Annexe A

Compléments d'algèbre sur les tenseurs du second ordre dans $\mathcal{E}_3$

A.1 Tenseurs réels d'ordre 1

Soit $\mathbb{V}$ l'espace des vecteurs réels de dimension 3 et $\{\boldsymbol{e}_i\}$ une base.

L'espace des tenseurs d'ordre 1 est l'espace $\mathcal{L}(\mathbb{V})$ des formes linéaires sur $\mathbb{V}$. Une base de cet espace est $\{\boldsymbol{e}^i\}$ telle que $\boldsymbol{e}^i(\boldsymbol{e}_j) = \delta^i_j$. Cette base est appelée base duale de $\{\boldsymbol{e}_j\}$.

On démontre que $\mathcal{L}(\mathbb{V})$ est isomorphe à $\mathbb{V}$. Dans la suite on ne les distingue plus, et on note:

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v}$$

Un vecteur peut donc s'écrire :

$$\boldsymbol{v} = v^i\,\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{v}_j\,\boldsymbol{e}^j$$

Les v^i sont les composantes contravariantes de $\boldsymbol{v}$ et les v^j sont les composantes covariantes de $\boldsymbol{v}$.

Le produit scalaire dans $\mathbb{V}$ est alors:

$$\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v} = w^i\,v_i = w_j\,v^j = \boldsymbol{w} \overline{\otimes} \boldsymbol{v}$$

On a aussi :

$$\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v} = w^j\,v^i\,\underbrace{(\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_i)}_{G_{ij}} = w_j\,v_i\,\underbrace{(\boldsymbol{e}^j \cdot \boldsymbol{e}^i)}_{G^{ij}}$$

A.2 Tenseurs réels d'ordre 2

A.2.1 Définition

L'espace des tenseurs réels d'ordre 2 est l'espace $\mathcal{L}(\mathbb{V},\mathbb{V})$ des formes bilinéaires sur $\mathbb{V}$. Il est de dimension 9.

Les bases bases de cet espace induites par celle de $\mathbb{V}$ sont : $\{\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j\}$, $\{\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}^j\}$, $\{\boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}_j\}$ et $\{\boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}^j\}$.

Suivant la base sur laquelle on l'exprime, un tenseur d'ordre 2 a quatre sortes de composantes :

$$\boldsymbol{T} = T^{ij}\,(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) = T^i{}_j\,(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}^j) = T_i{}^j\,(\boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}_j) = T_{ij}\,(\boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}^j)$$

qu'on range habituellement dans des matrices notées $[T^{\bullet\bullet}]$, $[T^\bullet{}_\bullet]$, $[T_\bullet{}^\bullet]$ et $[T_{\bullet\bullet}]$.

A.2.2 Produit interne de tenseurs du second ordre

Le produit contracté une fois $\overline{\otimes}$ est une opération interne *non commutative* [1] de cet espace:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{T}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{U} &= \underbrace{T^{ij}\,U_{jk}}_{R^i{}_k}\,(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}^k) = \underbrace{T^{ij}\,U_j{}^k}_{R^{ik}}\,(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_k) = \underbrace{T^i{}_j\,U^{jk}}_{R^{ik}}\,(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_k) = \underbrace{T^i{}_j\,U_{jk}}_{R^i{}_k}\,(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}^k)\\ &= \underbrace{T_i{}^j\,U_{jk}}_{R_{ik}}\,(\boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}^k) = \dots\end{aligned}$$

L'élément neutre de cette opération est noté $\boldsymbol{G}$ et est appelé *tenseur métrique* :

$$\boldsymbol{G}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{G} = \boldsymbol{T}$$

Ses composantes sont :

$$\boldsymbol{G} = \underbrace{(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j)}_{G_{ij}}\,(\boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}^j) = \underbrace{(\boldsymbol{e}^i \cdot \boldsymbol{e}^j)}_{G^{ij}}\,(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) = \underbrace{(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}^j)}_{G_i{}^j=\delta_i{}^j}\,(\boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}_j) = \underbrace{(\boldsymbol{e}^i \cdot \boldsymbol{e}_j)}_{G^i{}_j=\delta^i{}_j}\,(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}^j)$$

