!

L'orientation propre de chaque particule est indifférente⁶.

1.1.4 Trajectoire

On appelle trajectoire de la particule P , l'ensemble des positions géométriques occupées par la particule P au cours du temps. C'est donc une courbe de \mathcal{E}_3 .

1.1.5 Domaines

En mécanique des milieux continus, on raisonne sur deux sortes de domaines:

– **Les domaines matériels:**

Un domaine matériel est défini par l'*ensemble des particules* qui le constituent. Si une particule appartient au domaine matériel à l'instant t , elle lui appartient à tout instant. Le domaine matériel se déplace et se déforme avec le mouvement du milieu. On dit qu'*on suit le domaine dans son mouvement*. Le flux de matière à travers sa frontière est donc nul. Sauf mention contraire, ils seront notés \mathcal{D} .

– **Les domaines géométriques:**

Ce sont des *ensembles de points géométriques*. Le domaine géométrique est traversé par un milieu continu en mouvement. Les domaines géométriques sont généralement fixes dans \mathcal{E}_3 mais ce n'est pas obligatoire. S'il sont en mouvement, ce mouvement n'a rien à voir avec celui du milieu matériel. Le flux de matière à travers la frontière est donc généralement non nul.

Sauf mention contraire, ils seront notés Ω .

1.1.6 Objet de la mécanique des milieux continus

Avec les définitions précédentes, la mécanique des solides indéformables fait partie de la mécanique des milieux continus. En fait, ce cours devrait s'appeler *mécanique des milieux continus déformables* car on ne s'intéressera ici qu'aux milieux continus déformables.

Par exemple, un barreau d'acier, de l'eau s'écoulant dans un canal, de l'air sortant d'un ventilateur sont des milieux continus déformables, c'est-à-dire que la distance entre deux particules du milieu peut varier au cours du mouvement.

On va donc s'intéresser aux mouvements, déformations, efforts intérieurs et extérieurs et aux lois qui les relient. Contrairement à la mécanique des solides indéformables, le nombre de paramètres pour décrire le mouvement d'un milieu continu déformable est infini.

En effet, pour connaître la vitesse de tout point d'un solide *indéformable*, il suffit de connaître la vitesse d'un point matériel (une particule) du solide et le vecteur rotation du solide (au total : 6 paramètres). Les vitesses des autres particules du solide s'en déduisent immédiatement par une relation torsorielle bien connue :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega}(M') &= \boldsymbol{\Omega}(M) \\ \mathbf{V}(M') &= \mathbf{V}(M) + \boldsymbol{\Omega}(M) \wedge \mathbf{MM}'\end{aligned}$$

qui se déduit du fait que *la distance entre deux points d'un solide indéformable est invariante dans le mouvement*.

⁶. Ce n'est pas toujours le cas : en *magnéto-hydrodynamique* (étude de fluides mécaniquement sensibles aux champs magnétiques), cette hypothèse est inacceptable.

En mécanique des milieux continus déformables, la distance entre deux points du milieu matériel varie. Il faut donc décrire le mouvement de *chaque particule du milieu*. Pour décrire les vitesses, il ne faut plus seulement deux vecteurs, mais *un champ de vecteurs* sur le milieu matériel.

On conçoit que cette complication nécessite de nouveaux outils et de nouveaux concepts.

1.2 Description du mouvement

Soit un domaine *matériel* \mathcal{D} en mouvement dans l'espace physique. On note Ω_t et $\Omega_{t'}$ les positions de \mathcal{D} aux instants t et t' . Ω_t et $\Omega_{t'}$ sont des domaines *géométriques*.

Soit P une particule de \mathcal{D} . On note M et M' les positions de la particule P aux instants t et t' . On a donc $M \in \Omega_t$ et $M' \in \Omega_{t'}$.

On appelle $f_{t,t'}$ l'application de Ω_t à $\Omega_{t'}$:

$$f_{t,t'} : M \in \Omega_t \longrightarrow M' = f_{t,t'}(M) \in \Omega_{t'}$$

La fonction $f_{t,t'}$ possède presque partout⁷ sur Ω_t les propriétés suivantes:

$$\begin{aligned} f_{t,t} &= I \text{ où } I \text{ est la transformation identité} \\ f_{t,t''} &= f_{t',t''} \circ f_{t,t'} \text{ (transitivité)} \\ f &\text{ est inversible: } f_{t,t'} \circ f_{t',t} = I \end{aligned}$$

En mécanique des milieux continus, on utilise principalement deux méthodes pour décrire le mouvement d'un milieu continu : la méthode de Lagrange et la méthode d'Euler.

1.2.1 Description de Lagrange

Soit un domaine *matériel* \mathcal{D} en mouvement dans l'espace physique. On appelle *configuration de référence* Ω_0 l'ensemble des positions M_0 des particules P de \mathcal{D} à un instant t_0 choisi *arbitrairement*. La configuration de référence Ω_0 est un domaine *géométrique*.

Ces définitions permettent d'*identifier* les particules de \mathcal{D} . En effet, la transformation $f_{t_0,t}$ étant biunivoque, on peut repérer (c'est-à-dire nommer) une particule P par la position M_0 qu'elle occupait à l'instant t_0 .

La description de Lagrange consiste à donner la position à tout instant de toutes les particules (identifiées par leur position à t_0), c'est-à-dire qu'on donne la fonction

$$M = f_{t_0,t}(M_0, t) \quad ; M_0 \in \Omega_0 \quad ; t \in \mathbb{R}$$

Les quatre variables (x_0^1, x_0^2, x_0^3, t) ⁸ qu'on peut résumer par (M_0, t) sont appelées variables de Lagrange. La description de Lagrange d'un mouvement consiste donc à donner la position de toutes les particules (identifiées par M_0) à tout instant.

On peut utiliser la description de Lagrange pour décrire la valeur de toute grandeur attachée à une particule :

Soit \mathcal{A} une grandeur physique⁹ définie pour une particule, la description de Lagrange de la grandeur \mathcal{A} est la donnée de la fonction $\mathcal{A}_L(M_0, t)$.

7. voir note 1 page 5

8. Les noms x_0^1, x_0^2 et x_0^3 des variables ne présument en rien du système de coordonnées utilisé. Ce sont trois réels qui déterminent le point M_0 , c'est-à-dire la position de la particule P à l'instant t_0 .

9. de nature quelconque, scalaire, vectorielle ou tensorielle. Par exemple, \mathcal{A} peut être la masse volumique, la température, la vitesse, le tenseur des contraintes ...

1.2.2 Description d'Euler

Soit un domaine *géométrique* fixe Ω traversé par un milieu matériel continu en mouvement. On dit que chaque point M de Ω est un *point d'observation*.

La description d'Euler du mouvement consiste à donner le champ des vitesses observé en chaque point M de Ω en fonction du temps, c'est-à-dire qu'on donne la fonction vectorielle

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_E(M, t) \quad ; M \in \Omega \ ; t \in \mathbf{R}$$

Les quatre variables (M, t) sont appelées variables d'Euler. La fonction $\mathbf{V}_E(M, t)$ est appelée *description d'Euler* du champ des vitesses.

En un point d'observation M donné, les vitesses qu'on observe au cours du temps sont donc des vitesses de particules différentes. Ce sont les vitesses des particules qui passent par M à ces instants. Les points d'observation M sont donc aussi les *positions actuelles* des particules.

On peut utiliser la description d'Euler pour décrire la valeur de toute grandeur attachée à une particule :

Soit \mathcal{A} une grandeur physique¹⁰ définie pour une particule, la description d'Euler de la grandeur \mathcal{A} est la donnée de la fonction $\mathcal{A}_E(M, t)$.

1.2.3 Equivalence des deux descriptions

Supposons qu'on connaisse la description de Lagrange du mouvement d'un milieu matériel continu, avec comme configuration de référence le domaine *géométrique* Ω_0 . La position actuelle des particules est donnée par :

$$M = f_{t_0, t}(M_0, t)$$

La vitesse d'une particule (identifiée par sa position de référence M_0) est la dérivée par rapport au temps de sa position actuelle :

$$\mathbf{V}_L(M_0, t) = \frac{df_{t_0, t}(M_0, t)}{dt} = \frac{\partial f_{t_0, t}(M_0, t)}{\partial t} \quad (\text{dérivée à } M_0 \text{ constant})$$

$\mathbf{V}_L(M_0, t)$ est la *description de Lagrange* du champ des vitesses. Pour obtenir la description d'Euler de vitesses, il faut donner le champ des vitesses en fonction des positions actuelles.

La transformation $f_{t_0, t}(M_0, t)$ étant inversible, on peut écrire

$$M_0 = f_{t_0, t}^{-1}(M, t)$$

où $f_{t_0, t}^{-1}(M, t) = f_{t, t_0}(M)$. En substituant M_0 par sa valeur, on en déduit la description du champ des vitesses en fonction de leur position actuelle M et de t

$$\frac{\partial f_{t_0, t}(f_{t_0, t}^{-1}(M, t), t)}{\partial t} = \mathbf{V}_E(M, t)$$

ce qui est la description d'Euler du mouvement.

■

Inversement, supposons qu'on connaisse la description d'Euler du mouvement d'un milieu matériel continu sur le domaine géométrique Ω . On connaît donc le champ des vitesses :

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_E(M, t)$$

10. voir note 9

Les positions $M(t)$ sont solution de l'équation différentielle vectorielle suivante (système de 3 équations différentielles scalaires):

$$\frac{d\mathbf{M}(t)}{dt} = \mathbf{V}_E(M, t)$$

avec les conditions initiales $M(t_0) = M_0$. La solution de ce système différentiel avec ses conditions initiales donne les positions M des particules en fonction de M_0 et de t , ce qui est la description de Lagrange.

1.2.4 Comparaison des deux descriptions

Les deux descriptions présentent chacune leur utilité suivant les types de milieux continus qu'on envisage.

Pour les solides déformables (un barreau d'acier par exemple), on préfère souvent la description de Lagrange, car la configuration de référence est facilement identifiable (on choisit par exemple, la position du barreau quand il n'est soumis à aucun effort). On peut identifier facilement les particules en les marquant. De plus, les vitesses pendant la transformation due à l'application d'actions extérieures sont souvent de peu d'intérêt pratique. On s'intéresse plutôt à la position finale après un certain temps lorsque l'application des efforts est achevée.

Pour les fluides (liquides ou gaz, ces notions seront précisées par la suite), on préfère souvent la description d'Euler. En effet, on s'intéresse peu à la position individuelle des particules, par contre, cette description nous donne directement les indications d'un instrument de mesure placé en un certain point d'observation de l'écoulement.

1.2.5 Détermination des trajectoires

On appelle *trajectoire* de la particule P , l'ensemble des positions occupées par la particule P au cours du temps.

- Si le mouvement est décrit par la méthode de Lagrange :
La description de Lagrange donne directement la trajectoire, en effet

$$M = f_{t_0, t}(M_0, t)$$

est l'équation paramétrée par t de la trajectoire de la particule identifiée par M_0 .

- Si le mouvement est décrit par la méthode d'Euler :
La recherche des trajectoires revient à rechercher la description de Lagrange suivant la méthode donnée en 1.2.3 page 9.

1.2.6 Ligne de courant

Soit un instant t fixé. On appelle *lignes de courant à l'instant t* les lignes de champ du champ des vitesses à l'instant t , c'est-à-dire les courbes \mathcal{L} qui sont tangentes au vecteur vitesse à l'instant t donné, en chacun de leur point.

Les lignes de courant sont définies à un instant t donné. A un instant t' , elles sont généralement différentes.

- Si le mouvement est décrit par la méthode d'Euler :
Il découle de la définition des lignes de courant qu'on cherche les courbes \mathcal{L} de point courant M tel que $d\mathbf{M}$ est partout colinéaire à \mathbf{V} . En posant

$$d\mathbf{M} = dx^i \mathbf{e}_i$$

et

$$\mathbf{V}_E(M, t) = \mathbf{V}_E(x^1, x^2, x^3, t) = V_E^i(x^1, x^2, x^3, t) \mathbf{e}_i$$

les lignes de courant \mathcal{L} sont les courbes solution du système différentiel

$$\boxed{\frac{dx^1}{V_E^1(x^1, x^2, x^3, t)} = \frac{dx^2}{V_E^2(x^1, x^2, x^3, t)} = \frac{dx^3}{V_E^3(x^1, x^2, x^3, t)}}$$

où t est un paramètre.

- Si le mouvement est décrit par la méthode de Lagrange :
On cherche la description d'Euler des vitesses suivant la méthode 1.2.3 page 9 et on est ramené au problème précédent.

1.2.7 Tube de courant

Soit \mathcal{C} une courbe géométrique fermée fixe. On appelle *tube de courant* la surface engendrée par toutes les lignes de courant \mathcal{L} s'appuyant sur \mathcal{C} . La forme de ce tube limite l'espace qui peut être occupé par les particules qui sont passées à l'intérieur de la courbe \mathcal{C} . En effet, toute particule à l'intérieur d'un tube de courant à un instant t est à l'intérieur de ce tube à tout instant, car par définition, les vitesses sont tangentes aux frontières du tube et donc, aucune particule ne traverse cette frontière.

1.2.8 Ligne d'émission

Soit N un point géométrique fixe. Chaque particule P a sa trajectoire propre. On considère le faisceau des *trajectoires* passant par N . Autrement dit, on ne s'intéresse qu'aux particules P qui sont passées ou qui vont passer par le point fixe N .

On appelle *ligne d'émission de N à l'instant t* l'ensemble des positions à l'instant t des particules qui ont passé ou qui vont passer par N , c'est-à-dire dont la trajectoire passe par N .

1.2.9 Mouvement stationnaire

On appelle *mouvement stationnaire* ou encore *mouvement permanent*, un mouvement de milieu continu tel que les grandeurs observées par la méthode d'Euler sont indépendantes du temps¹¹. Les mouvements stationnaires sont donc caractérisés par

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{A}_E(M, t)}{\partial t} = 0 \quad \forall \text{ la grandeur physique } \mathcal{A} \text{ observée.}}$$

Il est facile de voir que dans un mouvement stationnaire, les lignes de courant sont les mêmes à tout instant et qu'elles se confondent avec les trajectoires.

¹¹. Autrement dit, si on mesure une grandeur physique en un point d'observation donné, la mesure est constante dans le temps. En un autre point d'observation M' , la mesure est différente, mais toujours constante dans le temps.

1.2.10 Débit volumique

Soit \mathcal{S} une surface fixe traversée par un milieu continu en mouvement. On suppose \mathcal{S} orientable et on appelle \mathbf{n} sa normale unitaire en un point courant N de \mathcal{S} .

On appelle *débit volumique* à travers la surface \mathcal{S} le scalaire q_v défini par

$$q_v = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{V}_E(N, t) \otimes \overline{\mathbf{n}} \, dS ; \quad N \in \mathcal{S}$$

Le débit volumique traversant la surface \mathcal{S} est le flux de \mathbf{V} à travers \mathcal{S} .

La dimension de q_v est $[L]^3[T]^{-1}$. L'unité SI est le m^3/s .

Remarque : Si la surface \mathcal{S} n'est pas fixe, on définit le débit qui la traverse de la même manière, mais en prenant le flux de la vitesse relative \mathbf{W} du milieu par rapport à \mathcal{S} .

1.2.11 Débit massique

Soit \mathcal{S} une surface fixe traversée par un milieu continu en mouvement. On suppose \mathcal{S} orientable et on appelle \mathbf{n} sa normale unitaire en un point courant N de \mathcal{S} .

On appelle *débit massique* à travers la surface \mathcal{S} le scalaire q_m défini par

$$q_m = \int_{\mathcal{S}} \rho_E(N, t) \mathbf{V}_E(N, t) \otimes \overline{\mathbf{n}} \, dS ; \quad N \in \mathcal{S}$$

où ρ est la masse volumique du milieu continu en N .

Le débit massique traversant la surface \mathcal{S} est le flux de la quantité de mouvement $\rho\mathbf{V}$ à travers \mathcal{S} .

La dimension de q_m est $[M][T]^{-1}$. L'unité SI est le kg/s .

Remarque : Si la surface \mathcal{S} n'est pas fixe, on définit le débit massique qui la traverse de la même manière, mais en prenant le flux de la quantité de mouvement relative $\rho\mathbf{W}$ du milieu par rapport à \mathcal{S} .

1.2.12 Dérivée particulaire

Soit un mouvement de milieu continu. A chaque particule P on associe une grandeur physique \mathcal{A} , qui peut être scalaire, vectorielle ou tensorielle. On appelle *dérivée particulaire* de \mathcal{A} la dérivée par rapport au temps de la grandeur \mathcal{A} quand on suit la particule P dans son mouvement, c'est-à-dire à particule constante. On la note $\frac{D\mathcal{A}}{Dt}$.

Suivant la méthode utilisée pour décrire le mouvement, la dérivée particulaire a une expression différente :

- Si le mouvement est décrit par la méthode de Lagrange :
 La description de Lagrange de \mathcal{A} est $\mathcal{A}(P, t) = \mathcal{A}_L(M_0, t)$
 La dérivée particulaire est la dérivée à particule constante, c'est-à-dire à M_0 constant :

$$\frac{D\mathcal{A}}{Dt} = \frac{\partial \mathcal{A}_L(M_0, t)}{\partial t}$$

- Si le mouvement est décrit par la méthode d'Euler :

La description d'Euler de \mathcal{A} est $\mathcal{A}(P, t) = \mathcal{A}_E(M, t)$ où M est un point d'observation.

Soit P une particule.

À l'instant t , la position de P est le point M , et la quantité \mathcal{A} observée en M est $\mathcal{A}_E(M, t)$.

À l'instant t' , la position de P est le point M' , et la quantité \mathcal{A} observée en M' est $\mathcal{A}_E(M', t')$.

La variation de la grandeur \mathcal{A} pour cette particule observée par la méthode d'Euler est donc $\mathcal{A}_E(M', t') - \mathcal{A}_E(M, t)$. La dérivée particulaire de la grandeur \mathcal{A} est donc :

$$\begin{aligned} \frac{D\mathcal{A}}{Dt} &= \lim_{t' \rightarrow t} \frac{\mathcal{A}_E(M', t') - \mathcal{A}_E(M, t)}{t' - t} \\ &= \lim_{t' \rightarrow t} \frac{\mathcal{A}_E(M', t') - \mathcal{A}_E(M, t') + \mathcal{A}_E(M, t') - \mathcal{A}_E(M, t)}{t' - t} \\ &= \lim_{t' \rightarrow t} \frac{\mathcal{A}_E(M', t') - \mathcal{A}_E(M, t')}{t' - t} + \lim_{t' \rightarrow t} \frac{\mathcal{A}_E(M, t') - \mathcal{A}_E(M, t)}{t' - t} \\ &= \lim_{t' \rightarrow t} \frac{\mathbf{grad}\mathcal{A}_E \otimes d\mathbf{M}}{t' - t} + \lim_{t' \rightarrow t} \frac{\mathcal{A}_E(M, t') - \mathcal{A}_E(M, t)}{t' - t} \end{aligned}$$

La dérivée particulaire est donc la dérivée *totale* de $\mathcal{A}_E(M, t)$:

$$\boxed{\frac{D\mathcal{A}}{Dt} = \mathbf{grad}\mathcal{A}_E(M, t) \otimes \mathbf{V}(M, t) + \frac{\partial\mathcal{A}_E(M, t)}{\partial t}}$$

Le terme $\frac{\partial\mathcal{A}_E(M, t)}{\partial t}$ est appelé *dérivée propre* de \mathcal{A} .

Le terme $\mathbf{grad}\mathcal{A}_E(M, t) \otimes \mathbf{V}(M, t)$ est appelé *dérivée convective* de \mathcal{A} .

1.2.13 Accélération

On appelle *accélération de la particule P* la dérivée particulaire de sa vitesse.

- Si le mouvement est décrit par la méthode de Lagrange :

$$\boxed{\Gamma_L(M_0, t) = \frac{\partial\mathbf{V}_L(M_0, t)}{\partial t}}$$

- Si le mouvement est décrit par la méthode d'Euler :

$$\boxed{\Gamma_E(M, t) = \frac{\partial\mathbf{V}_E(M, t)}{\partial t} + \mathbf{grad}\mathbf{V}_E(M, t) \otimes \mathbf{V}_E(M, t)}$$

Le lecteur établira avec profit le détail des composantes de l'accélération en variables de Lagrange et en variables d'Euler dans les bases naturelle et physique des différents systèmes de coordonnées usuels.

Chapitre 2

Déformation d'un milieu continu

Contrairement à la mécanique des solides indéformables, on s'intéresse ici à des milieux où la distance entre les particules n'est pas constante. On introduit dans ce chapitre les outils nécessaires à la description de cette déformation.

2.1 Tenseur des déformations

2.1.1 Définition

Considérons un domaine matériel \mathcal{D} et deux de ses positions Ω_0 et Ω_t aux instants t_0 et t . Soit P une particule de \mathcal{D} et soient p_0 et p_t ses positions respectives aux instants t_0 et t . On appelle $f_{t_0,t}$ la transformation de Ω_0 en Ω_t définie par :

$$f_{t_0,t} : p_0 \in \Omega_0 \longrightarrow p_t = f_{t_0,t}(p_0) \in \Omega_t$$

Pour alléger l'écriture, chaque fois qu'il n'y a pas d'ambiguïté, on note la transformation f sans indices.

Soient une autre particule Q dont la position initiale est $q_0 \in \Omega_0$ et la position finale est $q_t \in \Omega_t$. La particule Q est voisine de P , et on pose $\mathbf{dp}_0 = q_0 - p_0$ et $\mathbf{dp}_t = q_t - p_t$. Le couple ordonné de

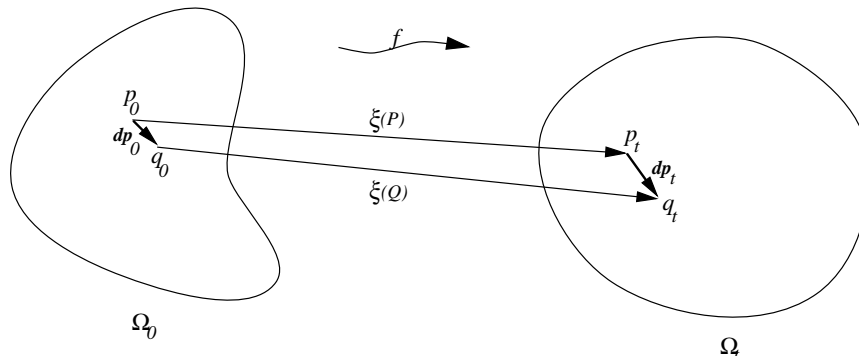


FIG. 2.1 – Deux positions d'un milieu continu

particules (P, Q) est appelé *segment matériel*. \mathbf{dp}_0 est la position initiale de ce segment matériel, et \mathbf{dp}_t est sa position finale.

On suppose la transformation f différentiable presque partout¹, c'est-à-dire qu'on peut écrire

$$d\mathbf{p}_t = \mathbf{grad}f \overline{\otimes} d\mathbf{p}_0$$

où $\mathbf{grad}f$ est appelé *l'opérateur linéaire tangent* à l'application f ou encore le *gradient* de l'application f . Cet opérateur linéaire apparaît comme un endomorphisme de \mathcal{E}_3 . C'est donc un *tenseur du second ordre*.

Pour se conformer aux usages, on utilise la notation $\mathbf{grad}f = \mathbf{F}$. On écrit donc :

$$d\mathbf{p}_t = \mathbf{F} \overline{\otimes} d\mathbf{p}_0 \quad (2.1)$$

Le tenseur du second ordre \mathbf{F} est donc une *description locale de la transformation* autour de la particule P .

La longueur $\|d\mathbf{p}_0\|$ (longueur du segment matériel avant déformation) et la longueur $\|d\mathbf{p}_t\|$ (longueur du segment matériel après déformation) sont :

$$\begin{aligned} \|d\mathbf{p}_0\|^2 &= d\mathbf{p}_0 \overline{\otimes} d\mathbf{p}_0 \\ \|d\mathbf{p}_t\|^2 &= d\mathbf{p}_t \overline{\otimes} d\mathbf{p}_t \\ &= (\mathbf{F} \overline{\otimes} d\mathbf{p}_0) \overline{\otimes} (\mathbf{F} \overline{\otimes} d\mathbf{p}_0) \\ &= d\mathbf{p}_0 \overline{\otimes} \mathbf{F}^T \overline{\otimes} \mathbf{F} \overline{\otimes} d\mathbf{p}_0 \end{aligned}$$

La variation du carré des longueurs est donc :

$$\|d\mathbf{p}_t\|^2 - \|d\mathbf{p}_0\|^2 = d\mathbf{p}_0 \overline{\otimes} \underbrace{(\mathbf{F}^T \overline{\otimes} \mathbf{F} - \mathbf{G})}_{2\mathbf{L}} \overline{\otimes} d\mathbf{p}_0$$

On pose

$$\boxed{\mathbf{L} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \overline{\otimes} \mathbf{F} - \mathbf{G})} \quad (2.2)$$

\mathbf{L} est un tenseur *symétrique*² du second ordre appelé *tenseur des déformations de Green-Lagrange* en P^3 . Si besoin est, on le note $\mathbf{L}_{t_0,t}$ pour bien rappeler qu'il s'agit de la déformation à l'instant t par rapport à la configuration à l'instant t_0 . La notion de déformation n'a de sens qu'entre deux positions (ou entre deux instants) du mouvement du milieu continu.

La variation du carré des longueurs entre d'un segment matériel issu de P est donc donnée par :

$$\boxed{\|d\mathbf{p}_t\|^2 - \|d\mathbf{p}_0\|^2 = 2 d\mathbf{p}_0 \overline{\otimes} \mathbf{L} \overline{\otimes} d\mathbf{p}_0}$$

Comme tout tenseur euclidien réel du second ordre *symétrique*, le tenseur \mathbf{L} a des directions propres *orthogonales* et des valeurs propres *réelles*.

Les directions propres sont appelées *directions principales de déformation*.

2.1.2 Expression de \mathbf{L} en fonction des déplacements

Au lieu d'utiliser la transformation f pour passer de Ω_0 à Ω_t , on préfère souvent introduire la notion de *champ de déplacement*:

On appelle *vecteur déplacement* de la particule P entre les instants t_0 et t le vecteur

$$\boldsymbol{\xi}_{t_0,t}(P) = p_t - p_0$$

1. c'est-à-dire que l'ensemble des points où f n'est pas différentiable est un ensemble de volume nul. On se réserve ainsi la possibilité d'envisager les cavitations (apparition d'un vide interne) et des fissurations.

2. car les tenseurs $\mathbf{F}^T \overline{\otimes} \mathbf{F}$ et \mathbf{G} sont symétriques.

3. \mathbf{L} est différent pour chaque particule. C'est un champ de tenseurs.

Décrire la transformation $f_{t_0,t}$ entre deux instants t_0 et t donnés avec les déplacements, est donc équivalent à donner *le champ de vecteurs déplacements* $\xi_{t_0,t}(P)$ de chaque particule entre ces deux instants. En général, ce champ de déplacements est décrit par la méthode de Lagrange :

$$\xi_L : M_0 \in \Omega_0 \longrightarrow \xi_L(M_0) = p_t - p_0 \in \mathbb{V}$$

La fonction ξ_L est une fonction définie sur Ω_0 et à valeur vectorielle⁴.

La position finale p_t de la particule P à l'instant t est donc :

$$p_t = p_0 + \xi_L(p_0)$$

Si on considère un segment matériel issu de P , en utilisant les mêmes notations que précédemment, on en déduit :

$$\begin{aligned} dp_t &= dp_0 + d(\xi_L(p_0)) \\ &= dp_0 + \text{grad} \xi_L \overline{\otimes} dp_0 \\ &= \underbrace{(G + \text{grad} \xi_L)}_F \overline{\otimes} dp_0 \end{aligned}$$

Le tenseur du second ordre F peut donc s'exprimer donc en fonction du gradient de la description de Lagrange ξ_L du déplacement :

$$\boxed{F = G + \text{grad} \xi_L} \quad (2.3)$$

En utilisant (2.2) page 16, on en déduit une nouvelle expression du tenseur des déformations de Green-Lagrange L en fonction du champ des déplacements :

$$L = F^T \overline{\otimes} F - G = \frac{1}{2} \left[(G + \text{grad} \xi_L)^T \overline{\otimes} (G + \text{grad} \xi_L) - G \right]$$

On obtient après développement :

$$\boxed{L = \frac{1}{2} \left(\text{grad} \xi_L + \text{grad}^T \xi_L + \text{grad}^T \xi_L \overline{\otimes} \text{grad} \xi_L \right)} \quad (2.4)$$

Le champ de déplacements ξ étant plus «maniable» que la transformation f , c'est le plus souvent sous cette forme qu'on calcule L .

Le lecteur est invité à calculer les composantes de L en fonction d'un champ de déplacement ξ dans les systèmes de coordonnées habituels.

2.1.3 Interprétation géométrique du tenseur de déformation

Dans un milieu continu, le tenseurs de déformation en une particule P de position initiale p_0 , permet d'analyser les déformations des segments matériels issus de P :

Variation des longueurs dans une direction unitaire initiale u_0

Considérons un segment matériel de position initiale dp_0 . On note u_0 le vecteur *unitaire* colinéaire à dp_0 :

$$dp_0 = \|dp_0\| u_0$$

4. Contrairement à la fonction f , qui est aussi définie sur Ω_0 mais dont la valeur est un point.

De la définition de \mathbf{L} on tire

$$\begin{aligned} \|\mathbf{dp}_t\|^2 - \|\mathbf{dp}_0\|^2 &= 2 \mathbf{dp}_0 \overline{\mathbf{L}} \mathbf{dp}_0 \\ &= 2 \|\mathbf{dp}_0\|^2 \mathbf{u}_0 \overline{\mathbf{L}} \mathbf{u}_0 \\ \frac{\|\mathbf{dp}_t\|^2 - \|\mathbf{dp}_0\|^2}{\|\mathbf{dp}_0\|^2} &= 2 \mathbf{u}_0 \overline{\mathbf{L}} \mathbf{u}_0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Ainsi, est la *variation relative*⁵ du carré de la longueur d'un segment matériel de direction initiale \mathbf{u}_0 est $2 \mathbf{u}_0 \overline{\mathbf{L}} \mathbf{u}_0$.

$\mathbf{u}_0 \overline{\mathbf{L}} \mathbf{u}_0$ est un scalaire sans dimension car c'est le rapport de deux carrés de longueur.

Il faut bien noter que les variations du carré des longueurs dépendent de la direction initiale \mathbf{u}_0 : pour un autre segment matériel, issu de la même particule P , mais de direction initiale \mathbf{u}'_0 différente, la variation du carré des longueurs est en général différente :

$$\mathbf{u}_0 \overline{\mathbf{L}} \mathbf{u}_0 \neq \mathbf{u}'_0 \overline{\mathbf{L}} \mathbf{u}'_0$$

D'autre part, la direction finale \mathbf{u}_t (c'est-à-dire après déformation) d'un segment matériel est en général différente de la direction initiale :

$$\mathbf{u}_t = \frac{\mathbf{dp}_t}{\|\mathbf{dp}_t\|} = \frac{\mathbf{F} \overline{\mathbf{dp}_0}}{\|\mathbf{F} \overline{\mathbf{dp}_0}\|} = \frac{\mathbf{F} \overline{\mathbf{u}_0}}{\|\mathbf{F} \overline{\mathbf{u}_0}\|} \neq \mathbf{u}_0$$

Cas particulier :

Si on choisit un segment matériel tel que sa position initiale \mathbf{u}_0 soit colinéaire à une direction propre de \mathbf{L} . On note λ la valeur propre associée. On a alors :

$$\mathbf{L} \overline{\mathbf{u}_0} = \lambda \mathbf{u}_0$$

et donc :

$$\mathbf{u}_0 \overline{\mathbf{L}} \mathbf{u}_0 = \lambda \mathbf{u}_0 \overline{\mathbf{u}_0} = \lambda$$

La formule (2.5) montre que dans ce cas :

$$\frac{\|\mathbf{dp}_t\|^2 - \|\mathbf{dp}_0\|^2}{\|\mathbf{dp}_0\|^2} = 2 \lambda$$

Ainsi, si un segment matériel a une direction initiale qui est une direction principale d'allongement, la variation relative du carré de sa longueur est égale à deux fois la valeur propre pour cette direction.

Variation des angles

On considère maintenant deux segments matériels issus de P , dont les directions unitaires initiales sont \mathbf{u}_0 et \mathbf{u}'_0 . On se propose de regarder comment est leur angle après déformation. On pose :

$$\mathbf{dp}_0 = \|\mathbf{dp}_0\| \mathbf{u}_0 \quad ; \quad \mathbf{dp}'_0 = \|\mathbf{dp}'_0\| \mathbf{u}'_0$$

On a vu dans la section précédente qu'à l'instant t ,

$$\mathbf{dp}_t = \mathbf{F} \overline{\mathbf{dp}_0} \quad ; \quad \mathbf{dp}'_t = \mathbf{F} \overline{\mathbf{dp}'_0}$$

5. c'est-à-dire la variation rapportée à la valeur initiale.

Le produit scalaire à l'instant t est donc

$$\begin{aligned} dp_t \otimes dp'_t &= (\mathbf{F} \otimes dp_0) \otimes (\mathbf{F} \otimes dp'_0) \\ &= dp_0 \otimes \mathbf{F}^T \otimes \mathbf{F} \otimes dp'_0 \\ &= dp_0 \otimes (2\mathbf{L} + \mathbf{G}) \otimes dp'_0 \\ &= 2 dp_0 \otimes \mathbf{L} \otimes dp'_0 + dp_0 \otimes dp'_0 \end{aligned}$$

La variation du produit scalaire est donc:

$$dp_t \otimes dp'_t - dp_0 \otimes dp'_0 = 2 \|dp_0\| \|dp'_0\| \mathbf{u}_0 \otimes \mathbf{L} \otimes \mathbf{u}'_0$$

Ainsi,

$$\frac{dp_t \otimes dp'_t - dp_0 \otimes dp'_0}{\|dp_0\| \|dp'_0\|} = 2 \mathbf{u}_0 \otimes \mathbf{L} \otimes \mathbf{u}'_0 \quad (2.6)$$

Cette formule montre qu'en général, le produit scalaire des positions de deux segments matériels change au cours de la déformation.

Cas particulier:

Si on choisit les deux segments matériels tels que leurs positions initiales \mathbf{u}_0 et \mathbf{u}'_0 coïncident avec deux directions propres de \mathbf{L} (\mathbf{u}_0 et \mathbf{u}'_0 sont donc nécessairement orthogonaux), on a

$$\mathbf{L} \otimes \mathbf{u}_0 = \lambda \mathbf{u}_0 \quad \text{et} \quad \mathbf{L} \otimes \mathbf{u}'_0 = \lambda' \mathbf{u}'_0$$

On a donc

$$\mathbf{u}_0 \otimes \mathbf{L} \otimes \mathbf{u}'_0 = \lambda' \mathbf{u}_0 \otimes \mathbf{u}'_0 = 0$$

la formule (2.6) montre que dans ce cas, les deux segments matériels restent perpendiculaires après déformation⁶.

Dilatation volumique

On considère maintenant trois segments matériels issus de P , dont les directions unitaires initiales sont \mathbf{u}_0 , \mathbf{u}'_0 et \mathbf{u}''_0 .

$$dp_0 = \|dp_0\| \mathbf{u}_0 ; \quad dp'_0 = \|dp'_0\| \mathbf{u}'_0 ; \quad dp''_0 = \|dp''_0\| \mathbf{u}''_0$$

On a vu dans la section précédente que

$$dp_t = \mathbf{F} \otimes dp_0 ; \quad dp'_t = \mathbf{F} \otimes dp'_0 ; \quad dp''_t = \mathbf{F} \otimes dp''_0$$

L'élément de volume engendré par les trois segments matériel avant déformation est le produit mixte :

$$dv_0 = \mathbf{E}(dp_0, dp'_0, dp''_0)$$

L'élément de volume engendré par les trois segments matériel après déformation est le produit mixte :

$$\begin{aligned} dv_t &= \mathbf{E}(dp_t, dp'_t, dp''_t) \\ &= \mathbf{E}(\mathbf{F} \otimes dp_0, \mathbf{F} \otimes dp'_0, \mathbf{F} \otimes dp''_0) \\ &= \det(\mathbf{F}) \mathbf{E}(dp_0, dp'_0, dp''_0) \end{aligned}$$

6. Les directions de chaque segment matériel changent, mais elles restent orthogonales entre elles.

Le rapport entre les éléments de volume final et initial est donc

$$\boxed{\frac{dv_t}{dv_0} = \det(\mathbf{F}) = \sqrt{\det(\mathbf{F}^T \bar{\otimes} \mathbf{F})} = \sqrt{\det(2\mathbf{L} + \mathbf{G})}}$$

Il est remarquable de constater que ce rapport est indépendant des directions des trois segments matériels issus de P . On l'appelle *dilatation volumique* au voisinage de la particule P .

On définit aussi la *dilatation volumique relative* :

$$\frac{dv_t - dv_0}{dv_0} = \frac{dv_t}{dv_0} - 1 = \sqrt{\det(2\mathbf{L} + \mathbf{G})} - 1$$

2.2 Tenseur des petites déformations

Il arrive souvent, *en mécanique des solides déformables* que les déformations soient «petites», c'est-à-dire que dans l'expression

$$d\mathbf{p}_t = d\mathbf{p}_0 + \mathbf{grad}\xi \bar{\otimes} d\mathbf{p}_0 \quad (2.7)$$

on ait

$$\|\mathbf{grad}\xi \bar{\otimes} d\mathbf{p}_0\| \ll \|d\mathbf{p}_0\|$$

c'est-à-dire que la correction apportée à $d\mathbf{p}_0$ pendant la transformation soit petite devant la longueur initiale $\|d\mathbf{p}_0\|$.

Cette hypothèse est appelée *hypothèse des petites déformations*.

On a alors

$$\frac{\|\mathbf{grad}\xi \bar{\otimes} d\mathbf{p}_0\|}{\|d\mathbf{p}_0\|} \ll 1 \quad \forall d\mathbf{p}_0 \iff \|\mathbf{grad}\xi\| \ll 1 \iff \sqrt{\mathbf{grad}^T \xi \bar{\otimes} \mathbf{grad}\xi} \ll 1$$

$\mathbf{grad}^T \xi \bar{\otimes} \mathbf{grad}\xi$ est donc un infiniment petit du second ordre.

Dans ce cas, le tenseur de Green-Lagrange devient

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{grad}\xi + \mathbf{grad}^T \xi + \mathbf{grad}^T \xi \bar{\otimes} \mathbf{grad}\xi \right) \approx \frac{1}{2} \left(\mathbf{grad}\xi + \mathbf{grad}^T \xi \right)$$

On pose

$$\boxed{\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{grad}\xi + \mathbf{grad}^T \xi \right) = \text{Sym}(\mathbf{grad}\xi)}$$

$\boldsymbol{\epsilon}$ est appelé *tenseur des petites déformations*. Le tenseur des petites déformations $\boldsymbol{\epsilon}$ est la *partie symétrique* du tenseur $\mathbf{grad}\xi$.

Cette simplification est importante car elle *linéarise* le tenseur de déformation par rapport au déplacement ξ :

Soient ξ_1 et ξ_2 deux champs de déplacement, et soient $\boldsymbol{\epsilon}_{(\xi_1)}$ et $\boldsymbol{\epsilon}_{(\xi_2)}$ les tenseurs des petites déformations associés, on a

$$\boldsymbol{\epsilon}_{(\lambda\xi_1 + \mu\xi_2)} = \lambda\boldsymbol{\epsilon}_{(\xi_1)} + \mu\boldsymbol{\epsilon}_{(\xi_2)}$$

Compte tenu de l'hypothèse des petites déformations, les interprétations géométriques précédentes se simplifient:

Petit allongement relatif dans une direction initiale \mathbf{u}_0

De l'équation (2.7) on tire :

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{dp}_t\|^2 &= \|\mathbf{dp}_0\|^2 + 2 \mathbf{dp}_0 \bar{\otimes} \mathbf{grad} \xi \bar{\otimes} \mathbf{dp}_0 + \|\mathbf{grad} \xi \bar{\otimes} \mathbf{dp}_0\|^2 \\
 &\approx \|\mathbf{dp}_0\|^2 + 2 \mathbf{dp}_0 \bar{\otimes} \text{Sym}(\mathbf{grad} \xi) \bar{\otimes} \mathbf{dp}_0 \\
 &\approx \|\mathbf{dp}_0\|^2 (1 + 2 \mathbf{u}_0 \bar{\otimes} \epsilon \bar{\otimes} \mathbf{u}_0) \\
 \|\mathbf{dp}_t\| &\approx \|\mathbf{dp}_0\| (1 + 2 \mathbf{u}_0 \bar{\otimes} \epsilon \bar{\otimes} \mathbf{u}_0)^{\frac{1}{2}} \\
 &\approx \|\mathbf{dp}_0\| (1 + \mathbf{u}_0 \bar{\otimes} \epsilon \bar{\otimes} \mathbf{u}_0) \\
 \|\mathbf{dp}_t\| - \|\mathbf{dp}_0\| &\approx \|\mathbf{dp}_0\| \mathbf{u}_0 \bar{\otimes} \epsilon \bar{\otimes} \mathbf{u}_0
 \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\boxed{\frac{\|\mathbf{dp}_t\| - \|\mathbf{dp}_0\|}{\|\mathbf{dp}_0\|} = \mathbf{u}_0 \bar{\otimes} \epsilon \bar{\otimes} \mathbf{u}_0}$$

Dans une petite déformation, la variation relative de la longueur⁷, d'un segment matériel de direction initiale \mathbf{u}_0 , a pour valeur $\mathbf{u}_0 \bar{\otimes} \epsilon \bar{\otimes} \mathbf{u}_0$. Cette quantité est appelée *allongement relatif dans la direction initiale \mathbf{u}_0* .

Petite variation des produits scalaires

De l'équation (2.7) on tire :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{dp}_t \bar{\otimes} \mathbf{dp}'_t &= (\mathbf{dp}_0 + \mathbf{grad} \xi \bar{\otimes} \mathbf{dp}_0) \bar{\otimes} (\mathbf{dp}'_0 + \mathbf{grad} \xi \bar{\otimes} \mathbf{dp}'_0) \\
 &\approx \mathbf{dp}_0 \bar{\otimes} \mathbf{dp}'_0 + \mathbf{dp}_0 \bar{\otimes} \mathbf{grad} \xi \bar{\otimes} \mathbf{dp}'_0 + \mathbf{dp}'_0 \bar{\otimes} \mathbf{grad} \xi \bar{\otimes} \mathbf{dp}_0 \\
 &\approx \mathbf{dp}_0 \bar{\otimes} \mathbf{dp}'_0 + \mathbf{dp}_0 \bar{\otimes} \mathbf{grad} \xi \bar{\otimes} \mathbf{dp}'_0 + \mathbf{dp}'_0 \bar{\otimes} \mathbf{grad}^T \xi \bar{\otimes} \mathbf{dp}_0 \\
 &\approx \mathbf{dp}_0 \bar{\otimes} \mathbf{dp}'_0 + 2 \mathbf{dp}_0 \bar{\otimes} \text{Sym}(\mathbf{grad} \xi) \bar{\otimes} \mathbf{dp}'_0 \\
 \mathbf{dp}_t \bar{\otimes} \mathbf{dp}'_t - \mathbf{dp}_0 \bar{\otimes} \mathbf{dp}'_0 &\approx 2 \|\mathbf{dp}_0\| \|\mathbf{dp}'_0\| \mathbf{u}_0 \bar{\otimes} \epsilon \bar{\otimes} \mathbf{u}'_0
 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\boxed{\frac{\mathbf{dp}_t \bar{\otimes} \mathbf{dp}'_t - \mathbf{dp}_0 \bar{\otimes} \mathbf{dp}'_0}{\|\mathbf{dp}_0\| \|\mathbf{dp}'_0\|} = 2 \mathbf{u}_0 \bar{\otimes} \epsilon \bar{\otimes} \mathbf{u}'_0}$$

Petite variation de volume

La dilatation volumique en fonction de ϵ devient :

$$\frac{dv_t}{dv_0} \approx \sqrt{\det(2\epsilon + \mathbf{G})}$$

Le lecteur pourra vérifier⁸ que

$$\det(2\epsilon + \mathbf{G}) = 1 + 2 I_1 + 4 I_2 + 8 I_3$$

où I_1 , I_2 et I_3 sont les trois invariants de ϵ .

Quand les déformations sont petites, I_2 est un infiniment petit du second ordre et I_3 un infiniment petit du troisième ordre. Il reste donc :

$$\det(2\epsilon + \mathbf{G}) \approx 1 + 2 \text{Tr} \epsilon \implies \sqrt{\det(2\epsilon + \mathbf{G})} \approx 1 + \text{Tr} \epsilon$$

Finalement, en petites déformations, la dilatation volumique est

$$\boxed{\frac{dv_t}{dv_0} \approx 1 + \text{Tr} \epsilon}$$

7. et non plus des carrés des longueurs comme précédemment.

8. Le calcul est assez fastidieux, mais se vérifie aisément dans un logiciel de calcul formel.

La dilatation volumique *relative* est

$$\boxed{\frac{dv_t - dv_0}{dv_0} = \text{Tr}\epsilon}$$

Allongements relatifs principaux et directions principales d'allongement

Comme tout tenseur symétrique réel du second ordre, le tenseur des petites déformations ϵ a trois valeurs propres réelles $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ (éventuellement confondues) et trois directions propres orthogonales.

Les directions propres sont appelés *directions principales d'allongement* et les valeurs propres sont appelés *allongement relatifs principaux*.

Comme pour le tenseur \mathbf{L} , si un segment matériel a une direction initiale colinéaire à une direction propre de ϵ , son allongement relatif est la valeur propre de ϵ associée à cette direction propre. De même, si deux segments matériels sont colinéaires à deux directions propres de ϵ , ils restent orthogonaux après déformation.

2.3 Tenseur des taux de déformation

Alors que pour le tenseur de déformation, on s'intéressait aux déformations à l'instant t mesurées par rapport à la configuration initiale, on va maintenant étudier le champ des *vitesses* à l'instant t .

2.3.1 Définition

Soit $\mathbf{V}_E(p_t, t)$ la *description d'Euler* du champ des vitesses. Le champ \mathbf{V}_E est donc défini sur le domaine géométrique Ω_t . Le milieu étant continu, ce champ est différentiable au voisinage de p_t , on peut donc écrire:

$$d\mathbf{V} = \text{grad}\mathbf{V}_E \otimes dp_t$$

En décomposant $\text{grad}\mathbf{V}_E$ en parties symétrique et antisymétrique, on obtient:

$$\text{grad}\mathbf{V}_E = \mathbf{D} + \mathbf{W}$$

où

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \left(\text{grad}\mathbf{V}_E + \text{grad}^T\mathbf{V}_E \right) \text{ et } \mathbf{W} = \frac{1}{2} \left(\text{grad}\mathbf{V}_E - \text{grad}^T\mathbf{V}_E \right)$$

et donc

$$d\mathbf{V}_E = \underbrace{\mathbf{D} \otimes dp_t}_{d\mathbf{V}_1} + \underbrace{\mathbf{W} \otimes dp_t}_{d\mathbf{V}_2}$$

On montre dans la démonstration qui suit, que $d\mathbf{V}_2$ est caractéristique d'un champ de vitesse de solide indéformable. La partie restante $d\mathbf{V}_1$ est donc la partie déformante de la différentielle du champ de vitesse.

Le tenseur symétrique \mathbf{D} est appelé le *tenseur des taux de déformation* (ou encore *tenseur des vitesses de déformation*). C'est la partie symétrique de $\text{grad}\mathbf{V}_E$:

$$\boxed{\mathbf{D} = \frac{1}{2} \left(\text{grad}\mathbf{V}_E + \text{grad}^T\mathbf{V}_E \right)}$$

Le tenseur antisymétrique \mathbf{W} est appelé le *tenseur des taux de rotation* (ou aussi *tenseur des vitesses de rotation*). C'est la partie antisymétrique de \mathbf{gradV}_E :

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{gradV}_E - \mathbf{grad}^T \mathbf{V}_E \right)$$

Démonstration:

Le champ des vitesses d'un solide S est caractérisé par

$$\mathbf{V}(M') = \mathbf{V}(M) + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{MM}' \quad \forall \{M, M'\} \in S$$

où $\boldsymbol{\omega}$ est le vecteur vitesse de rotation de S .

Appliquée aux points p_t et $p_t + d\mathbf{p}_t$, on obtient:

$$d\mathbf{V} = \boldsymbol{\omega} \wedge d\mathbf{p}_t$$

Or l'opérateur

$$(\boldsymbol{\omega} \wedge) : d\mathbf{p}_t \in \mathcal{E}_3 \longrightarrow d\mathbf{V} = \boldsymbol{\omega} \wedge d\mathbf{p}_t \in \mathcal{E}_3$$

est un opérateur antisymétrique. Le gradient du champ des vitesses d'un solide indéformable est donc un tenseur antisymétrique.

Inversement le lecteur montrera facilement qu'à tout tenseur antisymétrique \mathbf{W} on peut associer un vecteur unique $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \overline{\otimes} \mathbf{W}$ ⁹ défini par

$$\mathbf{W} : \mathbf{u} \longrightarrow \mathbf{W} \overline{\otimes} \mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u} \quad \forall \text{le vecteur } \mathbf{u}$$

Donc, si le gradient d'un champ de vitesses est un tenseur antisymétrique \mathbf{W} , on a

$$d\mathbf{V} = \mathbf{W} \overline{\otimes} d\mathbf{p}_t = \boldsymbol{\omega} \wedge d\mathbf{p}_t$$

ce qui signifie que si le gradient du champ des vitesses est antisymétrique, alors le champ des vitesses est un champ de vitesses de solide indéformable. $d\mathbf{V}_2 = \mathbf{W} \overline{\otimes} d\mathbf{p}_t$ est donc la différentielle d'un champ de vitesse non déformant.