A.2.3 Produit scalaire de deux tenseurs du second ordre

Le produit contracté deux fois $\overline{\overline{\otimes}}$ est un produit scalaire de cet espace :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}\,\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{U} &= T^{ij}\,U_{ij} && = T^i{}_j\,U_i{}^j && = T_i{}^j\,U^i{}_j && = T_{ij}\,U^{ij}\\ &= \operatorname{Tr}\left([T^{\bullet\bullet}]\,[U_{\bullet\bullet}]^T\right) && = \operatorname{Tr}\left([T^\bullet{}_\bullet]\,[U_\bullet{}^\bullet]^T\right) && = \operatorname{Tr}\left([T_\bullet{}^\bullet]\,[U^\bullet{}_\bullet]^T\right) && = \operatorname{Tr}\left([T_{\bullet\bullet}]\,[U^{\bullet\bullet}]^T\right)\end{aligned}$$

Il induit une norme dans cet espace :

$$||\boldsymbol{T}|| = \sqrt{\boldsymbol{T}\,\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{T}}$$

A.2.4 Produit mixte de trois tenseurs du second ordre

On définit le produit mixte de trois tenseurs du second ordre : $\boldsymbol{A}\,\overline{\overline{\otimes}}\,(\boldsymbol{B}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{C})$. Le résultat est un scalaire. Il est facile de montrer les propriétés suivantes :

$$\boldsymbol{A}\,\overline{\overline{\otimes}}\,(\boldsymbol{B}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{B}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{C})\,\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{A} \quad \text{(commutativité de } \overline{\overline{\otimes}}) \tag{A.1}$$

$$\boldsymbol{A}\,\overline{\overline{\otimes}}\,(\boldsymbol{B}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}^T\,\overline{\overline{\otimes}}\,\left(\boldsymbol{C}^T\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{B}^T\right) \quad \text{(transposition des opérandes de } \overline{\overline{\otimes}}) \tag{A.2}$$

$$\boldsymbol{A}\,\overline{\overline{\otimes}}\,(\boldsymbol{B}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{C}) = \left(\boldsymbol{B}^T\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{A}\right)\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{C} \quad \text{(«transport» de } \boldsymbol{B} \text{ à travers } \overline{\overline{\otimes}}) \tag{A.3}$$

$$\boldsymbol{A}\,\overline{\overline{\otimes}}\,(\boldsymbol{B}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{C}) = \left(\boldsymbol{A}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{C}^T\right)\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{B} \quad \text{(«transport» de } \boldsymbol{C} \text{ à travers } \overline{\overline{\otimes}}) \tag{A.4}$$

1. On verra plus loin que cette commutativité est rétablie si les opérandes sont symétriques et s'ils ont une base propre commune.

A.2.5 Endomorphisme de $\mathbb{V}$ associé à un tenseur du second ordre

On démontre que $\mathcal{L}(\mathbb{V},\mathbb{V})$ est isomorphe à l'espace des endomorphismes linéaires de $\mathbb{V}$. Dans la suite on ne les distingue plus et $\mathcal{L}(\mathbb{V},\mathbb{V})$ est noté $\mathbb{V}\otimes\mathbb{V}$.
L'endomorphisme linéaire associé à $\boldsymbol{T}$ est :

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{T}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{v} = T^{ij}\,v_j\boldsymbol{e}_i = T^i{}_j\,v^j\boldsymbol{e}_i = T_i{}^j\,v_j\boldsymbol{e}^i = T_{ij}\,v^j\boldsymbol{e}^i$$

L'endomorphisme linéaire associé à $\boldsymbol{G}$ est l'identité :

$$\boldsymbol{G}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$$

A.2.6 Produits tensoriels de tenseurs du second ordre

Soient $\boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{R}$ deux tenseurs du second ordre et quatre vecteurs $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$.
On définit deux produits tensoriels pour les tenseurs du second ordre, qui donnent tous les deux un tenseur du quatrième ordre :