2.3.2 Taux de dilatation volumique

L'élément de volume engendré par trois segments matériels après déformation (voir 2.1.3 page 19) est :

$$dv_t = \mathbf{E} (d\mathbf{p}_t, d\mathbf{p}'_t, d\mathbf{p}''_t)$$

En dérivant cette expression par rapport à t , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} dv_t &= \mathbf{E} \left(\frac{D}{Dt} d\mathbf{p}_t, d\mathbf{p}'_t, d\mathbf{p}''_t \right) + \mathbf{E} \left(d\mathbf{p}_t, \frac{D}{Dt} d\mathbf{p}'_t, d\mathbf{p}''_t \right) + \mathbf{E} \left(d\mathbf{p}_t, d\mathbf{p}'_t, \frac{D}{Dt} d\mathbf{p}''_t \right) \\ &= \mathbf{E} (\mathbf{gradV}_E \overline{\otimes} d\mathbf{p}_t, d\mathbf{p}'_t, d\mathbf{p}''_t) + \mathbf{E} (d\mathbf{p}_t, \mathbf{gradV}_E \overline{\otimes} d\mathbf{p}'_t, d\mathbf{p}''_t) + \mathbf{E} (d\mathbf{p}_t, d\mathbf{p}'_t, \mathbf{gradV}_E \overline{\otimes} d\mathbf{p}''_t) \\ &= \text{Tr}(\mathbf{gradV}_E) \mathbf{E} (d\mathbf{p}_t, d\mathbf{p}'_t, d\mathbf{p}''_t) \\ &= \text{Tr}(\mathbf{gradV}_E) dv_t \end{aligned}$$

9. On l'appelle *vecteur adjoint* au tenseur antisymétrique du second ordre \mathbf{W}

On en déduit :

$$\boxed{\frac{D}{Dt} \frac{dv_t}{dv_t} = \text{Tr} \mathbf{D}}$$

$\frac{D}{Dt} \frac{dv_t}{dv_t}$ est appelé *taux de dilatation volumique*. Sa valeur est la trace du tenseur des taux de déformation.

On peut aussi l'exprimer en fonction de la description d'Euler des vitesses :

$$\text{Tr} \mathbf{D} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left(\mathbf{grad} \mathbf{V}_E + \mathbf{grad}^T \mathbf{V}_E \right) = \text{Tr} \mathbf{grad} \mathbf{V}_E = \text{div} \mathbf{V}_E$$

En particulier, pour un mouvement de fluide incompressible (un liquide), le taux de dilatation volumique est nul et le champ des vitesses \mathbf{V}_E est nécessairement tel que $\text{div} \mathbf{V}_E = 0$.

2.4 Conditions de compatibilité de \mathbf{D} (et de ϵ)

On a vu que la donnée d'un champ de vitesses \mathbf{V}_E (3 composantes) permettait de définir un tenseur des taux de déformation \mathbf{D} symétrique (6 composantes). Si on se donne un tenseur symétrique arbitraire, il faut des relations entre ses composantes pour qu'il puisse être un tenseur des taux de déformation. Ces relations sont appelées *conditions de compatibilité* ou encore *conditions d'intégrabilité* du tenseur des taux de déformation.

Pour établir cette démonstration, on utilise la propriété suivante : Si \mathbf{T} est un champ de tenseurs du second ordre, et \mathbf{X} un champ de vecteurs, alors

$$\mathbf{rot} \mathbf{T} = 0 \iff \exists \mathbf{X} \text{ tel que } \mathbf{T} = \mathbf{grad} \mathbf{X}$$

Soit \mathbf{D} un tenseur des taux de déformation. Il s'écrit alors nécessairement :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{grad} \mathbf{V}_E + \mathbf{grad}^T \mathbf{V}_E \right)$$

Le rotationnel de \mathbf{D} est :

$$\mathbf{rot} \mathbf{D} = \frac{1}{2} \mathbf{rot} \mathbf{grad} \mathbf{V}_E + \frac{1}{2} \mathbf{rot} \mathbf{grad}^T \mathbf{V}_E$$

Puisque $\mathbf{rot} \mathbf{grad} \mathbf{V}_E = \mathbf{0}$, il reste :

$$\mathbf{rot} \mathbf{D} = \frac{1}{2} \mathbf{rot} \mathbf{grad}^T \mathbf{V}_E$$

(on assure ainsi que le premier terme de \mathbf{D} est un gradient).

En utilisant l'identité $\mathbf{rot} \mathbf{grad}^t \mathbf{V}_E = \mathbf{grad}^t \mathbf{rot} \mathbf{V}_E$, il vient :

$$\mathbf{rot}^T \mathbf{D} = \frac{1}{2} \mathbf{grad} \mathbf{rot} \mathbf{V}_E$$

$\mathbf{rot}^T \mathbf{D}$ est un champ de gradient, son rotationnel est donc nul :

$$\boxed{\mathbf{rot} \mathbf{rot}^T \mathbf{D} = \mathbf{0}}$$

Cette condition est la *condition nécessaire* pour qu'un tenseur du second ordre soit la partie symétrique du gradient d'un vecteur.

Réciproquement, soit \mathbf{D} un tenseur de vitesses de déformation satisfaisant à la condition précédente.

La section suivante 2.5 page 25 montre qu'elle est aussi une *condition suffisante*, car on y montre que si on se donne un tenseur symétrique \mathbf{D} respectant cette condition, on peut trouver des champs de vitesses dont le tenseur des taux de déformation est \mathbf{D} .

Cette relation tensorielle du second ordre, implique apparemment 9 relations. En fait, il n'y en a que 6, car $\mathbf{rot rot}^T \mathbf{D}$ est un tenseur symétrique¹⁰.

On laisse le soin au lecteur de vérifier que ces 6 équations sont équivalentes aux 6 équations suivantes¹¹:

$$\boxed{\mathbf{grad div D} + \mathbf{grad}^T \mathbf{div D} - \mathbf{grad grad Tr D} - \Delta \mathbf{D} = \mathbf{0}}$$

Cette dernière forme est celle la plus souvent présentée dans les cours de mécanique des milieux continus car elle évite d'avoir à définir le rotationnel d'un tenseur du second ordre.

2.4.1 Conditions de compatibilité de ϵ

De même que le tenseur des taux de déformation est la partie symétrique du gradient du champ des vitesses, le tenseur des petites déformations ϵ est la partie symétrique du gradient du champ des déplacements. Les conditions de compatibilité de ϵ sont donc formellement les mêmes, il suffit de remplacer \mathbf{V} par $\boldsymbol{\xi}$. Elles sont donc:

$$\boxed{\mathbf{rot rot}^T \epsilon = \mathbf{0}}$$

ou encore

$$\boxed{\mathbf{grad div} \epsilon + \mathbf{grad}^T \mathbf{div} \epsilon - \mathbf{grad grad Tr} \epsilon - \Delta \epsilon = \mathbf{0}}$$

2.5 Intégration de \mathbf{D} et ϵ

Connaissant \mathbf{D} , on se propose de chercher un champ \mathbf{V} tel que $\mathbf{D} = \text{Sym grad V}$.

On commence par chercher le tenseur antisymétrique \mathbf{W} . On a montré dans les équations de compatibilité que

$$\mathbf{rot}^T \mathbf{D} = \frac{1}{2} \mathbf{grad rot V}$$

Or,

$$\mathbf{rot V} = -\mathbf{grad V} \overline{\otimes} \mathbf{E} = -(\mathbf{D} + \mathbf{W}) \overline{\otimes} \mathbf{E} = -\mathbf{W} \overline{\otimes} \mathbf{E}$$

On a donc

$$\mathbf{rot}^T \mathbf{D} = -\frac{1}{2} \mathbf{grad} (\mathbf{W} \overline{\otimes} \mathbf{E}) = -\frac{1}{2} \mathbf{E} \overline{\otimes} \mathbf{grad W}$$

et donc:

$$\mathbf{E} \overline{\otimes} \mathbf{rot}^T \mathbf{D} = -\frac{1}{2} \mathbf{E} \overline{\otimes} (\mathbf{E} \overline{\otimes} \mathbf{grad W}) = -\mathbf{grad W}$$

10. On laisse le soin au lecteur de vérifier cette symétrie.

11. Indication: si on pose:

$\mathbf{A} = \mathbf{rot rot}^T \mathbf{D}$ et $\mathbf{B} = \mathbf{grad div D} + \mathbf{grad}^T \mathbf{div D} - \mathbf{grad grad Tr D} - \Delta \mathbf{D}$,
on a la relation: $\mathbf{B} = \mathbf{A} - (\text{Tr A}) \mathbf{G}$.

Le tenseur antisymétrique des taux de rotation \mathbf{W} est donc déterminé par les équations différentielles aux dérivées partielles:¹²:

$$\boxed{\mathbf{grad}\mathbf{W} = -\mathbf{E} \overline{\otimes} \mathbf{rot}^t \mathbf{D}}$$

(\mathbf{W} étant antisymétrique, il n'y a à déterminer que les 3 termes non diagonaux.)

Il est à noter que le champ \mathbf{W} , obtenu par intégration d'équations aux dérivées partielles, n'est pas complètement déterminé : il contient en général des fonctions et des constantes indéterminées. Autrement dit, la solution n'est pas unique.

Ayant calculé \mathbf{W} , on peut maintenant chercher le champ de vitesses \mathbf{V} dont le gradient est :

$$\boxed{\mathbf{grad}\mathbf{V} = \mathbf{D} + \mathbf{W}}$$

La solution de cette équation différentielle tensorielle (9 équations différentielles aux dérivées partielles) donne le champ de vitesses \mathbf{V} , qui lui non plus n'est pas unique et contient de nouvelles fonctions et constantes indéterminées.

Ainsi, la donnée d'un tenseur des taux de déformation conduit à une famille de champs de vitesses possibles. Connaissant un champ de vitesse solution, il est évident que si on lui ajoute (vectoriellement) un champ de vitesse de solide le tenseur des taux de déformation de la somme sera le même. ■

Puisque le tenseur des petites déformations ϵ est aussi la partie symétrique d'un gradient (celui des déplacements):

$$\epsilon = \frac{1}{2} \left(\mathbf{grad}\xi + \mathbf{grad}^T \xi \right)$$

la méthode d'intégration est formellement la même.

On décompose $\mathbf{grad}\xi$ en parties symétriques et antisymétrique:

$$\mathbf{grad}\xi = \epsilon + \Omega$$

Le tenseur antisymétrique Ω est appelé *tenseur des petites rotations*.

On procède donc de la même manière pour chercher le champ de déplacement ξ quand on connaît le tenseur des petites déformations ϵ :

- On cherche d'abord le tenseur Ω solution de l'équation $\mathbf{grad}\Omega = -\mathbf{E} \overline{\otimes} \mathbf{rot}^T \epsilon$
- puis on cherche le champ ξ solution de l'équation différentielle $\mathbf{grad}\xi = \epsilon + \Omega$

Là encore, le champ des déplacements ξ n'est pas unique. Les indéterminées s'interprètent comme *un champ de déplacement de solide* (3 petites rotations et trois déplacements). En effet, à tout champ de déplacement, on peut ajouter un champ de déplacement de solide sans changer les déformations. L'intégration d'un champ de déformation est donc déterminée à *un champ de déplacement de solide près*.

12. $\mathbf{grad}\mathbf{W}$ est un tenseur du troisième ordre. Il y a donc apparemment 27 équations. Cependant, \mathbf{W} est antisymétrique. Il n'y a donc que trois composantes inconnues. Par exemple: w_{12} , w_{23} et w_{31} . Parmi ces 27 équations, il n'y a donc en fait que 9 équations aux dérivées partielles indépendantes.

Chapitre 3

Efforts dans les milieux continus

L'objectif de ce chapitre est de construire les outils nécessaires à la description des efforts extérieurs et intérieurs à un milieu continu.

3.1 Notion de point d'application

En mécanique, toutes les actions mécaniques sont représentées par des *torseurs*.

En mécanique des solides *indéformables*, on introduit la notion de *torseurs équivalents* : les deux torseurs

$$\mathcal{T} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{R} \\ \mathbf{M} \end{array} \right\}_P \text{ et } \mathcal{T}' = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{R} \\ \mathbf{M}' = \mathbf{M} + \mathbf{P}'\mathbf{P} \wedge \mathbf{R} \end{array} \right\}_{P'}$$

sont dits équivalents en ce sens que leur effet mécanique sur un solide *indéformable* est le même. P et P' ont été appelés *points de définition* des torseurs \mathcal{T} et \mathcal{T}' .

En mécanique des milieux continus *déformables*, on introduit une caractéristique supplémentaire à la notion d'action mécanique :

Une action mécanique est définie par un torseur et un point d'application.

Ce nouveau concept est nécessaire, car dans un milieu déformable, le mouvement et la déformation du milieu sont *différents* si on applique en P la force \mathbf{R} et le moment \mathbf{M} ou si on applique en P' la force \mathbf{R} et le moment \mathbf{M}' .

Cependant, l'algèbre habituelle sur les torseurs est toujours valable, et pour additionner deux torseurs, il faut toujours additionner leurs composantes ramenées au même point de définition¹.

3.2 Actions extérieures à un milieu continu

3.2.1 Intérieur et extérieur

En mécanique (des milieux continus ou non), on applique les principes fondamentaux à un domaine \mathcal{D} qu'on peut choisir arbitrairement. Quand on choisit un domaine, on distingue par la pensée la matière qui se trouve à l'intérieur et celle qui se trouve à l'extérieur du domaine.

1. On le fera notamment quand on appliquera le principe fondamental de la mécanique, qui invoque des sommes de torseurs.

Choisir un domaine, c'est définir une frontière (une surface fermée virtuelle). On parlera donc du *domaine* \mathcal{D} qui désigne en fait son intérieur, et de *l'extérieur du domaine*, qui est en fait le reste de l'univers, qu'on notera $\overline{\mathcal{D}}$. La frontière de \mathcal{D} est notée $\partial\mathcal{D}$.

Le choix du domaine dépend que des résultats qu'on cherche à obtenir². Une fois le domaine défini complètement et sans ambiguïté, on peut clairement recenser les actions mécaniques de l'extérieur $\overline{\mathcal{D}}$ sur le domaine \mathcal{D} .

Le domaine choisi peut être matériel³ ou géométrique⁴. Pour fixer les idées, dans ce chapitre, on utilisera uniquement des domaines matériels⁵.

Soit \mathcal{D} un domaine matériel dans un milieu continu délimité par une surface fermée $\partial\mathcal{D}$ qui définit sa frontière.

Une partie de l'extérieur peut être la continuation du même milieu continu (la frontière est tracée dans le milieu continu⁶) ou la frontière peut avoir une signification plus physique (changement de matériau⁷ par exemple).

3.2.2 Classification des efforts extérieurs

Les actions mécaniques de l'extérieur $\overline{\mathcal{D}}$ sur le domaine \mathcal{D} peuvent être de différentes natures :

Les actions extérieures à distance : Le milieu extérieur $\overline{\mathcal{D}}$ exerce des actions mécaniques à distance sur les particules P qui se trouvent à l'intérieur du domaine. On les modélise par des *champs de torseurs massiques*⁸, ou parfois par des *champs de torseurs volumiques*⁹.

Quelques exemples d'actions mécaniques à distance de $\overline{\mathcal{D}}$ sur \mathcal{D} :

les actions de gravitation : La matière de $\overline{\mathcal{D}}$ exerce sur les particules P de \mathcal{D} des forces gravitationnelles. On sait que les actions gravitationnelles entre deux particules¹⁰ sont des actions mécaniques sans moment. On représente donc les actions gravitationnelles de $\overline{\mathcal{D}}$ sur \mathcal{D} par un *champ de forces massiques* (champ de vecteurs défini sur \mathcal{D}) $\mathbf{f}(P)$ qui représente la totalité des actions massiques de la matière de $\overline{\mathcal{D}}$ sur une particule P de \mathcal{D} . En général, ce champ n'est pas uniforme et sa valeur dépend du choix du domaine \mathcal{D} ¹¹.

Dans la pratique, on considère souvent que les seules forces de gravitation notables de $\overline{\mathcal{D}}$ sur les particules P de \mathcal{D} sont celles dues à la gravitation terrestre¹², considérant que les autres masses extérieures à \mathcal{D} ont une action gravitationnelle négligeable devant

2. Si le choix d'un domaine est souvent assez évident en mécanique des solides déformables, il l'est parfois moins en mécanique des fluides.

3. c'est-à-dire défini par les particules qui le constituent. La forme du domaine évolue avec le mouvement.

4. c'est-à-dire une portion de l'espace traversé par le milieu continu en mouvement.

5. Ce choix n'est pas essentiel. On peut aussi bien appliquer le principe fondamental de la mécanique aux deux types de domaines. Le lecteur est invité à reprendre la lecture de ce chapitre en considérant \mathcal{D} comme un domaine géométrique.

6. Il arrive souvent qu'on ne s'intéresse qu'à une partie d'un écoulement ou à une partie de solide déformable

7. Par exemple, pour un fluide, la frontière peut être la surface de contact avec une paroi d'un tube ou d'un réservoir ou la surface libre pour un liquide; pour un solide déformable, la frontière peut être un plan d'appui (une table) ou le plus souvent les limites physiques du solide.

8. La résultante est une force par unité de masse, donc homogène à une accélération (unité SI: $N Kg^{-1} = m s^{-2}$), et le moment en P est un moment par unité de masse (unité SI: $m N Kg^{-1} = m^2 s^{-2}$)

9. La résultante est une force par unité de volume (unité SI: $N m^{-3}$) et le moment en P est un moment par unité de volume (unité SI: $N m^{-2}$)

10. l'une dans \mathcal{D} , l'autre dans $\overline{\mathcal{D}}$

11. Si on change la définition de \mathcal{D} , la définition de son extérieur change et donc aussi les actions de l'extérieur sur une particule P de \mathcal{D} .

12. à condition bien sûr que la terre ne fasse pas partie du domaine \mathcal{D} , car dans ce cas la gravitation terrestre ne serait pas un effort extérieur!

celle de la terre, soit parce qu'elles sont trop éloignées¹³, soit parce que leur masse est trop faible¹⁴.

Lorsque les dimensions du domaine \mathcal{D} sont petites devant celles de la terre, on réduit le champ de gravitation terrestre (qui est un champ vectoriel central centré au centre de la gravité de la terre) à un champ de forces par unité de masse *uniforme* \mathbf{g} , orienté vers le bas¹⁵, appelé *accélération de la pesanteur*, et dont la norme au voisinage de la surface de la terre est de 9.81 m s^{-2} .¹⁶

les actions magnétiques : Si la matière du domaine \mathcal{D} est sensible aux actions électromagnétiques, elle subit de la part du milieu extérieur $\overline{\mathcal{D}}$ un champ de *torseurs* massique (ou volumique). Chaque particule P du domaine \mathcal{D} est donc soumise à un champ de forces par unité de masse (ou de volume) et à un champ de moments en P par unité de masse (ou de volume). Comme dans le cas des forces gravitationnelles, ce champ n'est en général pas uniforme et dépend de la définition de \mathcal{D} .

En mécanique des milieux continus élémentaire, on n'envisage habituellement pas d'actions à distance magnétiques. La spécialité qui se préoccupe de cette question est souvent appelée *magnétohydrodynamique*¹⁷. Dans la suite de ce cours, les actions à distance seront donc modélisées uniquement par des champs de *forces* massiques ou volumiques, sans champs de moments.

Les actions extérieures de contact : Le milieu extérieur exerce des forces de contact sur la frontière du domaine. Ce sont les forces qui s'opposent à la pénétration matière/matière (deux particules ne peuvent se situer au même point), ou au contraire qui assurent la cohésion du milieu (elles s'opposent à la dissociation du milieu)¹⁸. Si les forces s'opposent à la décohésion, on les appelle forces de *traction*, si ces forces s'opposent à l'interpénétration de la matière, on les appelle forces de *compression*.

En mécanique des milieux continus, les actions de contact sur la frontière $\partial\mathcal{D}$ du domaine \mathcal{D} sont modélisées par des *champs de torseurs surfaciques*, c'est-à-dire des champs de torseurs par unité de surface, qui s'exercent en chaque point la frontière. Là encore, comme dans les actions à distance, on supposera le plus souvent que les actions de contact de l'extérieur se réduisent à des champs de *forces* (champs de vecteurs définis sur $\partial\mathcal{D}$) par unité de surface (pas de moment par unité de surface). L'unité S.I. est donc le N m^{-2} , c'est-à-dire le *Pascal*.

Par exemple, si $\partial\mathcal{D}$ sépare un liquide d'une paroi (le liquide et la paroi sont deux milieux continus), l'action de contact de la paroi sur le liquide est un champ de forces surfaciques. Si le domaine \mathcal{D} est du côté liquide, l'action de la paroi sur le liquide est une action de contact extérieure. Si le domaine \mathcal{D} est du côté paroi, c'est l'action du liquide sur la paroi¹⁹ qui est l'action de contact extérieure.

13. les astres par exemple.

14. la matière voisine de \mathcal{D} , par exemple des parois ou l'immeuble d'à côté.

15. c'est-à-dire vers la terre

16. Dans beaucoup d'ouvrages de mécanique des milieux continus, le champ de forces massiques à distance \mathbf{f} est présenté comme un champ de forces par unité de volume \mathbf{f}_v et non par unité de masse. La relation entre les deux est évidemment $\mathbf{f}_v = \rho \mathbf{f}$. Dans beaucoup d'applications où seule la pesanteur est prise en compte, on affirme que le champ des forces de volume est uniforme. En fait, les lois de la gravitation montrent que c'est le champ des forces massiques qui est uniforme. Le champ des forces volumiques n'est uniforme que si on peut considérer que la masse volumique ρ est aussi uniforme, ce qui est rarement le cas en mécanique des milieux continus. Cette approximation est correcte pour des liquides (peu ou pas dilatables), elle est assez grossière pour les solides déformables, et elle est difficilement admissible pour les gaz.

17. On devrait l'appeler mécanique des milieux continus magnétiques, mais les applications sont le plus souvent orientées vers l'étude des écoulements de liquides soumis à des champs magnétiques.

18. Bien que la mécanique des milieux continus soit par essence inapte à représenter correctement la physique au niveau moléculaire, on peut imaginer que les actions surfaciques de contact modélisent les actions mécaniques à court rayon d'action entre les «molécules» voisines de part et d'autre de la frontière.

19. qui est évidemment le champ opposé à l'action de la paroi sur le liquide.

Les forces d'inertie : Lorsqu'on écrit le principe fondamental de la mécanique dans un référentiel non galiléen²⁰, on sait que l'écriture du principe fondamental est encore valable à condition d'ajouter aux champs de forces massiques à distance précédentes, des champs de forces massiques à distance *fictifs* appelés *champ de forces d'inertie*. On a l'habitude de les séparer en la somme de deux champs : les forces d'inertie d'entraînement²¹ et les forces d'inertie de Coriolis²². Consulter un cours de mécanique élémentaire pour une définition plus détaillée de ces deux champs de forces massiques fictifs.

Dans la suite du cours, on ne se souciera plus de savoir si les vitesses et les accélérations dont on parle sont mesurées par rapport à un référentiel galiléen ou non : c'est à l'ingénieur de savoir si le référentiel qu'il utilise peut être considéré comme galiléen ou non. Si ce référentiel n'est pas galiléen, il faut tout simplement ajouter les champs de forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis aux champs de forces à distance. On ne parlera donc plus que de forces à distance, qui contiendront si nécessaire les forces d'inertie.

3.2.3 Torseurs résultants

Comme on le rappellera plus loin, le principe fondamental de la mécanique est une égalité de torseurs, et l'un des membres de l'égalité est le *torseur résultant des forces extérieures*. Comme on vient de le voir précédemment, en mécanique des milieux continus non magnétiques, les actions extérieures sont représentées par :

- des champs *vectoriels* de forces extérieures à distance $\mathbf{f}(M)$ (complétées par les éventuelles forces d'inertie) s'exerçant sur les points M l'intérieur de \mathcal{D} ,
- des champs *vectoriels* de forces extérieures de contact $\mathbf{f}_c(N)$, s'exerçant sur les points N de la frontière de \mathcal{D} .

La résultante d'un champ de forces extérieures à distance $\mathbf{f}(M)$ s'exerçant sur le domaine \mathcal{D} est le vecteur :

$$\mathbf{R}_d = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{f}(M) dm = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{f}(M) \rho(M) dv = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{f}_v(M) dv$$

et son moment résultant en un point O est le vecteur :

$$\mathbf{M}_{dO} = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{OM} \wedge \mathbf{f}(M) dm = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{OM} \wedge \mathbf{f}(M) \rho(M) dv = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{OM} \wedge \mathbf{f}_v(M) dv$$

Bien noter que le *point d'application* des forces à distance est M , et que pour calculer le torseur résultant en O , on a fait la somme de torseurs équivalents *définis* en O ²³.

La résultante d'un champ de forces extérieures de contact $\mathbf{f}_c(N)$ s'exerçant sur $N \in \partial\mathcal{D}$ est le vecteur :

$$\mathbf{R}_c = \int_{\partial\mathcal{D}} \mathbf{f}_c(N) ds$$

et son moment résultant en un point O est le vecteur :

$$\mathbf{M}_{cO} = \int_{\partial\mathcal{D}} \mathbf{ON} \wedge \mathbf{f}_c(N) ds$$

20. c'est-à-dire qu'on observe des vitesses et des accélérations par rapport à un repère en mouvement (non uniforme) par rapport à un galiléen. Ces vitesses et accélérations sont dites *relatives*.