Le produit tensoriel $\otimes$:

$$(\boldsymbol{T}\otimes\boldsymbol{R})\,(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{R}(\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})$$
$$(\boldsymbol{T}\otimes\boldsymbol{R})^{ijkm} = T^{ij}\,R^{km}$$

Le produit tensoriel $\boxtimes$:

$$(\boldsymbol{T}\boxtimes\boldsymbol{R})\,(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})\,\boldsymbol{R}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d})$$
$$(\boldsymbol{T}\boxtimes\boldsymbol{R})^{ijkm} = T^{ik}\,R^{jm}$$

On généralise sans difficulté aux produits tensoriels de n tenseurs du second ordre, qui donnent un tenseur d'ordre $2n$:

$$(\boldsymbol{T}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{T}_n)\,(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b}_1\ldots,\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{b}_n) = \boldsymbol{T}_1\,(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b}_1)\,\ldots\,\boldsymbol{T}_n\,(\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{b}_n)$$
$$(\boldsymbol{T}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{T}_n)^{i_1j_1\ldots i_nj_n} = (T_1)^{i_1j_1}\,\ldots\,(T_n)^{i_nj_n}$$
$$(\boldsymbol{T}_1\boxtimes\cdots\boxtimes\boldsymbol{T}_n)\,(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_n) = \boldsymbol{T}_1\,(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b}_1)\,\ldots\,\boldsymbol{T}_n\,(\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{b}_n)$$
$$(\boldsymbol{T}_1\boxtimes\cdots\boxtimes\boldsymbol{T}_n)^{i_1\ldots i_nj_1\ldots j_n} = (T_1)^{i_1j_1}\,\ldots\,(T_n)^{i_nj_n}$$

Propriétés :

On dit qu'un tenseur d'ordre 4 possède la *symétrie majeure* si $\mathbb{K}^{ijkl} = \mathbb{K}^{klij}$.
On dit qu'un tenseur d'ordre 4 possède la *symétrie mineure gauche* si $\mathbb{K}^{ijkl} = \mathbb{K}^{jikl}$.
On dit qu'un tenseur d'ordre 4 possède la *symétrie mineure droite* si $\mathbb{K}^{ijkl} = \mathbb{K}^{ijlk}$.

Si $\boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{R}$ sont des tenseurs du second ordre,

$(\boldsymbol{T}\otimes\boldsymbol{T})^{ijkl} = (\boldsymbol{T}\otimes\boldsymbol{T})^{klij}$ (symétrie majeure).
Si $\boldsymbol{T}$ est symétrique, $(\boldsymbol{T}\otimes\boldsymbol{T})^{ijkl} = (\boldsymbol{T}\otimes\boldsymbol{T})^{jikl}$ et $(\boldsymbol{T}\otimes\boldsymbol{T})^{ijkl} = (\boldsymbol{T}\otimes\boldsymbol{T})^{ijlk}$
$(\boldsymbol{T}\otimes\boldsymbol{R}+\boldsymbol{R}\otimes\boldsymbol{T})^{ijkl} = (\boldsymbol{T}\otimes\boldsymbol{R}+\boldsymbol{R}\otimes\boldsymbol{T})^{klij}$ (symétrie majeure)
Si $\boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{R}$ sont symétriques, $(\boldsymbol{T}\otimes\boldsymbol{R}+\boldsymbol{R}\otimes\boldsymbol{T})^{ijkl} = (\boldsymbol{T}\otimes\boldsymbol{R}+\boldsymbol{R}\otimes\boldsymbol{T})^{jilk}$