21. qui ne dépendent que du mouvement du référentiel non galiléen par rapport à un référentiel galiléen

22. qui sont de plus fonction du mouvement relatif

23. Si on doit calculer le torseur résultant d'un champ de *torseurs* $\{\mathbf{f}(M), \mathbf{m}(M)\}_M$ définis au point courant $M \in \mathcal{D}$ (et non plus d'un champ de vecteurs), la résultante est inchangée, mais on doit ajouter $\int_{\mathcal{D}} \mathbf{m} dv$ au moment résultant, car $\{\mathbf{f}(M), \mathbf{m}(M)\}_M = \{\mathbf{f}(M), \mathbf{OM} \wedge \mathbf{f}(M) + \mathbf{m}(M)\}_O$

Bien noter que le *point d'application* des forces de contact est N , et que pour calculer le torseur résultant en O , on a fait la somme de torseurs équivalents définis en O ²⁴.

Le torseur résultant des efforts extérieurs est la somme de ces deux torseurs :

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{R}_d + \mathbf{R}_c &= \int_{\mathcal{D}} \mathbf{f}(M) dm + \int_{\partial\mathcal{D}} \mathbf{f}_c(N) ds \\ \mathbf{M}_O &= \mathbf{M}_{dO} + \mathbf{M}_{cO} &= \int_{\mathcal{D}} \mathbf{OM} \wedge \mathbf{f}(M) dm + \int_{\partial\mathcal{D}} \mathbf{OM} \wedge \mathbf{f}_c(N) ds \end{aligned}$$

3.3 Actions intérieures à un milieu continu, tenseur des contraintes

3.3.1 Efforts intérieurs, notion de contrainte

Soit \mathcal{D} le domaine matériel étudié. On a défini dans la section précédente les actions extérieures sur \mathcal{D} , c'est-à-dire de $\overline{\mathcal{D}}$ sur \mathcal{D} .

On se propose maintenant de définir les efforts intérieurs à \mathcal{D} . Pour les étudier, on les rend extérieurs de la manière suivante : on considère un sous domaine \mathcal{D}_1 à l'intérieur du domaine \mathcal{D} (voir figure 3.1).

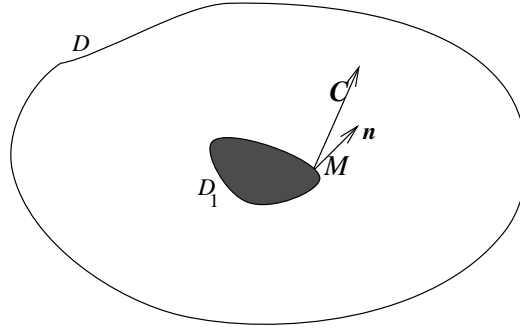


FIG. 3.1 – Contraintes dans un milieu continu

Les efforts extérieurs agissant sur \mathcal{D}_1 sont :

- Les actions à distance de l'extérieur de \mathcal{D}_1 s'exerçant sur les particules de \mathcal{D}_1 . On les note $\mathbf{f}_{\mathcal{D}_1}$. L'extérieur de \mathcal{D}_1 peut être partitionné en $(\mathcal{D} - \mathcal{D}_1) \cup \overline{\mathcal{D}}$. Les actions extérieures à distance ont pour source ces deux parties, et on peut donc écrire :

$$\mathbf{f}_{\mathcal{D}_1} = \mathbf{f}_{\mathcal{D}} + \mathbf{f}_{\mathcal{D} - \mathcal{D}_1}$$

où $\mathbf{f}_{\mathcal{D}}$ représente le champ des actions extérieures à distance de $\overline{\mathcal{D}}$ sur \mathcal{D} (et donc aussi sur $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}$), et où $\mathbf{f}_{\mathcal{D} - \mathcal{D}_1}$ représente le champ des actions extérieures (à \mathcal{D}_1) à distance exercées par $\mathcal{D} - \mathcal{D}_1$ sur \mathcal{D}_1 .

- Les actions de contact sur la frontière de \mathcal{D}_1 ²⁵. On note $\mathbf{n}(M)$ la normale unitaire en M à $\partial\mathcal{D}_1$ et on note $\mathbf{C}(M)$ la densité de force surfacique de contact de $\mathcal{D} - \mathcal{D}_1$ sur \mathcal{D}_1 répartie sur $\partial\mathcal{D}_1$.

24. Si on doit calculer le torseur résultant d'un champ de *torseurs* $\{\mathbf{f}_c(N), \mathbf{m}_c(N)\}_N$ définis au point courant $N \in \partial\mathcal{D}$ (et non plus d'un champ de vecteurs), la résultante est inchangée, mais on doit ajouter $\int_{\partial\mathcal{D}} \mathbf{m}_c dv$ au moment résultant, car $\{\mathbf{f}_c(N), \mathbf{m}_c(N)\}_N = \{\mathbf{f}_c(N), \mathbf{ON} \wedge \mathbf{f}_c(N) + \mathbf{m}_c(N)\}_O$.

25. Il se peut que, contrairement à la figure, \mathcal{D}_1 et \mathcal{D} aient une partie de frontière commune, mais on a toujours $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}$.

On appelle *efforts intérieurs* à \mathcal{D} les actions mécaniques de $\mathcal{D} - \mathcal{D}_1$ sur le domaine \mathcal{D}_1 . Ces efforts intérieurs sont donc *a priori* fonction du choix de \mathcal{D}_1 , et il comprennent :

- des actions à distance (le plus souvent de gravité) des particules de $\mathcal{D} - \mathcal{D}_1$ sur les particules de \mathcal{D}_1 , représentées par le champ de forces massiques $\mathbf{f}_{\mathcal{D}-\mathcal{D}_1}$ défini sur \mathcal{D}_1 ,
- les actions de contact \mathbf{C} de $\mathcal{D} - \mathcal{D}_1$ sur \mathcal{D}_1 représentées par un champ de forces surfaciques $\mathbf{C}(M)$ défini sur $\partial\mathcal{D}_1$.

Le champ de forces surfaciques des *actions intérieures de contact* $\mathbf{C}(M)$, réparti sur la frontière de \mathcal{D}_1 est appelé champ des *vecteurs contraintes* appliquées sur la frontière $\partial\mathcal{D}_1$.

Le champ des *vecteurs contraintes* qui s'applique sur $\partial\mathcal{D}_1$ est donc un champ de forces de contact, c'est-à-dire de forces par unité de surface. Il se mesure en Pascals.

Apparemment, le champ de vecteurs $\mathbf{C}(M)$, défini sur $\partial\mathcal{D}_1$ dépend du choix du sous domaine \mathcal{D}_1 et du point M sur sa frontière. Cependant, le champ $\mathbf{C}(M)$ est un champ de forces de *contact* représentant des actions intermoléculaires à court rayon d'action au voisinage de M . Il n'y a donc aucune raison pour que les actions à courte distance au voisinage de M entre les particules voisines de M de part et d'autre de la frontière $\partial\mathcal{D}_1$ changent en fonction de la forme du reste de la frontière.

Les considérations physiques précédentes nous amènent à poser l'hypothèse suivante :

La contrainte en un point M d'un milieu continu ne dépend que du point M et de la normale extérieure à la frontière $\mathbf{n}(M)$

Autrement dit, si on considère un point M dans un milieu continu, et une «facette»²⁶ orientée par la direction de normale unitaire $\mathbf{n}(M)$ ²⁷, la contrainte (forces de contact par unité de surface) exercée par l'extérieur sur la facette ne dépend que de M et de \mathbf{n} , c'est-à-dire qu'il existe une application σ

$$\sigma : (M, \mathbf{n}) \longrightarrow \mathbf{C} = \sigma(M, \mathbf{n})$$

En un point M d'un milieu continu, la valeur de la contrainte \mathbf{C} est donc *a priori différente* suivant l'orientation des facettes²⁸ qu'on considère.

3.3.2 Existence du tenseur des contraintes

On se propose de montrer maintenant que l'application σ définie précédemment est un opérateur *linéaire* sur son argument \mathbf{n} , c'est-à-dire que pour un point M fixé, la fonction $\sigma(M, \mathbf{n})$ est linéaire en \mathbf{n} . De plus, on montrera que l'opérateur linéaire σ ne dépend que de M , c'est-à-dire que dans un milieu continu, il existe un champ d'opérateurs *sigma*.

\mathbf{C} et \mathbf{n} sont des vecteurs. σ est donc un endomorphisme linéaire de l'espace des vecteurs, c'est-à-dire un tenseur du second ordre.

Définition :

Sous réserve de la démonstration qui suit, on peut donc définir en tout point M d'un milieu continu un tenseur du second ordre appelé *tenseur des contraintes de Cauchy* ou plus simplement *tenseur des contraintes*, tel que la contrainte \mathbf{C} exercée par l'extérieur sur une facette de centre M et de normale \mathbf{n} ²⁹ est donnée par

$$\boxed{\mathbf{C}(M, \mathbf{n}) = \sigma(M) \otimes \mathbf{n}}$$

26. c'est-à-dire l'élément d'aire dS de $\partial\mathcal{D}_1$ autour de M .

27. Une facette possède deux normales unitaires. On en choisit une, ce qui définit un coté extérieur et un coté intérieur, car \mathbf{n} a été défini comme la normale extérieure à $\partial\mathcal{D}_1$.

28. c'est-à-dire la normale unitaire \mathbf{n}

29. On rappelle que l'orientation de \mathbf{n} définit l'extérieur de la facette

Dans un milieu continu, il existe donc un champ de tenseurs des contraintes $\sigma(M)$.

Démonstration de la linéarité de l'application σ :

Considérons un domaine $\mathcal{T} \subset \mathcal{D}$ de forme tétraédrique défini par les sommets M_0, M_1, M_2 et M_3 . Pour simplifier les calculs de géométrie, on choisit le tétraèdre tel que les faces $M_0M_2M_3$, $M_0M_3M_1$ et $M_0M_1M_2$ soient orthogonales. On note M un point courant à l'intérieur de \mathcal{T} . Voir figure 3.2.

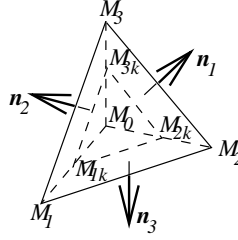


FIG. 3.2 – Un sous domaine tétraédrique

Notations :

la face $M_0M_2M_3$, est d'aire S_1 , de normale extérieure \mathbf{n}_1 au point courant N_1 ,
 la face $M_0M_3M_1$, est d'aire S_2 , de normale extérieure \mathbf{n}_2 au point courant N_2 ,
 la face $M_0M_1M_2$, est d'aire S_3 , de normale extérieure \mathbf{n}_3 au point courant N_3 ,
 la face $M_1M_2M_3$, est d'aire S_0 , de normale extérieure \mathbf{n}_0 au point courant N_0 .

On établit facilement avec un peu de géométrie que pour ce tétraèdre on a :

$$\frac{S_i}{S_0} = -\mathbf{n}_0 \otimes \mathbf{n}_i \quad \forall i \in [1, 2, 3]$$

Les efforts extérieurs qui s'appliquent sur ce domaine sont :

- un champ de forces massiques à distances $\mathbf{f}_{\mathcal{T}}(M)$ (gravitation, forces d'inertie...) défini sur l'intérieur du tétraèdre³⁰
- un champ de forces de contact s'appliquant sur sa frontière (champ de contraintes) qu'on peut détailler ainsi :
 - $\mathbf{C}_1(N_1)$ sur la face $M_0M_2M_3$
 - $\mathbf{C}_2(N_2)$ sur la face $M_0M_3M_1$
 - $\mathbf{C}_3(N_3)$ sur la face $M_0M_1M_2$
 - $\mathbf{C}_0(N_0)$ sur la face $M_1M_2M_3$

En appliquant le principe fondamental de la mécanique au domaine \mathcal{T} , (égalité des résultantes) il vient :

$$\int_{\mathcal{T}} \gamma(M) dm = \int_{\mathcal{T}} \mathbf{f}_{\mathcal{T}}(M) dm + \int_{S_0} \mathbf{C}_0(N_0) ds + \int_{S_1} \mathbf{C}_1(N_1) ds + \int_{S_2} \mathbf{C}_2(N_2) ds + \int_{S_3} \mathbf{C}_3(N_3) ds$$

soit encore :

$$\int_{\mathcal{T}} (\gamma(M) - \mathbf{f}_{\mathcal{T}}(M)) \rho(M) dv = \int_{S_0} \mathbf{C}_0(N_0) ds + \int_{S_1} \mathbf{C}_1(N_1) ds + \int_{S_2} \mathbf{C}_2(N_2) ds + \int_{S_3} \mathbf{C}_3(N_3) ds$$

30. On rappelle que le champ $\mathbf{f}_{\mathcal{T}}(M)$ dépend *a priori* du choix de \mathcal{T} , ce qui justifie son indice.

On définit les valeurs moyennes des champs de chacune de ces intégrales:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{f}} &= \frac{1}{V_{\mathcal{T}}} \int_{\mathcal{T}} \rho(M) (\boldsymbol{\gamma}(M) - \mathbf{f}_{\mathcal{T}}(M)) \, dv \\ \bar{\mathbf{C}}_i &= \frac{1}{S_i} \int_{S_i} \mathbf{C}_i(N_i) \, ds \quad \forall i \in [0, 1, 2, 3]\end{aligned}$$

Le principe fondamental de la mécanique appliqué à \mathcal{T} s'écrit donc encore :

$$\bar{\mathbf{f}} V_{\mathcal{T}} = \bar{\mathbf{C}}_0 S_0 + \sum_{i=1}^3 \bar{\mathbf{C}}_i S_i$$

On applique maintenant une homothétie de centre M_0 et de rapport k au tétraèdre \mathcal{T} . Le tétraèdre obtenu est noté \mathcal{T}_k défini par les points M_0 (invariant dans l'homothétie), M_{1k} , M_{2k} et M_{3k} (voir figure 3.2 page 33). Dans cette transformation géométrique, les aires sont multipliées par k^2 et les volumes par k^3 . Les faces de \mathcal{T}_k sont parallèles à celles de \mathcal{T} , c'est-à-dire que leurs normales unitaires sont invariantes.

Le principe fondamental de la mécanique appliqué à \mathcal{T}_k s'écrit comme précédemment :

$$\bar{\mathbf{f}}_k V_{\mathcal{T}_k} = \bar{\mathbf{C}}_{0k} S_{0k} + \sum_{i=1}^3 \bar{\mathbf{C}}_{ik} S_{ik}$$

où $\bar{\mathbf{f}}_k$ est la valeur moyenne des forces à distance sur \mathcal{T}_k , et $\bar{\mathbf{C}}_{ik}$ est la valeur moyenne des vecteurs contraintes sur les faces S_{ik} .

Compte tenu de l'homothétie, il vient :

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{f}}_k k^3 V_{\mathcal{T}} &= \bar{\mathbf{C}}_{0k} k^2 S_0 + \sum_{i=1}^3 \bar{\mathbf{C}}_{ik} k^2 S_i \\ \bar{\mathbf{f}}_k k V_{\mathcal{T}} &= \bar{\mathbf{C}}_{0k} S_0 + \sum_{i=1}^3 \bar{\mathbf{C}}_{ik} S_i\end{aligned}$$

En faisant tendre k vers 0, il vient³¹ :

$$0 = S_0 \lim_{k \rightarrow 0} \bar{\mathbf{C}}_{0k} + \sum_{i=1}^3 S_i \lim_{k \rightarrow 0} \bar{\mathbf{C}}_{ik}$$

Or dans cette limite, les valeurs des contraintes moyennes sur chacune des faces tendent (par définition de la contrainte) respectivement vers les contraintes en M_0 pour les directions de ces faces³² :

$$\lim_{k \rightarrow 0} \bar{\mathbf{C}}_{ik} = \mathbf{C}(M_0, \mathbf{n}_i) \quad \forall i \in [0, 1, 2, 3, 4]$$

Le passage à la limite conduit donc à :

$$\mathbf{0} = S_0 \mathbf{C}(M_0, \mathbf{n}_0) + \sum_{i=1}^3 S_i \mathbf{C}(M_0, \mathbf{n}_i)$$

31. Il est remarquable de constater que dans le passage à la limite, les forces à distance disparaissent. La démonstration reste donc valide même si on prend en compte les forces de gravitation internes à \mathcal{D} . Il n'est donc pas nécessaire de les négliger.

32. dans l'homothétie, les directions des normales aux faces restent constantes.

La contrainte en M_0 pour la direction \mathbf{n}_0 est donc :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C}(M_0, \mathbf{n}_0) &= - \sum_{i=1}^3 \frac{S_i}{S_0} \mathbf{C}(M_0, \mathbf{n}_i) \\
 &= \sum_{i=1}^3 (\mathbf{n}_i \overline{\otimes} \mathbf{n}_0) \mathbf{C}(M_0, \mathbf{n}_i) \quad (\text{géométrie du tétraèdre}) \\
 &= \sum_{i=1}^3 \mathbf{C}(M_0, \mathbf{n}_i) (\mathbf{n}_i \overline{\otimes} \mathbf{n}_0) \\
 &= \sum_{i=1}^3 [\mathbf{C}(M_0, \mathbf{n}_i) \otimes \mathbf{n}_i] \overline{\otimes} \mathbf{n}_0 \quad (\text{algèbre tensorielle}) \\
 &= \underbrace{\left[\sum_{i=1}^3 (\mathbf{C}(M_0, \mathbf{n}_i) \otimes \mathbf{n}_i) \right]}_{\sigma(M_0, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)} \overline{\otimes} \mathbf{n}_0
 \end{aligned}$$

On peut recommencer la même démarche avec un autre tétraèdre initial \mathcal{T}' , dont les faces orthogonales ont la même orientation ($\mathbf{n}'_i = \mathbf{n}_i$ pour $i \in [1, 2, 3]$), mais dont la face $M_1 M_2 M_3$ aurait une orientation différente, de normale \mathbf{n}'_0 .

Les contraintes en M_0 obtenues au passage à la limite pour les directions \mathbf{n}_1 , \mathbf{n}_2 et \mathbf{n}_3 sont donc inchangées. La contrainte en M_0 pour la normale \mathbf{n}'_0 est alors :

$$\mathbf{C}(M_0, \mathbf{n}'_0) = \left[\sum_{i=1}^3 (\mathbf{C}(M_0, \mathbf{n}_i) \otimes \mathbf{n}_i) \right] \overline{\otimes} \mathbf{n}'_0$$

Ainsi, quelle que soit la direction \mathbf{n}_0 , la contrainte $\mathbf{C}(M_0, \mathbf{n}_0)$ est une fonction *linéaire* de \mathbf{n}_0 , car le tenseur du second ordre $\sigma(M_0, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{C}(M_0, \mathbf{n}_i) \otimes \mathbf{n}_i$ est *indépendant* de \mathbf{n}_0 .

À ce stade de la démonstration, l'application linéaire σ est encore *a priori* une fonction de M_0 et des trois directions unitaires \mathbf{n}_1 , \mathbf{n}_2 et \mathbf{n}_3 . Pour montrer que cette application est indépendante des trois directions unitaires, on considère un autre domaine tétraédrique \mathcal{T}'' , de sommets M_0 (identique au précédent), M''_1 , M''_2 et M''_3 , dont les normales unitaires aux faces sont \mathbf{n}_0 (identique au précédent), \mathbf{n}''_1 , \mathbf{n}''_2 et \mathbf{n}''_3 . Par passage à la limite, on trouve une nouvelle expression de la contrainte en M_0 pour la direction \mathbf{n}_0 :

$$\mathbf{C}(M_0, \mathbf{n}_0) = \left[\sum_{i=1}^3 \mathbf{C}(M_0, \mathbf{n}''_i) \otimes \mathbf{n}''_i \right] \overline{\otimes} \mathbf{n}_0$$

On a donc :

$$\underbrace{\left[\sum_{i=1}^3 \mathbf{C}(M_0, \mathbf{n}_i) \otimes \mathbf{n}_i \right]}_{\sigma(M_0, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)} \overline{\otimes} \mathbf{n}_0 = \underbrace{\left[\sum_{i=1}^3 \mathbf{C}(M_0, \mathbf{n}''_i) \otimes \mathbf{n}''_i \right]}_{\sigma(M_0, \mathbf{n}''_1, \mathbf{n}''_2, \mathbf{n}''_3)} \overline{\otimes} \mathbf{n}_0$$

Cette égalité étant vraie pour toute direction \mathbf{n}_0 , les deux tenseurs sont égaux :

$$\sigma(M_0, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3) = \sigma(M_0, \mathbf{n}''_1, \mathbf{n}''_2, \mathbf{n}''_3)$$

Cette dernière égalité est vraie pour toute base $\{\mathbf{n}''_1, \mathbf{n}''_2, \mathbf{n}''_3\}$. L'opérateur σ n'est donc pas fonction du choix des orientations des faces $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)$, et on peut écrire

$$\sigma(M_0, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3) = \sigma(M_0)$$

Il existe donc bien en chaque point M_0 d'un milieu continu un tenseur du second ordre $\sigma(M_0)$ tel que la contrainte sur la facette de normale \mathbf{n}_0 est

$$\mathbf{C}(M_0, \mathbf{n}_0) = \sigma(M_0) \overline{\otimes} \mathbf{n}_0$$

3.3.3 Conclusion

De ce qui précède, on doit retenir les points suivants :

1. En un point M d'un milieu continu, on peut définir la contrainte (force de contact par unité de surface) qui s'exerce sur une facette de normale unitaire \mathbf{n} . Cette contrainte ne dépend que de M et de \mathbf{n} . Parler de la contrainte en un point n'a aucun sens.
2. En un point M d'un milieu continu, il existe un tenseur du second ordre appelé *tenseur des contraintes (de Cauchy)* qui ne dépend que de M , tel que

$$\mathbf{C}(M, \mathbf{n}) = \sigma(M) \overline{\otimes} \mathbf{n}$$

En d'autres termes, on peut dire qu'il existe un *champ de tenseurs des contraintes* dans un milieu continu. Un des problèmes importants de la mécanique des milieux continus est de déterminer ce champ de tenseurs, afin de connaître les contraintes en tout point et pour toutes directions³³.

3.4 Définitions et notations

Soit M un point à l'intérieur d'un milieu continu, et soit \mathbf{n} un vecteur *unitaire* normal à une facette ds de centre M . On note \mathbf{C} la contrainte en M pour la direction \mathbf{n} .

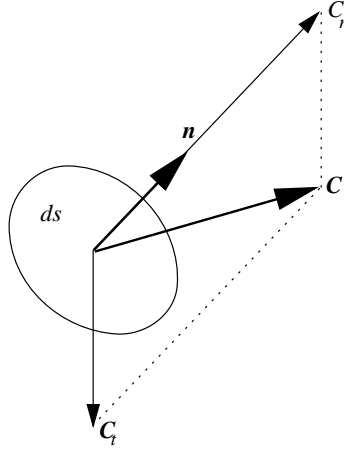


FIG. 3.3 – Contrainte normale et tangentielle pour une facette de direction \mathbf{n}

3.4.1 Contraintes normales et tangentielles

La partie normale de \mathbf{C} , $C_n = \mathbf{n} \overline{\otimes} \mathbf{C} = \mathbf{n} \overline{\otimes} \sigma \overline{\otimes} \mathbf{n}$ est appelée contrainte *normale* en M pour la direction \mathbf{n} . La contrainte normale C_n est un *scalaire*³⁴.

33. En effet, on verra plus loin que les contraintes supportables par un matériau ont des limites physiques dont le dépassement conduirait à la décohésion et donc à la remise en question de l'hypothèse de continuité du milieu.

34. en effet, ce nombre étant le résultat d'une opération tensorielle, c'est un tenseur d'ordre 0 dont la valeur est indépendante de la base utilisée pour faire le calcul.

Le reste $\mathbf{C}_t = \mathbf{C} - C_n \mathbf{n}$ est appelé contrainte *tangentielle* en M pour la direction \mathbf{n} . La contrainte tangentielle \mathbf{C}_t pour la facette de direction \mathbf{n} est un *vecteur* du plan ds .

■ Remarque : dans le plan de la facette ds , on peut choisir (arbitrairement) deux directions unitaires orthogonales \mathbf{t}_1 et \mathbf{t}_2 et poser $\mathbf{C}_t = C_{t1} \mathbf{t}_1 + C_{t2} \mathbf{t}_2$. On a alors :

$$\begin{aligned} C_{t1} &= \mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{C}_t = \mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{C} = \mathbf{t}_1 \otimes \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{n} \\ C_{t2} &= \mathbf{t}_2 \otimes \mathbf{C}_t = \mathbf{t}_2 \otimes \mathbf{C} = \mathbf{t}_2 \otimes \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{n} \end{aligned}$$

Les nombres C_{t1} et C_{t2} sont parfois appelés contraintes tangentielles pour les directions \mathbf{t}_1 et \mathbf{t}_2 , en M pour la facette de direction \mathbf{n} ³⁵. ■

Pour une facette de normale \mathbf{n} , on a :

$$\mathbf{C} = C_n \mathbf{n} + \mathbf{C}_t \quad \text{et} \quad \|\mathbf{C}\|^2 = C_n^2 + \|\mathbf{C}_t\|^2$$

Dans le cas particulier où les composantes de $\boldsymbol{\sigma}$ sont données sur une *base orthonormée*³⁶ $\{\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3\}$,

$$[\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\bullet\bullet}] = \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{11} & \tilde{\sigma}_{12} & \tilde{\sigma}_{13} \\ \tilde{\sigma}_{21} & \tilde{\sigma}_{22} & \tilde{\sigma}_{23} \\ \tilde{\sigma}_{31} & \tilde{\sigma}_{32} & \tilde{\sigma}_{33} \end{bmatrix}$$

on peut donner une interprétation des composantes :

- $\tilde{\sigma}_{11} = \tilde{\mathbf{e}}_1 \otimes \boldsymbol{\sigma} \otimes \tilde{\mathbf{e}}_1$ est la contrainte *normale* pour une facette de normale unitaire $\tilde{\mathbf{e}}_1$.
- $\tilde{\sigma}_{21} = \tilde{\mathbf{e}}_2 \otimes \boldsymbol{\sigma} \otimes \tilde{\mathbf{e}}_1$ est la composante dans la direction $\tilde{\mathbf{e}}_2$ de la contrainte *tangentielle* pour une facette de normale unitaire $\tilde{\mathbf{e}}_1$.
- $\tilde{\sigma}_{31} = \tilde{\mathbf{e}}_3 \otimes \boldsymbol{\sigma} \otimes \tilde{\mathbf{e}}_1$ est la composante dans la direction $\tilde{\mathbf{e}}_3$ de la contrainte *tangentielle* pour une facette de normale unitaire $\tilde{\mathbf{e}}_1$.
- $\tilde{\sigma}_{21} \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\sigma}_{31} \tilde{\mathbf{e}}_3$ est la contrainte *tangentielle* totale pour une facette de normale unitaire $\tilde{\mathbf{e}}_1$.
- $\tilde{\sigma}_{22} = \tilde{\mathbf{e}}_2 \otimes \boldsymbol{\sigma} \otimes \tilde{\mathbf{e}}_2$ est la contrainte *normale* pour une facette de normale unitaire $\tilde{\mathbf{e}}_2$.
- $\tilde{\sigma}_{12} = \tilde{\mathbf{e}}_1 \otimes \boldsymbol{\sigma} \otimes \tilde{\mathbf{e}}_2$ est la composante dans la direction $\tilde{\mathbf{e}}_1$ de la contrainte *tangentielle* pour une facette de normale unitaire $\tilde{\mathbf{e}}_2$.
- $\tilde{\sigma}_{32} = \tilde{\mathbf{e}}_3 \otimes \boldsymbol{\sigma} \otimes \tilde{\mathbf{e}}_2$ est la composante dans la direction $\tilde{\mathbf{e}}_3$ de la contrainte *tangentielle* pour une facette de normale unitaire $\tilde{\mathbf{e}}_2$.
- $\tilde{\sigma}_{12} \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\sigma}_{32} \tilde{\mathbf{e}}_3$ est la contrainte *tangentielle* totale pour une facette de normale unitaire $\tilde{\mathbf{e}}_2$.
- $\tilde{\sigma}_{33} = \tilde{\mathbf{e}}_3 \otimes \boldsymbol{\sigma} \otimes \tilde{\mathbf{e}}_3$ est la contrainte *normale* pour une facette de normale unitaire $\tilde{\mathbf{e}}_3$.
- $\tilde{\sigma}_{13} = \tilde{\mathbf{e}}_1 \otimes \boldsymbol{\sigma} \otimes \tilde{\mathbf{e}}_3$ est la composante dans la direction $\tilde{\mathbf{e}}_1$ de la contrainte *tangentielle* pour une facette de normale unitaire $\tilde{\mathbf{e}}_3$.
- $\tilde{\sigma}_{23} = \tilde{\mathbf{e}}_2 \otimes \boldsymbol{\sigma} \otimes \tilde{\mathbf{e}}_3$ est la composante dans la direction $\tilde{\mathbf{e}}_2$ de la contrainte *tangentielle* pour une facette de normale unitaire $\tilde{\mathbf{e}}_3$.
- $\tilde{\sigma}_{13} \tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\sigma}_{23} \tilde{\mathbf{e}}_2$ est la contrainte *tangentielle* totale pour une facette de normale unitaire $\tilde{\mathbf{e}}_3$.

Ces interprétations n'ont de réel intérêt que si les directions de la base orthonormée ont une signification physique dans le problème traité³⁷.

35. Ces définitions sont de peu d'intérêt : les nombres C_{t1} et C_{t2} ne sont pas des scalaires, car leur valeur dépend du choix *arbitraire* des directions \mathbf{t}_1 et \mathbf{t}_2 . Ils sont donc dénués de signification physique. Seule la norme $\|\mathbf{C}_t\|$ est un scalaire indépendant de la base.

36. La base étant orthonormée, les variances des indices sont sans importance.

37. En effet, si la base est choisie sans raison physique, les valeurs des composantes de $\boldsymbol{\sigma}$ (qui changent d'une base à l'autre) n'ont pas grand sens.

3.4.2 Contraintes principales

On démontrera dans le chapitre suivant que, pour des milieux continus non magnétiques³⁸, le tenseur $\boldsymbol{\sigma}$ est symétrique. Or tout tenseur euclidien réel du second ordre symétrique, a des valeurs propres réelles et les directions propres sont orthogonales.

Les directions propres du tenseur des contraintes sont appelées *directions principales des contraintes*. Les valeurs propres notées σ_1 , σ_2 et σ_3 sont appelées *contraintes normales*³⁹ *principales*.

Dans une base *orthonormée* construite sur les directions propres⁴⁰ (on l'appelle base propre), la matrice des composantes dans cette base est la matrice diagonale:

$$[\boldsymbol{\sigma}^{\bullet, \bullet}] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \text{ dans une base propre orthonormée.}$$

On en déduit une propriété remarquable : en tout point M d'un milieu continu, il existe 3 directions principales de contraintes orthogonales \mathbf{u}_i pour lesquelles la contrainte pour une facette de normale unitaire \mathbf{u}_i , c'est-à-dire $\mathbf{C}(M, \mathbf{u}_i) = \boldsymbol{\sigma}(M) \overline{\otimes} \mathbf{u}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i$, est une contrainte *uniquement normale* car $\mathbf{C}(M, \mathbf{u}_i)$ est colinéaire à \mathbf{u}_i . $\mathbf{C}(M, \mathbf{u}_i)$ n'a donc pas de partie tangentielle.

La valeur propre σ_i est la contrainte normale dans la direction propre \mathbf{u}_i .

3.5 Conditions aux limites en efforts

Si la facette ds , de centre N , est sur la frontière de \mathcal{D} , et si sa normale est orientée vers l'extérieur de \mathcal{D} , alors $\boldsymbol{\sigma}(N) \overline{\otimes} \mathbf{n}(N)$ représente la contrainte exercée par le milieu extérieur à \mathcal{D} sur sa frontière.

Ce cas particulier est très important : il permet de relier les contraintes (forces de contact) exercées par le milieu extérieur $\overline{\mathcal{D}}$ à la valeur *au point N de la frontière* du tenseur des contraintes :

Si $\mathbf{q}(N)$ est la contrainte exercée en N par $\overline{\mathcal{D}}$ sur sa frontière, et si $\mathbf{n}(N)$ est la normale unitaire à la frontière orientée vers l'extérieur de \mathcal{D} , la définition des contraintes permet d'écrire :

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma}(N) \overline{\otimes} \mathbf{n}(N) = \mathbf{q}(N) \quad N \in \partial \mathcal{D}} \quad (3.1)$$

Cette équation est appelée *condition aux limites en effort* au point N . Dans un problème de mécanique des milieux continus, le champ du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ doit nécessairement respecter cette condition aux frontières.

3.6 Un complément culturel...

Le lecteur critique n'aura pas manqué de noter que la démonstration d'existence du tenseur des contraintes n'a été faite que dans le cas où les champs d'actions à distance et de contact se réduisent à des champs de forces (torseurs sans moments). Bien que ce cas soit un modèle le plus souvent satisfaisant, on donne ici les grandes lignes d'une analyse plus complète.

Les actions extérieures à distance sont maintenant des champs massiques de torseurs, c'est-à-dire qu'en chaque point M d'un domaine \mathcal{D} , il existe une densité massique de force $\mathbf{f}(M)$ et une densité

38. plus précisément les milieux tels que les champs d'actions à distance et de contact sont des champs de torseurs qui se réduisent à des champs de forces. On les appelle souvent *milieu continu non polarisés*.

39. Le qualificatif «normale» est justifié un peu plus bas.

40. C'est toujours possible car les directions propres sont orthogonales, et on peut toujours prendre des vecteurs propres unitaires. Suivant les sens choisis on peut construire 8 bases propres orthonormées.

massique de moment $\mathbf{m}(M)$. De même, les actions de contact sur $\partial\mathcal{D}$ sont des champs surfaciques de torseurs, c'est-à-dire qu'en chaque point $N \in \partial\mathcal{D}$, de normale extérieure \mathbf{n} , l'extérieur de \mathcal{D} exerce une force par unité de surface (une contrainte) $\mathbf{C}(N, \mathbf{n})$ et un couple par unité de surface $\mathbf{W}(N, \mathbf{n})$.

Quand on applique le principe fondamental de la mécanique à un tétraèdre \mathcal{T} , l'égalité des résultantes est la même que précédemment. On en déduit donc l'existence du tenseur des contraintes de Cauchy, qui permet de calculer la contrainte $\mathbf{C}(M, \mathbf{n})$.

Il reste donc à voir les conséquences de la seconde partie du principe fondamental de la mécanique, l'égalité des moments, qu'on prendra au point M_0 .

$$\int_{\mathcal{T}} \mathbf{M}_0 \mathbf{M} \wedge \boldsymbol{\gamma}(M) \rho(M) dv = \int_{\mathcal{T}} \mathbf{M}_0 \mathbf{M} \wedge \mathbf{f}(M) \rho(M) dv + \int_{\mathcal{T}} \mathbf{m}(M) \rho(M) dv + \sum_{i=0}^3 \int_{S_i} \mathbf{M}_0 \mathbf{N}_i \wedge \mathbf{C}(N_i, \mathbf{n}_i) ds + \sum_{i=0}^3 \int_{S_i} \mathbf{W}(N_i, \mathbf{n}_i) ds$$

On définit les moyennes :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{w}} &= \frac{1}{V_{\mathcal{T}}} \int_{\mathcal{T}} [\mathbf{M}_0 \mathbf{M} \wedge \boldsymbol{\gamma}(M) - \mathbf{M}_0 \mathbf{M} \wedge \mathbf{f}(M) - \mathbf{m}(M)] \rho(M) dv \\ \bar{\mathbf{W}}_i &= \frac{1}{S_i} \int_{S_i} [\mathbf{M}_0 \mathbf{N}_i \wedge \mathbf{C}(N_i, \mathbf{n}_i) + \mathbf{W}(N_i, \mathbf{n}_i)] ds \end{aligned}$$

et l'égalité des moments du principe fondamental s'écrit :

$$\bar{\mathbf{w}} V_{\mathcal{T}} = \sum_{i=0}^3 \bar{\mathbf{W}}_i S_i$$

Pour le tétraèdre \mathcal{T}_k ,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{w}}_k V_{\mathcal{T}_k} &= \sum_{i=0}^3 \bar{\mathbf{W}}_{ik} S_{ik} \\ \bar{\mathbf{w}}_{kk} k^3 V_{\mathcal{T}} &= \sum_{i=0}^3 \bar{\mathbf{W}}_{ik} k^2 S_i \\ \bar{\mathbf{w}}_{kk} k V_{\mathcal{T}} &= \sum_{i=0}^3 \bar{\mathbf{W}}_{ik} S_i \end{aligned}$$

Passant à la limite il vient :

$$\mathbf{0} = \sum_{i=0}^3 S_i \lim_{k \rightarrow 0} \bar{\mathbf{W}}_{ik}$$

Or, quand $k \rightarrow 0$, $N_i \rightarrow M_0$ et $\mathbf{W}(N_i, \mathbf{n}_i) \rightarrow \mathbf{W}(M_0, \mathbf{n}_i)$. Donc

$$\lim_{k \rightarrow 0} \bar{\mathbf{W}}_{ik} = \frac{1}{S_i} \lim_{k \rightarrow 0} \int_{S_i} [\mathbf{M}_0 \mathbf{N}_i \wedge \mathbf{C}(N_i, \mathbf{n}_i) + \mathbf{W}(N_i, \mathbf{n}_i)] ds = \mathbf{W}(M_0, \mathbf{n}_i)$$

On a donc

$$\mathbf{0} = \sum_{i=0}^3 S_i \mathbf{W}(M_0, \mathbf{n}_i)$$

Et la densité surfacique de couple dans la direction \mathbf{n}_0 est :

$$\mathbf{W}(M_0, \mathbf{n}_0) = - \sum_{i=1}^3 \frac{S_i}{S_0} \mathbf{W}(M_0, \mathbf{n}_i) = \sum_{i=1}^3 (\mathbf{n}_i \otimes \overline{\mathbf{n}}_0) \mathbf{W}(M_0, \mathbf{n}_i) = \underbrace{\left[\sum_{i=1}^3 \mathbf{W}(M_0, \mathbf{n}_i) \otimes \mathbf{n}_i \right]}_{\boldsymbol{\tau}} \otimes \overline{\mathbf{n}}_0$$

Il reste à montrer de la même manière que précédemment, avec \mathcal{T}'' , que le tenseur des couples surfaciques $\boldsymbol{\tau}$ est indépendant des \mathbf{n}_i , c'est-à-dire que $\boldsymbol{\tau}$ ne dépend que de M .

Pour représenter les efforts intérieurs dans un milieu continu sensible à des champs de torseurs, il faut deux tenseurs : un tenseur des contraintes⁴¹ $\boldsymbol{\sigma}$ et un tenseur de couples $\boldsymbol{\tau}$.

Enfin, il est important de noter que si on veut envisager sérieusement des actions extérieures modélisées par des densités volumiques ou surfaciques de couples, la description cinématique du mouvement des milieux continus qui a été faite au début du cours est insuffisante : la description du mouvement d'un milieu continu doit non seulement décrire la position des particules, mais aussi leur orientation (voir remarque 1.1.3 page 6).

41. On verra plus loin que dans ce cas, il n'est plus symétrique

Chapitre 4

Equations générales de la MMC

Comme toute la physique classique, la mécanique des milieux continus est fondée sur les quatre principes fondamentaux:

- Le principe de la conservation de la masse
- Le principe fondamental de la mécanique (ou conservation de la quantité de mouvement)
- Le premier principe de la thermodynamique (ou conservation de l'énergie)
- Le second principe de la thermodynamique.

Des trois premiers, on déduit ce qu'on appelle les équations fondamentales de la MMC, *qui sont valables pour tous les milieux continus*. Le quatrième fournira des inégalités importantes.

Comme on va le voir, ces principes ont une forme *globale*, écrite pour un domaine matériel \mathcal{D} pris dans son ensemble, et une forme locale qui est une équation différentielle valable en chaque point de \mathcal{D} . Selon qu'on s'intéresse ou non à ce qui se passe à l'intérieur de \mathcal{D} , on peut les utiliser dans une forme ou dans l'autre.

Dans ce chapitre, les équations générales de la mécanique des milieux continus sont écrites *pour des champs décrits suivant la méthode d'Euler*¹. Elles sont donc directement utilisables en mécanique des fluides. Pour la mécanique des solides déformables, on préfère parfois décrire les champs par la méthode de Lagrange. Dans ce cas, il faut reformuler ces principes².

4.1 Expression générale d'un principe de conservation

Comme on le verra par la suite, les trois premiers principes ci-dessus, sont des principes de conservation qui se présentent tous sous la même forme. On va donc d'abord écrire un principe de conservation tout à fait général.

Soit \mathcal{D} un domaine (matériel ou géométrique) et soit \mathcal{A} une grandeur physique scalaire, vectorielle ou tensorielle.

On note $a_E(M, t)$ la description d'Euler de la *densité volumique* de \mathcal{A} dans le domaine.

1. Dans ce chapitre, pour des raisons de lisibilité, on omettra de mettre l'indice E . La description d'Euler d'une grandeur physique $\mathcal{A}(P, t)$ sera notée $\mathcal{A}(M, t)$ ou plus simplement \mathcal{A} au lieu de $\mathcal{A}_E(M, t)$. Tant qu'on n'évoque pas de champs décrits par la méthode de Lagrange, il n'y a pas de confusion possible.

2. En fait, on verra plus loin dans le cours d'élasticité que si *les déformations et les déplacements sont petits*, les descriptions d'Euler et de Lagrange sont formellement identiques au second ordre près, puisque les domaines avant et après déformation sont très voisins. Ce n'est que lorsque les déformations et les déplacements ne sont pas petits qu'il faut reformuler les principes fondamentaux si on tient à utiliser des champs décrits par la méthode de Lagrange.

On note $a_v(M, t)$ la description d'Euler de la densité volumique de \mathcal{A} produite par unité de temps à l'intérieur de \mathcal{D} («vitesse de production volumique» de \mathcal{A} à l'intérieur du domaine)³. Enfin, on note $a_s(M, t)$ la description d'Euler du flux de \mathcal{A} entrant à travers la frontière $\partial\mathcal{D}$ ⁴.

Du point de vue dimensionnel on a donc :

$$[a_E] = [A] [L]^{-3} \quad ; \quad [a_v] = [A] [L]^{-3} [T]^{-1} \quad ; \quad [a_s] = [A] [L]^{-2} [T]^{-1}$$

D'une manière générale, la conservation de la grandeur \mathcal{A} dans le domaine \mathcal{D} s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} a_E \, dv = \int_{\mathcal{D}} a_v \, dv + \int_{\partial\mathcal{D}} a_s \, ds$$

c'est-à-dire que la variation de la quantité totale de \mathcal{A} dans le domaine \mathcal{D} est égale à la somme de la quantité de \mathcal{A} produite à l'intérieur de \mathcal{D} et de la quantité de \mathcal{A} entrant à travers la frontière.

4.2 Dérivation des intégrales de volume sur un domaine matériel

Quand on écrit un principe de conservation pour un domaine *matériel* (c'est-à-dire qu'on le suit dans son mouvement), le domaine d'intégration varie avec le temps. La dérivée de l'intégrale de volume doit donc prendre en compte le mouvement du domaine matériel.

Soit \mathcal{D} un domaine matériel qu'on suit dans son mouvement, et soient Ω_t et Ω_{t+dt} ses positions aux instants t et $t + dt$.

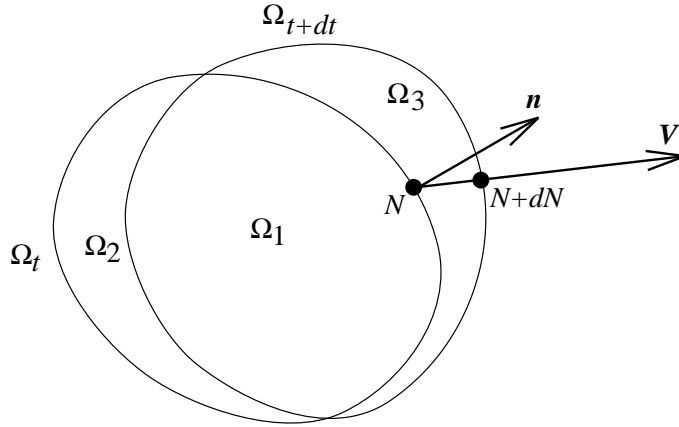


FIG. 4.1 – Positions à t et $t + dt$ du domaine \mathcal{D}

On note: $\Omega_1 = \Omega_t \cap \Omega_{t+dt}$; $\Omega_2 = \Omega_t - \Omega_1$; $\Omega_3 = \Omega_{t+dt} - \Omega_1$

Supposons que $\mathcal{A}(M, t)$ soit un champ scalaire décrit en variables d'Euler,

$$\begin{aligned} I_t &= \int_{\Omega_t} \mathcal{A}(M, t) \, dv = \int_{\Omega_1} \mathcal{A}(M, t) \, dv + \int_{\Omega_2} \mathcal{A}(M, t) \, dv \\ I_{t+dt} &= \int_{\Omega_{t+dt}} \mathcal{A}(M, t+dt) \, dv = \int_{\Omega_1} \mathcal{A}(M, t+dt) \, dv + \int_{\Omega_3} \mathcal{A}(M, t+dt) \, dv \\ I_{t+dt} - I_t &= \int_{\Omega_1} \mathcal{A}(M, t+dt) - \mathcal{A}(M, t) \, dv + \int_{\Omega_3} \mathcal{A}(M, t+dt) \, dv - \int_{\Omega_2} \mathcal{A}(M, t) \, dv \end{aligned}$$

3. Par convention, elle est positive s'il y a production ou négative s'il y a disparition.

4. S'il est positif, il est entrant, sinon il est sortant.

Or, dans Ω_3 , $dv = ds (\mathbf{V} \otimes \bar{\mathbf{n}}) dt$. De même, dans Ω_2 , $dv = -ds (\mathbf{V} \otimes \bar{\mathbf{n}}) dt$. On a donc

$$\begin{aligned} \frac{I_{t+dt} - I_t}{dt} &= \int_{\Omega_1} \frac{\mathcal{A}(M, t+dt) - \mathcal{A}(M, t)}{dt} dv \\ &\quad + \int_{\partial\mathcal{D}_3} \mathcal{A}(N, t+dt) (\mathbf{V}(N) \otimes \bar{\mathbf{n}}) ds + \int_{\partial\mathcal{D}_2} \mathcal{A}(N, t) (\mathbf{V}(N) \otimes \bar{\mathbf{n}}) ds \end{aligned}$$

et donc, quand $dt \rightarrow 0$

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}(t)} \mathcal{A} dv = \int_{\mathcal{D}(t)} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} dv + \int_{\partial\mathcal{D}(t)} \mathcal{A} \mathbf{V} \otimes \bar{\mathbf{n}} ds} \quad (4.1)$$

où \mathbf{V} est le champ des vitesses des points de la frontière de \mathcal{D} .

La formule s'étend facilement aux vecteurs et aux tenseurs.

4.3 Conservation de la masse

Soit un domaine *matériel* \mathcal{D} qu'on suit dans son mouvement, et soit $\rho(M, t)$ son champ de masse volumique *décrit par la méthode d'Euler*.

Le principe de la conservation de la masse postule qu'il n'y a ni apparition ni disparition de matière. Autrement dit, la vitesse de production volumique de matière est nulle. D'autre part, puisqu'on suit le domaine dans son mouvement, le flux de matière à travers la frontière est nul. La conservation de la masse s'écrit donc:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}(t)} dm = 0$$

On transforme cette intégrale de masse en intégrale de volume

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}(t)} \rho dv = 0$$

qu'on peut alors dériver en utilisant (4.1) page 43 :

$$\int_{\mathcal{D}(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \int_{\partial\mathcal{D}(t)} \rho \mathbf{V} \otimes \bar{\mathbf{n}} ds = 0$$

En utilisant le théorème de la divergence :

$$\int_{\mathcal{D}(t)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) \right) dv = 0$$

Cette égalité étant vraie quelque soit $\mathcal{D}(t)$, on obtient *l'expression locale de la conservation de la masse* :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0}$$

soit encore, en développant la divergence:

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div}(\mathbf{V}) = 0}$$

On peut établir d'autres expressions de ce principe en raisonnant sur un domaine *géométrique*, la description du milieu utilisée peut aussi être celle de Lagrange. Le lecteur est invité à les établir.

Propriété des intégrales de masse sur un domaine matériel

Soit $\mathcal{A}(M, t)$ la description d'Euler d'un champ scalaire sur le domaine matériel $\mathcal{D}(t)$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}(t)} \mathcal{A} dm &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}(t)} \rho \mathcal{A} dv \\ &= \int_{\mathcal{D}(t)} \frac{\partial \rho \mathcal{A}}{\partial t} dv + \int_{\partial \mathcal{D}(t)} \rho \mathcal{A} \mathbf{V} \otimes \mathbf{n} ds \\ \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}(t)} \mathcal{A} dm &= \int_{\mathcal{D}(t)} \frac{\partial \rho \mathcal{A}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathcal{A} \mathbf{V}) dv \end{aligned} \quad (4.2)$$

En développant la divergence, et compte tenu de la conservation de la masse on trouve:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}(t)} \mathcal{A} dm = \int_{\mathcal{D}(t)} \frac{D\mathcal{A}}{Dt} dm}$$

On dit que pour les intégrales de masse, les opérateurs de dérivation et d'intégration commutent. Ce résultat s'étend sans difficulté pour un champ \mathcal{A} vectoriel ou tensoriel.

4.4 Principe fondamental de la mécanique

Soit \mathcal{D} un domaine matériel dans un milieu continu, (on le suit donc dans son mouvement, à chaque instant le domaine matériel \mathcal{D} a une forme différente).

La description d'Euler du champ de vitesses est $\mathbf{V}(M, t)$, et la description d'Euler du champ de masse volumique est $\rho(M, t)$.

4.4.1 Actions extérieures

AVERTISSEMENT : Dans la suite du cours, on considère que les actions extérieures (à distance et de contact) peuvent être modélisées respectivement par des champs de *forces* massiques et surfaciques. On n'envisage donc pas des actions extérieures telles que des actions magnétiques. Pour représenter les efforts intérieurs (contraintes), le tenseur des contraintes de Cauchy est donc suffisant⁵.