$(\boldsymbol{T}\boxtimes\boldsymbol{T})^{ijkl} = (\boldsymbol{T}\boxtimes\boldsymbol{T})^{jilk}$ (composition des symétries mineures).
Si $\boldsymbol{T}$ est symétrique, $(\boldsymbol{T}\boxtimes\boldsymbol{T})^{ijkl} = (\boldsymbol{T}\boxtimes\boldsymbol{T})^{klij}$ (symétrie majeure).
$(\boldsymbol{T}\boxtimes\boldsymbol{R}+\boldsymbol{R}\boxtimes\boldsymbol{T})^{ijkl} = (\boldsymbol{T}\boxtimes\boldsymbol{R}+\boldsymbol{R}\boxtimes\boldsymbol{T})^{jilk}$ (composition des symétries mineures).
Si $\boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{R}$ sont symétriques, $(\boldsymbol{T}\boxtimes\boldsymbol{R}+\boldsymbol{R}\boxtimes\boldsymbol{T})^{ijkl} = (\boldsymbol{T}\boxtimes\boldsymbol{R}+\boldsymbol{R}\boxtimes\boldsymbol{T})^{klij}$ (symétrie majeure).

Si $\boldsymbol{S}$ est un tenseur du second ordre, on a les propriétés suivantes:

$$(\boldsymbol{T}\otimes\boldsymbol{R})\,\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{S}=\boldsymbol{T}\,\left(\boldsymbol{R}\,\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{S}\right) \qquad \boldsymbol{S}\,\overline{\overline{\otimes}}\,(\boldsymbol{T}\otimes\boldsymbol{R})=\left(\boldsymbol{S}\,\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{T}\right)\,\boldsymbol{R} \tag{A.5}$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{T}\boxtimes\boldsymbol{R})\,\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{S}&=\boldsymbol{T}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{S}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{R}^T \qquad & \boldsymbol{S}\,\overline{\overline{\otimes}}\,(\boldsymbol{T}\boxtimes\boldsymbol{R})&=\boldsymbol{T}^T\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{S}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{R}\\ &=\left(\boldsymbol{R}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{S}^T\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{T}^T\right)^T & &=\left(\boldsymbol{R}^T\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{S}^T\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{T}\right)^T\end{aligned} \tag{A.6}$$

$$(\boldsymbol{T}\boxtimes\boldsymbol{R})\,\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{S}=\left((\boldsymbol{R}\boxtimes\boldsymbol{T})\,\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{S}^T\right)^T \qquad \boldsymbol{S}\,\overline{\overline{\otimes}}\,(\boldsymbol{T}\boxtimes\boldsymbol{R})=\left(\boldsymbol{S}^T\,\overline{\overline{\otimes}}\,(\boldsymbol{R}\boxtimes\boldsymbol{T})\right)^T \tag{A.7}$$

Un calcul utile:

Considérons le tenseur d'ordre 8 : $\mathbb{Q}=\boldsymbol{Q}\boxtimes\boldsymbol{Q}\boxtimes\boldsymbol{Q}\boxtimes\boldsymbol{Q}$, dont les composantes sont

$$\mathbb{Q}^{i_1 i_2 i_3 i_4 j_1 j_2 j_3 j_4}=Q^{i_1 j_1}\,Q^{i_2 j_2}\,Q^{i_3 j_3}\,Q^{i_4 j_4}$$

et le tenseur d'ordre 4 : $\mathbb{P}=\boldsymbol{T}\boxtimes\boldsymbol{R}$ dont les composantes sont :

$$\mathbb{P}_{j_1 j_2 j_3 j_4}=T_{j_1 j_3}\,R_{j_2 j_4}$$

On se propose de calculer le tenseur d'ordre 4 : $\mathbb{S}=\mathbb{Q}\,\overline{\otimes}^4\,\mathbb{P}$.