Les actions *extérieures* s'exerçant sur \mathcal{D} sont de deux sortes :

- les actions extérieures à distance s'exerçant sur les particules M de \mathcal{D} ⁶, modélisées par un champ de forces massiques dont la description d'Euler est $\mathbf{f}(M, t)$, $M \in \mathcal{D}$,
- les actions extérieures de contact (contraintes) exercées sur la frontière $\partial \mathcal{D}$, modélisées par un champ de forces surfacique dont la description d'Euler est $\mathbf{q}(N, t)$, $N \in \partial \mathcal{D}$.

Soit $\boldsymbol{\sigma}(M, t)$ la description d'Euler du champ de tenseurs des contraintes, La condition aux limites sur la frontière $\partial \mathcal{D}$ s'écrit :

$$\mathbf{q}(N, t) = \boldsymbol{\sigma}(N, t) \otimes \mathbf{n}(N, t) \quad N \in \partial \mathcal{D}$$

où $\mathbf{n}(N, t)$ est la normale extérieure en N à la frontière (mobile) $\partial \mathcal{D}$.

5. On a vu en section 3.6 page 38 que si les actions extérieures doivent être modélisées par des champs de tenseurs complets, il faut utiliser un tenseur des couples $\boldsymbol{\tau}$ pour représenter correctement les efforts intérieurs.

6. la pesanteur par exemple, mais aussi les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis, si le principe fondamental n'est pas écrit dans un référentiel galiléen.

4.4.2 Enoncé du principe fondamental de la mécanique

Dans un référentiel galiléen⁷, pour tout domaine matériel \mathcal{D} , le torseur dynamique est égal à la somme des torseurs des actions extérieures au système.

Le principe fondamental de la mécanique est une égalité de *torseurs*. il s'exprime donc avec les deux égalités vectorielles suivantes :

$$\int_{\mathcal{D}} \frac{D\mathbf{V}}{Dt} dm = \int_{\partial\mathcal{D}} \underbrace{\boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{n}}_{\mathbf{q}} ds + \int_{\mathcal{D}} \mathbf{f} dm$$

$$\int_{\mathcal{D}} \mathbf{OM} \wedge \frac{D\mathbf{V}}{Dt} dm = \int_{\partial\mathcal{D}} \mathbf{ON} \wedge \left(\underbrace{\boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{n}}_{\mathbf{q}} \right) ds + \int_{\mathcal{D}} \mathbf{OM} \wedge \mathbf{f} dm$$

où O est un point quelconque et où pour alléger les écritures, on a omis les arguments des descriptions d'Euler.

Cette omission sera systématique dans la suite, mais ne doit pas faire oublier que tous les champs sont décrits par la méthode d'Euler.

4.4.3 Equation locale de mouvement

Compte tenu de la propriété des intégrales de masse, l'égalité des résultantes s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho \mathbf{V} dv = \int_{\partial\mathcal{D}} \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{n} ds + \int_{\mathcal{D}} \rho \mathbf{f} dv$$

ce qui montre que le principe fondamental de la mécanique est un principe de la conservation de la quantité de mouvement $\rho \mathbf{V}$, si on interprète $\mathbf{q} = \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{n}$ comme un flux de quantité de mouvement entrant dans le domaine et \mathbf{f} comme une vitesse de création massique de quantité de mouvement.

Comme pour la conservation de la masse, pour obtenir une équation locale, on utilise le théorème de la divergence (pour les tenseurs du second ordre) :

$$\int_{\mathcal{D}} \rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} dv = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} dv + \int_{\mathcal{D}} \rho \mathbf{f} dv$$

Cette égalité étant vraie pour tout domaine \mathcal{D} , on obtient l'égalité *vectorielle* :

$$\boxed{\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f}} \quad (4.3)$$

Cette équation différentielle est appelée *équation locale de mouvement*.

4.4.4 Symétrie du tenseur des contraintes

Elle est déduite de l'égalité des moments du principe fondamental :

$$\int_{\mathcal{D}} \mathbf{OM} \wedge \frac{D\mathbf{V}}{Dt} dm = \int_{\partial\mathcal{D}} \mathbf{OM} \wedge (\boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{n}) ds + \int_{\mathcal{D}} \mathbf{OM} \wedge \mathbf{f} dm$$

Tenant compte de l'équation de mouvement dans le terme de gauche, il reste :

$$\int_{\mathcal{D}} \mathbf{OM} \wedge \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} dv = \int_{\partial\mathcal{D}} \mathbf{OM} \wedge (\boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{n}) ds \quad (4.4)$$

7. Si le référentiel n'est pas galiléen, il faut ajouter les champs de forces massiques d'inertie d'entraînement et de Coriolis au vecteur \mathbf{f} .

En utilisant le tenseur d'orientation \mathbf{E} pour écrire le produit vectoriel⁸ de l'intégrale de surface :

$$\mathbf{OM} \wedge (\boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{n}) = -\mathbf{OM} \otimes \mathbf{E} \otimes (\boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{n}) = -\underbrace{\mathbf{OM} \otimes \mathbf{E} \otimes \boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{X}} \otimes \mathbf{n}$$

où \mathbf{X} est un tenseur du second ordre. On peut alors utiliser le théorème de la divergence pour les tenseurs du second ordre pour transformer (4.4) :

$$\int_{\mathcal{D}} \mathbf{OM} \wedge \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \, dv = - \int_{\mathcal{D}} \operatorname{div} \mathbf{X} \, dv = - \int_{\mathcal{D}} \operatorname{div} (\mathbf{OM} \otimes \mathbf{E} \otimes \boldsymbol{\sigma}) \, dv$$

Cette égalité étant vraie pour tout domaine \mathcal{D} , on en déduit :

$$\mathbf{OM} \wedge \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = -\operatorname{div} (\mathbf{OM} \otimes \mathbf{E} \otimes \boldsymbol{\sigma})$$

En utilisant l'identité⁹ $\operatorname{div} (\mathbf{T} \otimes \mathbf{R}) = \mathbf{T} \otimes \operatorname{div} \mathbf{R} + \operatorname{grad} \mathbf{T} \otimes \mathbf{R}^T$ avec $\mathbf{T} = \mathbf{OM} \otimes \mathbf{E}$ et $\mathbf{R} = \boldsymbol{\sigma}$, on peut développer la divergence $\operatorname{div} (\mathbf{OM} \otimes \mathbf{E} \otimes \boldsymbol{\sigma})$. On obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{OM} \wedge \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} &= -\mathbf{OM} \otimes \mathbf{E} \otimes \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} - \operatorname{grad} (\mathbf{OM} \otimes \mathbf{E}) \otimes \boldsymbol{\sigma}^T \\ &= \mathbf{OM} \wedge \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} - \operatorname{grad} (\mathbf{OM} \otimes \mathbf{E}) \otimes \boldsymbol{\sigma}^T \\ \mathbf{0} &= \operatorname{grad} (\mathbf{OM} \otimes \mathbf{E}) \otimes \boldsymbol{\sigma}^T \\ &= \left[\mathbf{OM} \otimes \underbrace{\operatorname{grad} \mathbf{E}}_{\mathbf{0}} + \mathbf{E} \otimes \underbrace{\operatorname{grad} \mathbf{OM}}_{\mathbf{G}} \right] \otimes \boldsymbol{\sigma}^T \\ \mathbf{0} &= \mathbf{E} \otimes \boldsymbol{\sigma}^T \end{aligned}$$

Le tenseur \mathbf{E} étant antisymétrique par rapport à ses deux derniers indices, le tenseur $\boldsymbol{\sigma}^T$ est donc symétrique

Le tenseur des contraintes est donc *symétrique*.

■ Remarque : Cette conclusion n'est valable que si les actions extérieures sont modélisables par des champs de forces et non des champs de torseurs¹⁰. En effet, dans ce dernier cas, l'écriture de l'égalité des moments contient alors des termes supplémentaires qui invalident la conclusion. Le lecteur curieux pourra montrer que dans ce cas, on obtient une seconde équation¹¹ : $\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{m} + \mathbf{E} \otimes \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$ ■

4.4.5 Théorème de l'énergie cinétique

Ce théorème est une conséquence du principe fondamental de la mécanique.

De l'équation de mouvement (4.3) page 45, en faisant le produit scalaire de chaque terme avec \mathbf{V} , on peut écrire:

$$\rho \mathbf{V} \otimes \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \mathbf{V} \otimes \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{V} \otimes \mathbf{f}$$

soit encore

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{\mathbf{V}^2}{2} \right) = \mathbf{V} \otimes \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{V} \otimes \mathbf{f}$$

En utilisant l'identité

$$\operatorname{div} (\mathbf{T} \otimes \mathbf{v}) = \operatorname{div} \mathbf{T} \otimes \mathbf{v} + \mathbf{T} \otimes \operatorname{grad}^T \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{T} \in \mathbb{V} \otimes \mathbb{V} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{V} \quad (4.5)$$

8. voir cours d'algèbre

9. où \mathbf{T} et \mathbf{R} sont des tenseurs du second ordre. Le lecteur est invité à vérifier cette identité.

10. comme dans le cas d'actions extérieures magnétiques.

11. en utilisant les notations de la section 3.6 page 38

et la symétrie de $\boldsymbol{\sigma}$, le lecteur pourra facilement montrer que

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{V}) = \mathbf{V} \otimes \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{D}$$

où \mathbf{D} est le tenseur (symétrique) des taux de déformation.

On a donc

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{\mathbf{V}^2}{2} \right) = \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{V}) - \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{D} + \rho \mathbf{V} \otimes \mathbf{f}$$

et en intégrant sur le domaine matériel \mathcal{D} :

$$\int_{\mathcal{D}} \frac{D}{Dt} \left(\frac{\mathbf{V}^2}{2} \right) dm = \int_{\mathcal{D}} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{V}) dv - \int_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{D} dv + \int_{\mathcal{D}} \rho \mathbf{V} \otimes \mathbf{f} dv$$

Compte tenu des propriétés des intégrales de masse (voir (4.2) page 44), du théorème de la divergence pour les vecteurs, et de la symétrie de $\boldsymbol{\sigma}$, on obtient:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \frac{\mathbf{V}^2}{2} dm = - \int_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{D} dv + \int_{\partial \mathcal{D}} \mathbf{V} \otimes \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{n} ds + \int_{\mathcal{D}} \rho \mathbf{V} \otimes \mathbf{f} dv \quad (4.6)$$

Le théorème s'énonce donc ainsi:

La dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique d'un domaine \mathcal{D} qu'on suit dans son mouvement est égale à la somme de la puissance mécanique des efforts intérieurs et de la puissance mécanique des efforts extérieurs.

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \frac{\mathbf{V}^2}{2} dm = \mathcal{P}_{mec\ ext} + \mathcal{P}_{mec\ int}}$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{mec\ ext} &= \underbrace{\int_{\partial \mathcal{D}} \mathbf{V} \otimes \overbrace{\boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{n}}^{\mathbf{q}} ds}_{\mathcal{P}_{mec\ ext\ de\ surface}} + \underbrace{\int_{\mathcal{D}} \rho \mathbf{V} \otimes \mathbf{f} dv}_{\mathcal{P}_{mec\ ext\ de\ volume}} \\ \mathcal{P}_{mec\ int} &= - \int_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{D} dv \end{aligned}$$

4.4.6 Formulation intégrale de l'équation de mouvement

La démonstration de ce théorème est similaire à celle du théorème de l'énergie cinétique, mais au lieu de projeter l'équation de mouvement (4.3) page 45 sur le vecteur vitesse \mathbf{V} , on projette sur un vecteur \mathbf{X} arbitraire :

$$\rho \mathbf{X} \otimes \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \mathbf{X} \otimes \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{X} \otimes \mathbf{f}$$

En intégrant sur le domaine matériel \mathcal{D} , on obtient :

$$\int_{\mathcal{D}} \rho \mathbf{X} \otimes \frac{D\mathbf{V}}{Dt} dv = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{X} \otimes \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} dv + \int_{\mathcal{D}} \rho \mathbf{X} \otimes \mathbf{f} dv$$

En utilisant l'identité (4.5) page 46, et compte tenu de la symétrie de $\boldsymbol{\sigma}$, on trouve :

$$\int_{\mathcal{D}} \rho \mathbf{X} \otimes \frac{D\mathbf{V}}{Dt} dv = \int_{\mathcal{D}} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{X}) dv - \int_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\sigma} \otimes \operatorname{grad} \mathbf{X} dv + \int_{\mathcal{D}} \rho \mathbf{X} \otimes \mathbf{f} dv$$

$$\boxed{\int_{\mathcal{D}} \rho \mathbf{X} \otimes \frac{D\mathbf{V}}{Dt} dv = \int_{\partial\mathcal{D}} \mathbf{X} \otimes \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{n} ds + \int_{\mathcal{D}} \rho \mathbf{X} \otimes \mathbf{f} dv - \int_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\sigma} \otimes \text{grad}\mathbf{X} dv} \quad (4.7)$$

où $\boldsymbol{\sigma} \otimes \text{grad}\mathbf{X}$ peut être réduit à $\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \otimes (\text{grad}\mathbf{X} + \text{grad}^T\mathbf{X})$

Ce théorème vrai *quelquesoit le champ de vecteurs arbitraire* \mathbf{X} est appelé *formulation intégrale* ou encore *formulation variationnelle* ou encore *formulation faible* des équations de mouvement.

On démontre en analyse fonctionnelle que si on réduit le choix du champ arbitraire \mathbf{X} à des espaces fonctionnels bien choisis, il est, en un certain sens¹², équivalent au principe fondamental.

Ce théorème est aussi souvent appelé *théorème des puissances virtuelles* ou encore *théorème des travaux virtuels*. Ces dénominations proviennent du fait qu'on veut donner une interprétation mécanique au champ arbitraire \mathbf{X} :

- Si \mathbf{X} est interprété comme un champ de vitesses, appelé *champ de vitesses virtuelles*, alors les termes du théorème sont homogènes à des puissances, qu'on appelle *puissances virtuelles*.
- Si \mathbf{X} est interprété comme un champ de déplacements, appelé *champ de déplacements virtuels*, alors les termes du théorème sont homogènes à des travaux, qu'on appelle *travaux virtuels*.

Il convient toutefois de se méfier de ces interprétations du champ arbitraire \mathbf{X} : si on remplace les vitesses virtuelles par les vitesses réelles, on redémontre le théorème de la puissance cinétique, on retrouve la puissance mécanique des efforts intérieurs et la puissance mécanique des efforts extérieurs. La puissance des quantités d'accélération devient la dérivée de l'énergie cinétique¹³. Par contre, si on remplace les déplacements virtuels par les déplacements réels, les termes sont bien homogènes à des travaux, mais ne sont en aucun cas des travaux réels¹⁴!

4.4.7 Théorème des débits de quantité de mouvement

Ce théorème est une autre écriture du principe fondamental de la mécanique. Il consiste à écrire sous une autre forme les quantités d'accélération.

$$\int_{\mathcal{D}} \frac{D\mathbf{V}}{Dt} dm = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \mathbf{V} dm = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho \mathbf{V} dv$$

En utilisant la dérivation des intégrales de volume, il vient:

$$\int_{\mathcal{D}} \frac{D\mathbf{V}}{Dt} dm = \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial(\rho\mathbf{V})}{\partial t} dv + \int_{\partial\mathcal{D}} \rho\mathbf{V} (\mathbf{V} \otimes \mathbf{n}) ds$$

La première égalité du principe fondamental de la mécanique s'écrit donc:

$$\boxed{\int_{\mathcal{D}} \frac{\partial(\rho\mathbf{V})}{\partial t} dv + \int_{\partial\mathcal{D}} \rho\mathbf{V} (\mathbf{V} \otimes \mathbf{n}) ds = \sum \text{Efforts extérieurs}}$$

On démontre de même que l'égalité des moments s'écrit:

$$\boxed{\int_{\mathcal{D}} \mathbf{OM} \wedge \frac{\partial(\rho\mathbf{V})}{\partial t} dv + \int_{\partial\mathcal{D}} \rho \mathbf{OM} \wedge \mathbf{V} (\mathbf{V} \otimes \mathbf{n}) ds = \sum \text{Moments en } O \text{ des eff. ext.}}$$

12. qui est précisé en analyse fonctionnelle

13. voir la démonstration du théorème de la puissance cinétique.

14. En effet, le produit scalaire d'une force par un déplacement n'est un travail réel que si la force est constante pendant ce déplacement, ce qui est rarement le cas en mécanique des milieux continus. Toutefois, si les déplacements réels sont choisis infiniment petits, alors les travaux réels (donc aussi infiniment petits) se calculent formellement comme les travaux virtuels.

Ce théorème est surtout intéressant dans l'étude de mouvements stationnaires : dans ce cas, les dérivées partielles par rapport au temps des descriptions d'Euler sont nulles et les intégrales de volume disparaissent. On a donc une relation entre le champ de vitesses *sur la frontière* et le torseur *résultant* des efforts exercés par l'extérieur sur le domaine.

4.5 Premier principe de la thermodynamique

4.5.1 Variables d'état, fonction d'état

En mécanique des milieux continus, on suppose que l'état de la matière d'une particule est représenté par un ensemble de $n+1$ grandeurs locales¹⁵ *indépendantes*¹⁶, qu'on notera $\{\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_n\}$. Cet ensemble est *l'ensemble des variables d'état indépendantes*. Le nombre et la nature de ces variables d'état dépendent du milieu continu qu'on considère.

Si on donne une valeur à chacune des variables d'état indépendantes, l'état est déterminé et toutes les autres grandeurs thermodynamiques sont déterminées. On appellera ces grandeurs des *fonctions d'état* car elles s'expriment en fonction des variables d'état.

4.5.2 Énoncé du premier principe

Soit \mathcal{D} un domaine matériel, dont le champ de vitesses en variables d'Euler est $\mathbf{V}(M, t)$, de masse volumique en variables d'Euler $\rho(M, t)$.

Le premier principe de la thermodynamique postule deux affirmations :

- Il existe une fonction d'état¹⁷ scalaire u appelé *énergie interne massique*¹⁸ telle que l'énergie interne U de \mathcal{D} est

$$U = \int_{\mathcal{D}} u \, dm$$

- On appelle *énergie totale* \mathcal{E} de \mathcal{D} la somme de son énergie interne et de son énergie cinétique. Le premier principe de la thermodynamique affirme que dans une évolution finie d'un domaine \mathcal{D} , la variation de l'énergie totale de \mathcal{D} est due aux apports¹⁹ extérieurs d'énergie. C'est la *conservation de l'énergie* :

$$\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 = U_2 - U_1 + K_2 - K_1 = W_1^2 + Q_1^2$$

L'énergie interne u étant une fonction d'état, la somme des apports extérieurs d'énergie $W_1^2 + Q_1^2$ est la même quelque soit le chemin suivi pour passer entre ces deux états.

Dans ce cours, les seuls apports extérieurs d'énergie envisagés sont du travail mécanique et de la chaleur. Exprimé en termes de dérivée par rapport au temps²⁰, ce principe s'écrit :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \mathcal{P}_{mec \ ext} + \mathcal{P}_{cal \ ext}$$

¹⁵. C'est à dire propres à la particule. Les thermodynamiciens les appellent souvent *grandeurs intensives*

¹⁶. c'est-à-dire qu'on peut donner une valeur *arbitraire* (au moins dans un certain domaine) à chacune de ces variables pour définir un état. Attention : dans beaucoup de traités de thermodynamique, ce qu'on appelle ensemble de variables d'états n'est pas un ensemble de variables indépendantes.

¹⁷. C'est donc une fonction des variables d'état

¹⁸. Les thermodynamiciens disent aussi *énergie interne spécifique*.

¹⁹. Les «apports» peuvent être négatifs si \mathcal{D} cède de l'énergie au milieu extérieur.

²⁰. c'est-à-dire pour une transformation infinitésimale autour d'un état donné.

où $\mathcal{P}_{mec\ ext}$ est la puissance mécanique reçue de l'extérieur, et $\mathcal{P}_{cal\ ext}$ est la puissance calorifique reçue de l'extérieur.

- La puissance mécanique reçue de l'extérieur est due d'une part aux forces à distance $\rho \mathbf{f}$, et d'autre part aux forces de surface de contact $\boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{n}$. On a donc

$$\mathcal{P}_{mec\ ext} = \int_{\mathcal{D}} \rho \mathbf{f} \otimes \mathbf{V} \, dv + \int_{\partial \mathcal{D}} \mathbf{V} \otimes (\boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{n}) \, ds$$

- La puissance calorifique reçue de l'extérieur est due d'une part à la puissance calorifique volumique r (en W/m^3) produite par l'extérieur²¹, d'autre part à la puissance calorifique transmise *par conduction*²² à travers la frontière de \mathcal{D} . Si on appelle \mathbf{q} le vecteur *courant de chaleur* (en W/m^2) dans le domaine \mathcal{D} , la puissance calorifique reçue de l'extérieur est :

$$\mathcal{P}_{cal\ ext} = \int_{\mathcal{D}} r \, dv - \int_{\partial \mathcal{D}} \mathbf{q} \otimes \mathbf{n} \, ds$$

Le signe $-$ est dû au fait que la normale \mathbf{n} est orientée vers l'extérieur de \mathcal{D} , alors que nous parlons ici de chaleur *reçue* par \mathcal{D} .

Le premier principe s'écrit donc :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \left(u + \frac{\mathbf{V}^2}{2} \right) dm = \int_{\partial \mathcal{D}} (\mathbf{V} \otimes \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{n} - \mathbf{q} \otimes \mathbf{n}) \, ds + \int_{\mathcal{D}} (\rho \mathbf{f} \otimes \mathbf{V} + r) \, dv$$

On peut en simplifier l'expression en utilisant le théorème de la puissance cinétique (voir (4.6) page 47) et la propriété des intégrales de masse (voir (4.2) page 44). On obtient :

$$\int_{\mathcal{D}} \rho \frac{Du}{Dt} \, dv - \int_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{D} \, dv = - \int_{\partial \mathcal{D}} \mathbf{q} \otimes \mathbf{n} + \int_{\mathcal{D}} r \, dv$$

et en utilisant le théorème de la divergence, on obtient l'équation locale de la conservation de l'énergie :

$$\boxed{\rho \frac{Du}{Dt} = \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{D} - \operatorname{div} \mathbf{q} + r}$$

4.6 Second principe de la thermodynamique

Le second principe de la thermodynamique postule deux affirmations :

- Il existe une variable d'état scalaire T positive appelé *température absolue* et une fonction d'état scalaire s appelé *entropie massique* tels que l'entropie S de \mathcal{D} est

$$S = \int_{\mathcal{D}} s \, dm$$

- La variation d'entropie S dans une évolution infinitésimale doit respecter l'inégalité suivante :

$$\frac{dS}{dt} \geq \int_{\mathcal{D}} \frac{r}{T} \, dv - \int_{\partial \mathcal{D}} \frac{\mathbf{q} \otimes \mathbf{n}}{T} \, ds$$

21. Par exemple, la chaleur créée par l'interaction d'un rayonnement traversant le milieu avec la matière qui le constitue. Dans la plupart des applications de ce cours, ce terme est nul.

22. c'est-à-dire par contact thermique. Il n'y a pas de convection puis qu'on écrit ici le principe pour un domaine matériel, il n'y a donc pas de flux de matière à travers la frontière. On peut aussi écrire la conservation de l'énergie pour un domaine géométrique Ω . Dans ce cas la convection n'est pas nulle. Les thermodynamiciens appellent cette écriture *conservation de l'énergie pour les systèmes ouverts*, par opposition aux domaines matériels qui sont appelés *systèmes fermés*.

Autrement dit, la variation d'entropie de \mathcal{D} est supérieure ou égale aux apports extérieurs d'entropie²³. Il existe donc des augmentations d'entropie dues à la chaleur dégagée par des transformations internes au corps²⁴. On a l'égalité pour une classe particulière (idéale!) de transformations qu'on appelle *transformations réversibles*.

4.6.1 Différentes expressions locales

Par les mêmes procédés que précédemment, on obtient une expression locale de ce principe:

$$\rho \frac{Ds}{Dt} \geq \frac{r}{T} - \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right)$$

Pour les transformations réversibles, on a l'égalité. Pour les autres transformations dites *irréversibles*, il y a une production supplémentaire d'entropie qui n'est pas due à l'apport *externe* de chaleur mais à un mécanisme de production *interne*.

On peut aussi l'écrire sous forme d'égalité:

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = \frac{r}{T} - \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) + \frac{\Phi}{T}$$

où Φ est une quantité positive ou nulle appelée *dissipation*. Elle est homogène à une puissance volumique (W/m^3).

Seconde expression du second principe:

On obtient une autre expression du second principe de la thermodynamique en éliminant le terme r tiré de la conservation de l'énergie:

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = \frac{\rho}{T} \frac{Du}{Dt} - \frac{1}{T} \boldsymbol{\sigma} \overline{\otimes} \mathbf{D} + \frac{\operatorname{div} \mathbf{q}}{T} - \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) + \frac{\Phi}{T}$$

soit encore, puisque la température absolue T est positive

$$\rho \left(T \frac{Ds}{Dt} - \frac{Du}{Dt} \right) + \boldsymbol{\sigma} \overline{\otimes} \mathbf{D} - \operatorname{div} \mathbf{q} + T \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) = \Phi \geq 0$$

or on a l'identité

$$T \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) = \operatorname{div} \left(T \frac{\mathbf{q}}{T} \right) - \frac{\mathbf{q}}{T} \overline{\otimes} \operatorname{grad} T$$

il vient:

$$\rho \left(T \frac{Ds}{Dt} - \frac{Du}{Dt} \right) + \boldsymbol{\sigma} \overline{\otimes} \mathbf{D} - \frac{\mathbf{q}}{T} \overline{\otimes} \operatorname{grad} T = \Phi \geq 0$$

Le terme $\Phi_{th} = -\frac{\mathbf{q}}{T} \overline{\otimes} \operatorname{grad} T$ est appelé *dissipation thermique*.

Le reste de la dissipation $\Phi_{int} = \rho \left(T \frac{Ds}{Dt} - \frac{Du}{Dt} \right) + \boldsymbol{\sigma} \overline{\otimes} \mathbf{D}$ est appelé *dissipation intrinsèque*.

23. dans ce cours, les apports extérieurs d'entropie sont limités à ceux dûs à la chaleur.

24. Dans ce cours, il s'agira essentiellement de conversion d'énergie mécanique en chaleur par frottement.

Avec ces définitions, le second principe s'écrit :

$$\Phi = \Phi_{int} + \Phi_{th} \geq 0$$

On admet généralement que les deux dissipations sont positives indépendamment. On écrit donc le second principe ;

$$\boxed{\Phi_{int} \geq 0 ; \Phi_{th} \geq 0}$$

La positivité de la dissipation thermique est assurée par le choix d'une loi de conduction thermique adéquate ²⁵.

La positivité de la dissipation intrinsèque montre que dans tout mouvement infinitésimal autour d'un état (la vitesse de déformation \mathbf{D} est donc arbitraire), il y a nécessairement des relations entre $\boldsymbol{\sigma}$, u et s . Les conséquences de la positivité de la dissipation intrinsèque seront développés dans le chapitre suivant.

Troisième expression du second principe:

Au lieu d'utiliser comme fonction d'état l'énergie interne massique u , on préfère parfois utiliser l'énergie libre massique ψ définie par:

$$\begin{aligned} \psi &= u - Ts \\ \frac{D\psi}{Dt} &= \frac{Du}{Dt} - s \frac{DT}{Dt} - T \frac{Ds}{Dt} \end{aligned}$$

On obtient une troisième expression du second principe, appelée *inégalité de Clausius-Duhem*:

$$\boxed{-\rho \underbrace{\left(\frac{D\psi}{Dt} + s \frac{DT}{Dt} \right)}_{\Phi_{int}} + \underbrace{\boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{D} - \frac{\mathbf{q}}{T} \otimes \mathbf{grad}T}_{\Phi_{th}} = \Phi \geq 0}$$

25. Par exemple la loi de conduction de Fourier: $\mathbf{q} = -\alpha \mathbf{grad}T$ où $\alpha > 0$ est le coefficient de conduction.

Chapitre 5

Lois de comportement

Lorsqu'on soumet un domaine matériel \mathcal{D} à des sollicitations extérieures (mécaniques et/ou thermiques), il en résulte un changement de son mouvement et de son état thermodynamique. Notamment, le tenseur des contraintes à l'intérieur de \mathcal{D} évolue. La réponse d'un milieu continu aux sollicitations extérieures dépend de la nature physique du milieu. Par exemple,

- Les solides déformables sont plus ou moins souples : si on considère deux pièces de même forme mais constituées de matériaux différents (acier et caoutchouc par exemple), les efforts pour les déformer de la même manière sont différents¹, et si on leur applique les mêmes efforts, leur déformation sera différente.
- Les liquides sont plus ou moins visqueux : il est plus facile de déplacer un objet à une certaine vitesse dans de l'eau que dans de l'huile, et les contraintes engendrées dans les deux liquides seront différentes.
- on peut faire les mêmes constatations pour différents gaz.

Les principes fondamentaux écrits dans les chapitres précédents sont valables *pour tous les milieux continus*. Il convient donc de préciser maintenant ce qui différencie le comportement de chaque milieu continu :

- Quelle est la différence entre un solide déformable, un liquide ou un gaz ?
- Qu'est ce qui différencie le comportement des différents solides déformables, liquides ou gaz ?

La réponse à la première question est donnée par le choix des variables d'état :

- L'état d'un milieu continu solide déformable élastique² est caractérisé par sa déformation à partir d'une configuration naturelle, et sa température.
- L'état d'un fluide (liquide ou gaz) newtonien³ est caractérisé par sa masse volumique et sa température⁴.
- Il existe des milieux continus de comportement plus compliqué que les deux précédents : un solide peut ne pas être élastique⁵, ou avoir un comportement visqueux⁶. Un fluide peut ne

1. Les contraintes dans le caoutchouc seront plus faibles que celles dans l'acier

2. Le sens de ce qualificatif sera évoqué plus loin

3. voir note 2

4. Le choix présenté ici n'est pas unique. si ρ et T sont choisis comme variables d'état, toutes les autres grandeurs thermodynamiques sont des fonctions d'état. Il est évidemment possible de choisir deux fonctions d'état comme variables d'état. Les anciennes variables d'état deviennent des fonctions d'état. Cette possibilité explique la profusion de formules qu'on peut trouver dans les traités de thermodynamique.

5. de la pâte à modeler par exemple

6. c'est-à-dire qu'il présente une sensibilité à la vitesse de déformation

pas être newtonnien et présenter un caractère élastique⁷.

Comme on le voit, la distinction solide/liquide ou liquide/gaz est plus floue que ne le laisse paraître le langage courant.

On appelle *loi de comportement*, une relation qui exprime le tenseur des contraintes actuel en une particule en fonction du mouvement passé et des changements d'état que la particule a subi. Les lois de comportement se traduisent par une expression mathématique du tenseur des contraintes en fonction de grandeurs mécaniques et thermodynamiques. Elle est suggérée par des essais expérimentaux sur le milieu qu'on étudie.

Cette définition est très générale, mais la loi doit respecter quelques principes fondamentaux :

- *Principe de causalité* : La contrainte actuelle ne dépend que du mouvement et des sollicitations passés ou actuels. L'ensemble des valeurs actuelles des variables d'état est généralement considéré comme un résumé suffisant de l'histoire d'une particule.
- *Principe d'universalité* qu'on appelle encore principe d'indifférence matérielle ou encore principe d'objectivité : une loi de comportement doit être la même pour tout observateur. Autrement dit, si G_i sont les valeurs des grandeurs physiques \mathcal{G}_i observés par un observateur O , et \tilde{G}_i sont les valeurs des mêmes grandeurs observées par un observateur \tilde{O} , et si la loi de comportement est une relation entre les G_i , alors, elle doit être *la même relation* entre les \tilde{G}_i ⁸.
- Dans tout mouvement, le second principe doit être respecté, c'est à dire que dans tout mouvement infinitésimal autour d'un état, la dissipation intrinsèque doit être non négative.

Chaque fois qu'on propose une loi de comportement pour un milieu continu, on se doit de vérifier que ces trois principes sont bien respectés.

Dans ce chapitre, on se contente de proposer deux modèles de milieux continus : Les milieux solides élastiques linéaires en petites déformations et les milieux fluides newtonniens. Ce ne sont que des modèles simples⁹, auxquels on ne peut demander plus qu'ils ne peuvent. Il faut garder à l'esprit que pour mieux modéliser les milieux continus réels, il faut certainement des lois de comportement plus compliquées.

5.1 Classes de milieux continus

On peut classer les milieux continus suivant les propriétés qu'ils possèdent. Ces classes ne sont pas exclusives : un milieu continu peut appartenir à plusieurs classes (ou à aucune).

- *Milieu homogène*
Un milieu continu est dit *homogène* si la loi de comportement est la même pour toutes les particules. C'est toujours le cas dans le cadre de ce cours. On se réserve toutefois la possibilité qu'il soit homogène par morceaux.
- *Milieu soumis à des liaisons internes*
Un milieu continu est dit *soumis à des liaisons internes* si le tenseur des déformations ou le tenseur des taux de déformation ne peut être quelconque.
Exemples:
Un milieu indéformable est tel que $\mathbf{L} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{D} = \mathbf{0}$.
Un milieu incompressible est tel que $\det \mathbf{F} = 1$ et $\text{Tr} \mathbf{D} = 0$

7. milieux pâteux par exemple

8. Les conséquences de cette condition sur la forme que doit prendre la loi de comportement sont étudiées dans la *théorie des fonctions isotropes*. Elles sortent du cadre de ce cours.

9. Les milieux élastiques sont une caricature des solides déformables, et les fluides newtonniens sont une caricature des fluides réels.

– *Milieu isotrope*

Un milieu continu est dit *isotrope* si la loi de comportement est *invariante par rapport aux directions matérielles*. Par exemple, un matériau fibreux (tel le bois) n'est pas isotrope.

5.2 Exemples de lois de comportement

Il n'entre pas dans le cadre de ce cours d'exposer une théorie générale des lois de comportement. Les idées exposées au début de ce chapitre montrent que l'écriture d'une loi de comportement n'est pas une chose simple ! On se contente donc de donner ici des lois de comportement simples et d'utilisation courante, et de vérifier¹⁰ qu'elles satisfont aux principes de l'introduction précédente.

5.2.1 Milieux fluides

On appelle généralement fluide¹¹ un milieu continu dont la loi de comportement est de la forme :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{G}(\mathbf{D})$$

où \mathbf{D} est le tenseur des taux de déformation (ou des vitesses de déformation), et telle que les principes généraux précédents soient respectés¹².

Fluide newtonnien

On appelle *fluide newtonien* un fluide qui a les deux propriétés suivantes :

– La fonction \mathcal{G} est affine,

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{K} \overline{\overline{\mathbf{D}}} + \boldsymbol{\sigma}_0$$

où \mathbf{K} est un tenseur du quatrième ordre. On a donc

$$\sigma_{ij} = K_{ijkl} D^{kl} + \sigma_{0ij}$$

– Le milieu fluide est isotrope: Si \mathbf{Q} est un tenseur orthogonal quelconque (une rotation), le tenseur \mathbf{K} doit être tel que :

$$\mathbf{Q}^T \overline{\overline{\mathbf{K}}} \overline{\overline{\mathbf{D}}} \overline{\overline{\mathbf{Q}}} = \mathbf{K} \overline{\overline{\mathbf{Q}^T \overline{\overline{\mathbf{D}}} \overline{\overline{\mathbf{Q}}}}} + \boldsymbol{\sigma}_0 \quad \forall \mathbf{Q} \quad \forall \mathbf{D}$$

On admettra sans démonstration¹³ que la loi de comportement la plus générale répondant à ces deux conditions est

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma} = 2\mu \mathbf{D} + (\lambda \text{Tr} \mathbf{D} - p) \mathbf{G}}$$

μ est appelé *premier coefficient de viscosité*.

λ est appelé *second coefficient de viscosité*.

Leur dimension est $[M][L]^{-1}[T]^{-1}$. L'unité SI est le *Poiseuille*.

10. partiellement !

11. Cette définition est contestable (et contestée). On peut en proposer d'autres ; il a été suggéré dans la section précédente qu'un type de milieu est déterminé par un choix de variables d'état. La définition donnée ici est suffisante pour satisfaire l'objectif de ce chapitre.

12. Les conditions détaillées auxquelles la fonction \mathcal{G} doit satisfaire sortent du cadre de ce cours. Elles sont généralement mieux précisées dans les cours sur les grandes déformations.

13. mais on peut vérifier que les propriétés énoncées sont bien vérifiées.

p est un réel appelé *pression absolue*. Le second principe de la thermodynamique¹⁴ montre que la pression absolue est positive¹⁵ et qu'elle est en général fonction de la masse volumique ρ et de la température absolue T ¹⁶.

Si la pression absolue ne dépend que de ρ , on dit que le fluide est *barotrope*.
Si les viscosités sont nulles, on dit que le fluide est *non visqueux* (on dit aussi fluide *parfait*¹⁷).

La loi de comportement d'un fluide non visqueux est donc

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{G}$$

Le tenseur des contraintes d'un fluide non visqueux est sphérique, c'est à dire que pour toute direction unitaire \mathbf{n} , on a

$$\boldsymbol{\sigma} \overline{\otimes} \mathbf{n} = -p \mathbf{n}$$

Fluide incompressible

On dit qu'un fluide est incompressible si son taux de dilatation volumique est nul. Le tenseur des taux de déformation \mathbf{D} est donc soumis à la liaison interne:

$$\text{Tr} \mathbf{D} = 0$$

ce qui est équivalent à la condition sur les vitesses

$$\text{div} \mathbf{V} = 0$$

Il est à noter que l'équation de la conservation de la masse implique que pour un fluide incompressible, on a

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0$$

La masse volumique d'une particule de fluide incompressible est donc constante dans le temps.

La loi de comportement d'un fluide *newtonien incompressible* est donc:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2 \mu \mathbf{D} - p \mathbf{G}$$

Il est intéressant de remarquer qu'un fluide newtonien incompressible n'a qu'un seul coefficient de viscosité.

5.2.2 Milieux élastiques

Les milieux élastiques sont définis par les deux propriétés suivantes¹⁸:

- Il existe pour chaque particule un état particulier appelé *état naturel*, dans lequel le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ est nul et la température est T_0 . En général, on suppose qu'il existe une configuration initiale du milieu continu dans laquelle toutes les particules sont à l'état naturel¹⁹.

14. Voir le chapitre suivant: Mécanique des fluides newtoniens.

15. La pression absolue nulle est le vide absolu.

16. Par exemple, pour un gaz parfait, on a $p = p(\rho, T) = \rho RT$.

17. Ne pas confondre avec le sens thermodynamique du mot *parfait* dans l'expression «gaz parfait». Un gaz parfait peut très bien être visqueux. Pour éviter les ambiguïtés, il vaut mieux éviter cette terminologie)

18. Là encore, la définition proposée est contestable (et contestée). On attend généralement d'un milieu élastique qu'il ait un comportement réversible, c'est-à-dire que la dissipation intrinsèque soit nulle. Les milieux qui satisfont à cette condition sont souvent appelés milieux «hyperélastiques»!! *A priori*, les milieux élastiques définis (classiquement) dans ce chapitre ne sont pas nécessairement réversibles!

19. Cette hypothèse masque en fait notre ignorance de l'état réel de chaque particule d'un corps dans sa configuration initiale.

- Le tenseur des contraintes à l'instant t ne dépend que de la déformation *mesurée à partir de la configuration initiale*.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{G}(\mathbf{L}_{t_0,t})$$

Milieu élastique linéaire

On dit que le milieu est élastique linéaire²⁰ si la fonction \mathcal{G} est affine, c'est-à-dire

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{K} \otimes \mathbf{L}$$

où \mathbf{K} est un tenseur du quatrième ordre. On a donc

$$\sigma_{ij} = K_{ijkl} L^{kl}$$

où \mathbf{L} est le tenseur des déformations de Green-Lagrange.

Milieu élastique classique

Le milieu est dit *élastique classique* s'il a les propriétés suivantes:

- Le milieu est élastique linéaire,
- Le milieu est isotrope,
- Les déformations sont petites²¹.

On admettra sans démonstration²² que la loi de comportement la plus générale répondant à ces trois conditions est

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma} = 2\mu \boldsymbol{\epsilon} + \lambda \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{G}} \quad (5.1)$$

Les coefficients λ et μ sont appelés *coefficients de Lamé*. Ils ont la dimension d'une contrainte (l'unité SI est le Pascal, $1Pa = 1N/m^2$).

Cette loi linéaire est biunivoque, on peut exprimer le tenseur des petites déformations en fonction du tenseur des contraintes de la manière suivante :

En prenant la trace de la relation tensorielle (5.1) on obtient :

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) &= 2\mu \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}) + \lambda \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}) \text{Tr}(\mathbf{G}) \\ &= 2\mu \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}) + 3\lambda \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}) \\ &= (2\mu + 3\lambda) \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}) \\ \frac{\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma})}{(2\mu + 3\lambda)} &= \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}) \end{aligned}$$

En reportant ce résultat dans (5.1), il vient :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu \boldsymbol{\epsilon} + \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{G}$$

²⁰. voir note 18

²¹. Cette hypothèse n'est pas à proprement parler une hypothèse sur le milieu continu: on peut imposer à tout milieu des déformations arbitrairement grandes (jusqu'à la rupture!). Il s'agit plutôt d'une restriction simplificatrice. Il convient donc après un calcul de vérifier *a posteriori* que les déformations trouvées sont bien petites. Si elles ne le sont pas, il faut recommencer avec une loi de comportement adéquate.

²². mais on peut vérifier que les propriétés énoncées sont bien vérifiées.

et donc :

$$\boxed{\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2\mu} \left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{G} \right)} \quad (5.2)$$

En élasticité classique, au lieu d'utiliser les coefficients de Lamé μ et λ , on préfère utiliser deux autres coefficients : le *module d'Young* E et le *coefficient de Poisson* ν , définis par

$$\left\{ E = \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{\mu + \lambda} \text{ et } \nu = \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \text{ et } \lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \right\}$$

La raison de ce changement de coefficients sera vue dans le cours d'élasticité classique : le module d'Young et le coefficient de Poisson ont des interprétations physiques commodes. E a la dimension d'une contrainte, et ν est sans dimension.

En reportant ce changement de coefficients dans la loi (5.1), on obtient :

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{1 + \nu} \left(\boldsymbol{\epsilon} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{G} \right)}$$

et la loi (5.2) devient:

$$\boxed{\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1 + \nu}{E} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{G}}$$

Milieu thermoélastique classique

En thermoélasticité classique on étudie les milieux élastiques classiques²³ *dilatables* sous l'effet d'une *variation de température*. Si on appelle T_0 le champ de température *uniforme* dans la configuration initiale, et $T(M, t)$ le champ de température *non uniforme* dans la configuration actuelle, on appelle *champ de variation de température* le champ $T(M, t) - T_0$

On suppose que l'élévation (l'abaissement) de température provoque une dilatation (contraction) *isotrope et linéaire en fonction de la variation de température*. Le tenseur des petites déformations dû à $T(M, t) - T_0$ est donc un tenseur sphérique :

$$\boldsymbol{\epsilon}_T = \alpha (T(M, t) - T_0) \mathbf{G}$$

où α est le *coefficient de dilatation thermique linéaire*.

Les deux effets de déformation, l'un dû aux contraintes, l'autre dû à la dilatation, s'ajoutent. On a donc

$$\boxed{\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1 + \nu}{E} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{G} + \alpha (T - T_0) \mathbf{G}}$$

En utilisant la même méthode que dans la section précédente, on laisse le soin au lecteur d'en déduire la loi $\boldsymbol{\sigma}$ en fonction de $\boldsymbol{\epsilon}$ et de $T - T_0$:

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{1 + \nu} \left(\boldsymbol{\epsilon} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{G} - \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} \alpha (T - T_0) \mathbf{G} \right)}$$

23. donc en petites déformations.

5.2.3 Autres lois de comportement

Les quelques lois de comportement qui précèdent sont les plus simples qu'on puisse trouver. Elles modélisent assez correctement le comportement d'un certain nombre de milieux continus. Il ne faut pas cependant oublier les hypothèses qui ont permis de les établir.

Avant de commencer à utiliser une de ces lois, il faut toujours se demander si elle est réaliste, c'est-à-dire si elle reflète correctement le comportement réel du matériau.

Certains milieux fluides ont un comportement de solide déformable (tels les milieux pâteux), certains solides déformables ont un comportement à la fois élastique et visqueux. D'autre part, beaucoup de milieux continus ont un comportement à seuil, c'est à dire que la forme de la loi change au delà de certaines limites. Enfin, beaucoup de matériaux modernes ne sont pas isotropes (matières plastiques armées, fibres de carbone noyées dans un liant, etc).

La formulation de ces lois est plus complexe, elle n'entre pas dans le cadre de ce cours. Elles seront étudiées plus tard²⁴.

24. en seconde année.

Chapitre 6

Exemple : Mécanique des fluides newtoniens

Ce chapitre n'est qu'une *introduction* à la mécanique des fluides newtoniens. Il a pour but d'en établir les équations fondamentales. L'étude détaillée de leurs conséquences, ainsi que celle des écoulements de fluides fait l'objet d'un autre cours.

En mécanique des fluides, la description des champs est pratiquement toujours la description d'Euler. Dans cette introduction, on se limite à l'utilisation de cette description.

Les équations fondamentales de la mécanique des fluides newtoniens sont celles de la mécanique des milieux continus, avec une loi de comportement de fluide linéaire isotrope. On les rappelle ici, en les détaillant quelque peu, en vue de la mécanique des fluides newtoniens. Aucun principe nouveau n'est introduit, il ne s'agit que de tirer des conséquences des équations générales de la mécanique des milieux continus.

6.1 Loi de comportement des fluides newtoniens

La loi de comportement des fluides newtoniens est:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu \mathbf{D} + (\lambda \text{Tr} \mathbf{D} - p) \mathbf{G}$$

- μ est appelé *viscosité dynamique*. Sa dimension est $[M][L]^{-1}[T]^{-1}$. L'unité SI est le *Poiseuille*. On introduit aussi :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

ν est appelé *viscosité cinématique*. Sa dimension est $[L]^2[T]^{-1}$. L'unité SI est le *Stokes*.

- λ est un second coefficient de viscosité¹. Sa dimension et son unité SI sont les mêmes que la viscosité dynamique.

Si le fluide incompressible :

Dans ce cas, on a $\text{Tr} \mathbf{D} = \text{div} \mathbf{V} = 0$, la loi de comportement devient

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu \mathbf{D} - p \mathbf{G}$$

1. On verra plus loin qu'il est une fonction de μ .

Si le fluide est non visqueux :

Dans ce cas, $\mu = \lambda = 0$, la loi de comportement devient :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{G}$$

Le tenseur des contraintes est alors un tenseur *sphérique*, et la contrainte dans une direction \mathbf{n} est :

$$\boldsymbol{\sigma} \overline{\otimes} \mathbf{n} = -p \mathbf{n} \quad \forall \mathbf{n}$$

Les contraintes dans un fluide non visqueux sont donc uniquement des *contraintes normales*. En particulier, l'action d'un fluide non visqueux sur une paroi est normale à la paroi (voir (3.1) page 38).

Si le fluide est au repos (statique des fluides) :

Dans ce cas, le champ des vitesses est nul : $\mathbf{V} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{D} = \mathbf{0}$, la loi de comportement devient :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{G}$$

avec les mêmes conséquences que pour les fluides non visqueux.

6.2 Conservation de la masse

La forme globale de la conservation de la masse est

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{D}} dm = 0$$

où \mathcal{D} est un domaine *matériel* (qu'on suit donc dans son mouvement).

On rappelle les deux formes locales équivalentes :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0 \iff \frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div}(\mathbf{V}) = 0$$

et la propriété des intégrales de masse :

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{D}} \mathcal{A} dm = \int_{\mathcal{D}} \frac{D\mathcal{A}}{Dt} dm \quad \forall \mathcal{A} \text{ différentiable}$$

Si on appelle Ω un *domaine géométrique fixe* traversé par le fluide, on peut écrire une autre forme globale de la conservation de la masse :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \rho \mathbf{V} \overline{\otimes} \mathbf{n} ds &= \int_{\Omega} \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) dv \quad (\text{théorème de la divergence}) \\ &= \int_{\Omega} -\frac{\partial \rho}{\partial t} dv \quad (\text{forme locale de la conservation de la masse}) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho dv \quad (\text{car } \Omega \text{ est fixe}) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} dm \\ \int_{\partial\Omega} \rho \mathbf{V} \overline{\otimes} \mathbf{n} ds &= -\frac{\partial m(\Omega)}{\partial t} \end{aligned}$$

Ainsi, la variation de la masse dans Ω fixe est due à la masse traversant la frontière. Le signe $-$ est dû au fait que le flux considéré est un flux *sortant*.

Si le fluide est incompressible :

Les deux premières formes locales deviennent

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{D\rho}{Dt} = 0$$

ce qui signifie que la masse volumique ρ est constante dans l'espace et dans le temps. On en tire une relation simple entre le débit volumique et le débit massique à travers une surface \mathcal{S} :

$$q_m = \int_{\mathcal{S}} \rho \mathbf{V} \otimes \mathbf{n} \, ds = \rho \int_{\mathcal{S}} \mathbf{V} \otimes \mathbf{n} \, ds = \rho q_v$$

En particulier, la forme globale de la conservation de la masse sur un domaine Ω fixe traversé par un fluide incompressible devient:

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{V} \otimes \mathbf{n} \, ds = 0$$

Pour un fluide incompressible, le débit volumique (ou massique) à travers toute la frontière $\partial\Omega$ est nul².

6.3 Equation de mouvement

Elle est déduite du principe fondamental de la mécanique:

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f}$$

On rappelle qu'elle est valable dans tout référentiel si le terme \mathbf{f} contient non seulement les forces de volume, mais aussi les accélérations d'entraînement et de Coriolis.

En utilisant la loi de comportement on obtient:

$$\begin{aligned} \rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} &= \rho \mathbf{f} + \mathbf{div} [2\mu \mathbf{D} + (\lambda \text{Tr} \mathbf{D} - p) \mathbf{G}] \\ &= \rho \mathbf{f} + 2\mu \mathbf{div} \mathbf{D} + \lambda \mathbf{div} (\text{Tr} \mathbf{D} \mathbf{G}) - \mathbf{div} (p \mathbf{G}) \\ &= \rho \mathbf{f} + \mu \mathbf{div} (\mathbf{grad} \mathbf{V} + \mathbf{grad}^t \mathbf{V}) + \lambda \mathbf{grad} (\text{div} \mathbf{V}) - \mathbf{grad} p \end{aligned}$$

En utilisant l'identité

$$\mathbf{div} \mathbf{grad}^t \mathbf{V} = \mathbf{grad} \text{div} \mathbf{V}$$

on obtient l'équation dite de *Navier-Stokes* (équation de mouvement pour un fluide newtonien):

$$\boxed{\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho \mathbf{f} - \mathbf{grad} p + \mu \Delta \mathbf{V} + (\lambda + \mu) \mathbf{grad} \text{div} \mathbf{V}}$$

6.3.1 Équation de Navier-Stokes pour des fluides particuliers**Si le fluide est incompressible :**

La conservation de la masse implique $\text{div} \mathbf{V} = 0$. L'équation de Navier-Stokes devient

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho \mathbf{f} - \mathbf{grad} p + \mu \Delta \mathbf{V}$$

². Autrement dit, pour un fluide incompressible, le débit volumique qui entre est égal au débit volumique qui sort.

Si le fluide est non visqueux :

L'équation de Navier-Stokes devient l'équation d'Euler :

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho \mathbf{f} - \mathbf{grad} p$$

6.3.2 Équation de Navier-Stokes pour des mouvements particuliers

Si le mouvement est stationnaire :

On a vu qu'en variables d'Euler, un mouvement stationnaire est caractérisé par

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0$$

Or l'accélération d'une particule est :

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{grad} \mathbf{V} \overline{\otimes} \mathbf{V}$$

L'équation de Navier-Stokes devient

$$\rho (\mathbf{grad} \mathbf{V} \overline{\otimes} \mathbf{V}) = \rho \mathbf{f} - \mathbf{grad} p + \mu \Delta \mathbf{V} + (\lambda + \mu) \mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{V}$$

Si le mouvement est irrotationnel :

Le lecteur pourra vérifier que l'accélération d'une particule peut aussi s'écrire :

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{grad} (\mathbf{V}^2) + (\mathbf{rot} \mathbf{V}) \wedge \mathbf{V}$$

Dans certains cas, il arrive qu'on puisse supposer que le mouvement est irrotationnel³, c'est-à-dire que le champ des vitesses est tel que $\mathbf{rot} \mathbf{V} = \mathbf{0}$. On peut alors affirmer qu'il existe un champ scalaire $\varphi(M)$ tel que $\mathbf{V} = \mathbf{grad} \varphi$. φ est appelé *potentiel des vitesses* et les écoulements irrotationnels sont aussi appelés *écoulements à potentiel*.

L'équation de Navier-Stokes devient

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho \mathbf{grad} (\mathbf{V}^2) = \rho \mathbf{f} - \mathbf{grad} p + \mu \Delta \mathbf{V} + (\lambda + \mu) \mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{V}$$

En introduisant le potentiel des vitesses φ , on obtient :

$$\mathbf{grad} \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho (\mathbf{grad} \varphi)^2 + p - (\lambda + 2\mu) \Delta \varphi \right) = \rho \mathbf{f}$$

Si de plus, les forces de volume par unité de masse \mathbf{f} dérivent d'un potentiel, c'est-à-dire qu'on peut écrire $\mathbf{f} = -\mathbf{grad} U$, et que le fluide est incompressible, on peut intégrer l'équation :

$$\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\mathbf{grad} \varphi)^2 + p - (\lambda + 2\mu) \Delta \varphi + \rho U = \text{constante dans l'espace}$$

Dans le cas d'un écoulement *irrotationnel, incompressible, stationnaire et non visqueux*, on en déduit la célèbre équation de Bernoulli⁴ :

$$p + \rho U + \rho \frac{\mathbf{V}^2}{2} = \text{constante dans l'espace et dans le temps}$$

3. Eventuellement dans certaines régions seulement.

4. Il est à noter qu'on peut établir une formule semblable sous des hypothèses différentes. On peut se passer de l'hypothèse d'irrotationnalité, mais la formule obtenue n'est valable que le long d'une ligne de courant. On laisse le soin au lecteur de la démontrer en projetant l'équation (vectorielle) de Navier-Stokes sur le vecteur vitesse \mathbf{V} .

(Si les forces de volume se réduisent à la pesanteur on a $U = gz$ où z est l'altitude. La quantité $p^* = p + \rho gz$ est appelée *pression génératrice* ou encore *pression étoilée*.)

Remarque: Une autre équation de Bernoulli

On peut établir une formule similaire (appelée aussi équation de Bernoulli) sous des hypothèses moins fortes : en reprenant l'expression de l'accélération

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{grad}(\mathbf{V}^2) + (\mathbf{rot} \mathbf{V}) \wedge \mathbf{V}$$

l'équation *vectorielle* de Navier-Stokes pour un fluide *stationnaire incompressible et non visqueux* s'écrit :

$$\rho \left(\frac{1}{2} \mathbf{grad}(\mathbf{V}^2) + (\mathbf{rot} \mathbf{V}) \wedge \mathbf{V} \right) = \rho \mathbf{f} - \mathbf{grad} p$$

En projetant cette égalité sur le vecteur unitaire $\mathbf{t} = \frac{\mathbf{V}}{\|\mathbf{V}\|}$ tangent à la ligne de courant, on obtient une équation scalaire *valable seulement le long d'une ligne de courant*⁵, on obtient :

$$\frac{\rho}{2} \mathbf{t} \otimes \mathbf{grad}(\mathbf{V}^2) = \mathbf{t} \otimes \rho \mathbf{f} - \mathbf{t} \otimes \mathbf{grad} p$$

soit encore, si les forces à distance dérivent d'un potentiel U :

$$\mathbf{t} \otimes \mathbf{grad} \left(p + \rho U + \rho \frac{\mathbf{V}^2}{2} \right) = 0$$

Qu'on peut encore traduire par :

$$p + \rho U + \rho \frac{\mathbf{V}^2}{2} = \text{Constante le long d'une ligne de courant}$$

Il faut bien noter que cette équation n'est qu'une intégrale première de l'équation vectorielle⁶. La valeur de la constante varie *a priori* d'une ligne de courant à l'autre⁷. Cette équation ne présente d'intérêt que si on connaît les lignes de courant.

Statique des fluides:

Si le fluide est au repos ($\mathbf{V} = \mathbf{0}$), l'équation de Navier-Stokes devient *l'équation de la statique des fluides*:

$$\mathbf{0} = \rho \mathbf{f} - \mathbf{grad} p$$

Les viscosités disparaissent. La statique des fluides est la même pour les fluides visqueux ou non visqueux.

6.4 Conservation de l'énergie

On a vu que l'équation locale du premier principe de la thermodynamique est:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \sigma \otimes \mathbf{D} - \mathbf{div} \mathbf{q} + r$$

5. On n'a plus besoin de l'hypothèse de l'irrotationnalité, mais la relation obtenue n'est plus valable dans tout l'espace.

6. On peut obtenir de manière analogue une autre intégrale première le long des lignes tourbillon, avec $\mathbf{t} = \frac{\mathbf{rot} \mathbf{v}}{\|\mathbf{rot} \mathbf{v}\|}$.

7. On rappelle que dans un écoulement stationnaire, les lignes de courant et les trajectoires sont confondues.

Les apports massiques de chaleur r sont essentiellement dûs à l'interaction avec la matière d'un rayonnement traversant le fluide. On prend très souvent $r = 0$.

Si l'écoulement est supposé partout *localement adiabatique*, c'est-à-dire que les échanges de chaleur entre les particules ne se font pas⁸, l'équation devient:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \sigma \overline{\otimes} \mathbf{D} + r$$

6.4.1 Puissance mécanique des efforts intérieurs

On a vu que le terme $\sigma \overline{\otimes} \mathbf{D}$ représente l'opposé de la densité volumique de puissance mécanique des efforts intérieurs. En tenant compte de la loi de comportement, il s'écrit:

$$\begin{aligned} \sigma \overline{\otimes} \mathbf{D} &= 2\mu \mathbf{D} \overline{\otimes} \mathbf{D} + (\lambda \text{Tr} \mathbf{D} - p) \mathbf{G} \overline{\otimes} \mathbf{D} \\ &= 2\mu \mathbf{D} \overline{\otimes} \mathbf{D} + \lambda (\text{Tr} \mathbf{D})^2 - p \text{Tr} \mathbf{D} \\ &= \frac{\mu}{2} (\mathbf{grad} \mathbf{V} + \mathbf{grad}^t \mathbf{V}) \overline{\otimes} (\mathbf{grad} \mathbf{V} + \mathbf{grad}^t \mathbf{V}) + \lambda (\text{div} \mathbf{V})^2 - p \text{div} \mathbf{V} \\ &= \mu \left(\mathbf{grad} \mathbf{V} \overline{\otimes} \mathbf{grad} \mathbf{V} + \mathbf{grad} \mathbf{V} \overline{\otimes} \mathbf{grad}^t \mathbf{V} \right) + \lambda (\text{div} \mathbf{V})^2 - p \text{div} \mathbf{V} \end{aligned}$$

Le terme $-\mu \left(\mathbf{grad} \mathbf{V} \overline{\otimes} \mathbf{grad} \mathbf{V} + \mathbf{grad} \mathbf{V} \overline{\otimes} \mathbf{grad}^t \mathbf{V} \right) - \lambda (\text{div} \mathbf{V})^2$ est appelé *puissance mécanique volumique des efforts intérieurs de viscosité*.

Le terme $p \text{div} \mathbf{V}$ est appelé *puissance mécanique volumique des efforts intérieurs de pression*.

Si le fluide est incompressible :

$$\mathcal{P}_{mec \ int / vol} = -\sigma \overline{\otimes} \mathbf{D} = -\mu \left(\mathbf{grad} \mathbf{V} \overline{\otimes} \mathbf{grad} \mathbf{V} + \mathbf{grad} \mathbf{V} \overline{\otimes} \mathbf{grad}^t \mathbf{V} \right) = -2\mu \mathbf{D} \overline{\otimes} \mathbf{D}$$

La puissance mécanique intérieure n'est due qu'à la viscosité. La puissance mécanique des efforts intérieurs de pression d'un fluide incompressible est nulle.

Si le fluide est non visqueux :

$$\mathcal{P}_{mec \ int / vol} = -\sigma \overline{\otimes} \mathbf{D} = p \text{div} \mathbf{V}$$

La puissance mécanique intérieure n'est due qu'à la pression. La puissance mécanique des efforts intérieurs de viscosité d'un fluide non visqueux est nulle.

Si le fluide est incompressible non visqueux :

$$\mathcal{P}_{mec \ int / vol} = -\sigma \overline{\otimes} \mathbf{D} = 0$$

La puissance mécanique intérieure est nulle.

6.4.2 Fluide de Stokes

On peut décomposer le tenseur des taux de déformation \mathbf{D} en partie sphérique et déviatorique:

$$\mathbf{D}_s = \frac{1}{3} \text{Tr}(\mathbf{D}) \mathbf{G} \quad \text{et} \quad \mathbf{D}_d = \mathbf{D} - \mathbf{D}_s$$

⁸. soit parce que le milieu conduit très mal la chaleur, soit parce que les échanges de chaleur n'ont pas le temps de se faire. Cette hypothèse est souvent faite en mécanique des fluides compressibles.

\mathbf{D}_s est un taux de déformation pour un mouvement de dilatation (ou compression) *sphérique*, c'est-à-dire dû à un mouvement de changement de volume sans changement de forme.

\mathbf{D}_d est un taux de déformation pour un mouvement sans variation de volume (car $\text{Tr}\mathbf{D}_d = 0$).

Le lecteur pourra montrer facilement que

$$\mathbf{D} \overline{\otimes} \mathbf{D} = \frac{1}{3} (\text{Tr}\mathbf{D})^2 + \mathbf{D}_d \overline{\otimes} \mathbf{D}_d$$

La puissance mécanique volumique des efforts intérieurs devient:

$$\mathcal{P}_{mec\ int/vol} = - \left(\lambda + \frac{2\mu}{3} \right) (\text{Tr}\mathbf{D})^2 - 2\mu \mathbf{D}_d \overline{\otimes} \mathbf{D}_d + p \text{Tr}\mathbf{D}$$

Cette décomposition permet de séparer la puissance mécanique volumique des efforts intérieurs de viscosité en deux termes:

- La puissance mécanique volumique intérieure des forces de viscosité de volume:

$$- \left(\lambda + \frac{2\mu}{3} \right) (\text{Tr}\mathbf{D})^2$$

$\lambda + \frac{2\mu}{3}$ est appelé *viscosité de volume*.

- La puissance mécanique volumique intérieure des forces de viscosité de distorsion (ou de cisaillement):

$$-2\mu \mathbf{D}_d \overline{\otimes} \mathbf{D}_d$$

On appelle *fluide de Stokes*, un fluide tel que sa viscosité de volume est nulle:

$$\lambda + \frac{2\mu}{3} = 0$$

Autrement dit, dans un fluide de Stokes, on suppose que la puissance mécanique volumique intérieure des forces de viscosité est uniquement due aux distorsions et non aux variations de volume.

Pour un fluide de Stokes, la puissance mécanique volumique des efforts intérieurs se réduit à:

$$\mathcal{P}_{mec\ int/vol} = -\mu \left(\mathbf{grad}\mathbf{V} \overline{\otimes} \mathbf{grad}\mathbf{V} + \mathbf{grad}\mathbf{V} \overline{\otimes} \mathbf{grad}^t \mathbf{V} \right) + \frac{2\mu}{3} (\text{div}\mathbf{V})^2 + p \text{div}\mathbf{V}$$

Bien que compressible, un fluide de Stokes n'a qu'un seul coefficient de viscosité.

6.5 Second principe de la thermodynamique

Le second principe se ramène essentiellement⁹ à la positivité de la dissipation intrinsèque:

$$\Phi_{int} = \rho \left(T \frac{Ds}{Dt} - \frac{Du}{Dt} \right) + \boldsymbol{\sigma} \overline{\otimes} \mathbf{D} \geq 0$$

Dans les fluides classiques, on prend généralement¹⁰ comme variables d'état la masse volumique ρ et la température T . Les fonctions d'état u et s sont donc des fonctions de ρ et T . On a donc :

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{D\rho}{Dt} + \frac{\partial u}{\partial T} \frac{DT}{Dt} \quad \text{et} \quad \frac{Ds}{Dt} = \frac{\partial s}{\partial \rho} \frac{D\rho}{Dt} + \frac{\partial s}{\partial T} \frac{DT}{Dt}$$

9. On rappelle que la positivité de la dissipation thermique est assurée par une loi de conduction adéquate, par exemple la loi de Fourier.

10. On préfère prendre ici la masse volumique ρ , plutôt que son inverse, le volume massique $v = \frac{1}{\rho}$ souvent utilisé dans les cours de thermodynamique.

La dissipation intrinsèque devient :

$$\Phi_{int} = \rho \left(T \frac{\partial s}{\partial \rho} - \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) \frac{D\rho}{Dt} + \rho \left(T \frac{\partial s}{\partial T} - \frac{\partial u}{\partial T} \right) \frac{DT}{Dt} + \sigma \overline{\otimes} \mathbf{D} \geq 0$$

Cette dissipation doit être non négative pour toute transformation infinitésimale, c'est-à-dire $\forall \frac{D\rho}{Dt}$; $\forall \frac{DT}{Dt}$; $\forall \mathbf{D}$.

Mais les quantités $\frac{D\rho}{Dt}$ et \mathbf{D} ne sont pas indépendantes, la conservation de la masse implique :

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \operatorname{div} \mathbf{V} = \rho \operatorname{Tr} \mathbf{D}$$

La dissipation intrinsèque s'écrit alors :

$$\Phi_{int} = -\rho^2 \left(T \frac{\partial s}{\partial \rho} - \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) \operatorname{Tr} \mathbf{D} + \rho \left(T \frac{\partial s}{\partial T} - \frac{\partial u}{\partial T} \right) \frac{DT}{Dt} + \sigma \overline{\otimes} \mathbf{D} \geq 0 \quad \forall \mathbf{D} \quad \forall \frac{DT}{Dt}$$

En décomposant \mathbf{D} en parties sphérique et déviatorique, on trouve facilement que :

$$\begin{aligned} \sigma \overline{\otimes} \mathbf{D} &= \operatorname{Sph}(\sigma) \overline{\otimes} \operatorname{Sph}(\mathbf{D}) + \operatorname{Dev}(\sigma) \overline{\otimes} \operatorname{Dev}(\mathbf{D}) \\ &= \operatorname{Sph}(\sigma) \overline{\otimes} \left(\frac{1}{3} \operatorname{Tr}(\mathbf{D}) \mathbf{G} \right) + \operatorname{Dev}(\sigma) \overline{\otimes} \operatorname{Dev}(\mathbf{D}) \\ &= \frac{1}{3} \operatorname{Tr}(\mathbf{D}) \operatorname{Sph}(\sigma) \overline{\otimes} \mathbf{G} + \operatorname{Dev}(\sigma) \overline{\otimes} \operatorname{Dev}(\mathbf{D}) \\ &= \frac{1}{3} \operatorname{Tr}(\mathbf{D}) \operatorname{Tr}(\sigma) + \operatorname{Dev}(\sigma) \overline{\otimes} \operatorname{Dev}(\mathbf{D}) \end{aligned}$$

Finalement la dissipation intrinsèque est :

$$\begin{aligned} \Phi_{int} &= -\rho^2 \left(T \frac{\partial s}{\partial \rho} - \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{3} \operatorname{Tr}(\sigma) \right) \operatorname{Tr} \mathbf{D} + \rho \left(T \frac{\partial s}{\partial T} - \frac{\partial u}{\partial T} \right) \frac{DT}{Dt} + \operatorname{Dev}(\sigma) \overline{\otimes} \operatorname{Dev}(\mathbf{D}) \geq 0 \\ &\quad \forall \operatorname{Tr}(\mathbf{D}) \quad \forall \operatorname{Dev}(\mathbf{D}) \quad \forall \frac{DT}{Dt} \end{aligned}$$

Dans une transformation infinitésimale arbitraire, $\operatorname{Tr}(\mathbf{D})$, $\operatorname{Dev}(\mathbf{D})$ et $\frac{DT}{Dt}$ sont indépendants. De plus,

- le terme $\frac{DT}{Dt}$ est un réel de signe quelconque
- le terme $\operatorname{Tr}(\mathbf{D})$ est un réel de signe quelconque
- le terme $\operatorname{Dev}(\mathbf{D})$ est un tenseur déviatorique quelconque.

Pour assurer la non négativité de la dissipation intrinsèque dans toute transformation infinitésimale, il faut donc :

$$\begin{aligned} T \frac{\partial s}{\partial T} - \frac{\partial u}{\partial T} &= 0 \\ T \frac{\partial s}{\partial \rho} - \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{3} \operatorname{Tr}(\sigma) &= 0 \\ \operatorname{Dev}(\sigma) \overline{\otimes} \operatorname{Dev}(\mathbf{D}) &\geq 0 \end{aligned}$$

On en déduit que pour un fluide dont les variables d'état sont ρ et T , on a nécessairement les relations :

$$\frac{\partial u}{\partial T} = T \frac{\partial s}{\partial T} \tag{6.1}$$

$$\operatorname{Tr}(\sigma) = 3 \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} - T \frac{\partial s}{\partial \rho} \right) \tag{6.2}$$

$$\operatorname{Dev}(\sigma) \overline{\otimes} \operatorname{Dev}(\mathbf{D}) \geq 0 \tag{6.3}$$

La relation (6.1) est souvent écrite sous la forme $du = T ds$ dans les traités de thermodynamique. Vérifions que la loi de comportement des fluides newtonniens ne viole pas le second principe. La trace de $\boldsymbol{\sigma}$ est :

$$\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) = (2\mu + 3\lambda) \text{Tr}(\mathbf{D}) - 3p$$

La relation (6.2) vraie pour toute transformation (et donc $\forall \text{Tr}(\mathbf{D})$) implique que

$$\begin{aligned} 2\mu + 3\lambda &= 0 \\ T \frac{\partial s}{\partial \rho} - \frac{\partial u}{\partial \rho} &= p \end{aligned}$$

La première égalité montre que seuls les fluides de Stokes satisfont au second principe pour tout mouvement¹¹.

La seconde égalité définit la pression en tant que grandeur thermodynamique¹².

Le déviateur de $\boldsymbol{\sigma}$ est :

$$\text{Dev}(\boldsymbol{\sigma}) = 2\mu \text{Dev}(\mathbf{D})$$

La relation (6.3) implique que la viscosité μ est nécessairement positive¹³.

¹¹. L'hypothèse des fluides de Stokes est donc justifiée.

¹². Pour les gaz parfaits, on a $\frac{\partial u}{\partial \rho} = 0$ (l'énergie interne ne dépend que de la température), et $\frac{\partial s}{\partial \rho} = \rho R$ (constante des gaz parfaits)

¹³. Car $\text{Dev}(\mathbf{D}) \otimes \overline{\text{Dev}(\mathbf{D})} = \|\text{Dev}(\mathbf{D})\|^2 \geq 0$

Table des matières

1	Description des milieux continus	5
1.1	Définitions élémentaires	5
1.1.1	Milieu continu	5
1.1.2	Point matériel	6
1.1.3	Remarque importante	6
1.1.4	Trajectoire	7
1.1.5	Domaines	7
1.1.6	Objet de la mécanique des milieux continus	7
1.2	Description du mouvement	8
1.2.1	Description de Lagrange	8
1.2.2	Description d'Euler	9
1.2.3	Equivalence des deux descriptions	9
1.2.4	Comparaison des deux descriptions	10
1.2.5	Détermination des trajectoires	10
1.2.6	Ligne de courant	10
1.2.7	Tube de courant	11
1.2.8	Ligne d'émission	11
1.2.9	Mouvement stationnaire	11
1.2.10	Débit volumique	12
1.2.11	Débit massique	12
1.2.12	Dérivée particulière	12
1.2.13	Accélération	13
2	Déformation d'un milieu continu	15
2.1	Tenseur des déformations	15
2.1.1	Définition	15
2.1.2	Expression de \mathbf{L} en fonction des déplacements	16
2.1.3	Interprétation géométrique du tenseur de déformation	17

2.2	Tenseur des petites déformations	20
2.3	Tenseur des taux de déformation	22
2.3.1	Définition	22
2.3.2	Taux de dilatation volumique	23
2.4	Conditions de compatibilité de \mathbf{D} (et de ϵ)	24
2.4.1	Conditions de compatibilité de ϵ	25
2.5	Intégration de \mathbf{D} et ϵ	25
3	Efforts dans les milieux continus	27
3.1	Notion de point d'application	27
3.2	Actions extérieures à un milieu continu	27
3.2.1	Intérieur et extérieur	27
3.2.2	Classification des efforts extérieurs	28
3.2.3	Torseurs résultants	30
3.3	Actions intérieures à un milieu continu, tenseur des contraintes	31
3.3.1	Efforts intérieurs, notion de contrainte	31
3.3.2	Existence du tenseur des contraintes	32
3.3.3	Conclusion	36
3.4	Définitions et notations	36
3.4.1	Contraintes normales et tangentielles	36
3.4.2	Contraintes principales	38
3.5	Conditions aux limites en efforts	38
3.6	Un complément culturel...	38
4	Equations générales de la MMC	41
4.1	Expression générale d'un principe de conservation	41
4.2	Dérivation des intégrales de volume sur un domaine matériel	42
4.3	Conservation de la masse	43
4.4	Principe fondamental de la mécanique	44
4.4.1	Actions extérieures	44
4.4.2	Énoncé du principe fondamental de la mécanique	45
4.4.3	Equation locale de mouvement	45
4.4.4	Symétrie du tenseur des contraintes	45
4.4.5	Théorème de l'énergie cinétique	46
4.4.6	Formulation intégrale de l'équation de mouvement	47
4.4.7	Théorème des débits de quantité de mouvement	48
4.5	Premier principe de la thermodynamique	49

4.5.1	Variables d'état, fonction d'état	49
4.5.2	Énoncé du premier principe	49
4.6	Second principe de la thermodynamique	50
4.6.1	Différentes expressions locales	51
5	Lois de comportement	53
5.1	Classes de milieux continus	54
5.2	Exemples de lois de comportement	55
5.2.1	Milieux fluides	55
5.2.2	Milieux élastiques	56
5.2.3	Autres lois de comportement	59
6	Exemple : Mécanique des fluides newtoniens	61
6.1	Loi de comportement des fluides newtoniens	61
6.2	Conservation de la masse	62
6.3	Equation de mouvement	63
6.3.1	Équation de Navier-Stokes pour des fluides particuliers	63
6.3.2	Équation de Navier-Stokes pour des mouvements particuliers	64
6.4	Conservation de l'énergie	65
6.4.1	Puissance mécanique des efforts intérieurs	66
6.4.2	Fluide de Stokes	66
6.5	Second principe de la thermodynamique	67