$$\begin{aligned}\mathbb{S}^{i_1 i_2 i_3 i_4}&=\mathbb{Q}^{i_1 i_2 i_3 i_4 j_1 j_2 j_3 j_4}\,\mathbb{P}_{j_1 j_2 j_3 j_4}\\ &=Q^{i_1 j_1}\,Q^{i_2 j_2}\,Q^{i_3 j_3}\,Q^{i_4 j_4}\,T_{j_1 j_3}\,R_{j_2 j_4}\\ &=(Q^{i_1 j_1}\,Q^{i_3 j_3}\,T_{j_1 j_3})\,(Q^{i_2 j_2}\,Q^{i_4 j_4}\,R_{j_2 j_4})\\ &=\left((\boldsymbol{Q}\boxtimes\boldsymbol{Q})\,\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{T}\right)^{i_1 i_3}\,\left((\boldsymbol{Q}\boxtimes\boldsymbol{Q})\,\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{R}\right)^{i_2 i_4}\\ &=\left[\left((\boldsymbol{Q}\boxtimes\boldsymbol{Q})\,\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{T}\right)\boxtimes\left((\boldsymbol{Q}\boxtimes\boldsymbol{Q})\,\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{R}\right)\right]^{i_1 i_2 i_3 i_4}\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$(\boldsymbol{Q}\boxtimes\boldsymbol{Q}\boxtimes\boldsymbol{Q}\boxtimes\boldsymbol{Q})\,\overline{\otimes}^4\,(\boldsymbol{T}\boxtimes\boldsymbol{R})=\left((\boldsymbol{Q}\boxtimes\boldsymbol{Q})\,\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{T}\right)\boxtimes\left((\boldsymbol{Q}\boxtimes\boldsymbol{Q})\,\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{R}\right) \tag{A.8}$$

On montrerait de même que :

$$(\boldsymbol{Q}\boxtimes\boldsymbol{Q}\boxtimes\boldsymbol{Q}\boxtimes\boldsymbol{Q})\,\overline{\otimes}^4\,(\boldsymbol{T}\otimes\boldsymbol{R})=\left((\boldsymbol{Q}\boxtimes\boldsymbol{Q})\,\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{T}\right)\otimes\left((\boldsymbol{Q}\boxtimes\boldsymbol{Q})\,\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{R}\right) \tag{A.9}$$

et si $\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{Q}^T$, c'est-à- dire $\boldsymbol{Q}$ orthogonal:

$$(\boldsymbol{Q}\boxtimes\boldsymbol{Q})\,\overline{\otimes}^2\,(\boldsymbol{T}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{R})=\left((\boldsymbol{Q}\boxtimes\boldsymbol{Q})\,\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{T}\right)\,\overline{\otimes}\,\left((\boldsymbol{Q}\boxtimes\boldsymbol{Q})\,\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{R}\right) \tag{A.10}$$

On généralise sans difficulé à des produits contractés de tenseurs d'ordre supérieur : soient $\boldsymbol{R}$ un tenseur d'ordre r, $\boldsymbol{S}$ un tenseur d'ordre s et $\boldsymbol{Q}$ un tenseur d'ordre 2 orthogonal, on a :

$$\underbrace{(\boldsymbol{Q}\boxtimes\cdots\boxtimes\boldsymbol{Q})}_{r+s-2p\text{ fois}}\,\overline{\otimes}^s\,\left(\boldsymbol{R}\,\overline{\otimes}^p\,\boldsymbol{S}\right)=\left(\underbrace{(\boldsymbol{Q}\boxtimes\cdots\boxtimes\boldsymbol{Q})}_{r\text{ fois}}\,\overline{\otimes}^r\,\boldsymbol{R}\right)\,\overline{\otimes}^p\,\left(\underbrace{(\boldsymbol{Q}\boxtimes\cdots\boxtimes\boldsymbol{Q})}_{s\text{ fois}}\,\overline{\otimes}^s\,\boldsymbol{S}\right) \tag{A.11}$$

A.2.7 Dérivée d'un tenseur du second ordre

Soit un tenseur du second ordre fonction d'un paramètre t :

$$\boldsymbol{T}(t) = T^{ij}(t)\ \ (\boldsymbol{e}_i(t) \otimes \boldsymbol{e}_j(t))$$

Sa dérivée par rapport à t est

$$\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial t} = \frac{\partial T^{ij}}{\partial t}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) + T^{ij}\left(\frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial t} \otimes \boldsymbol{e}_j\right) + T^{ij}\left(\boldsymbol{e}_i \otimes \frac{\partial \boldsymbol{e}_j}{\partial t}\right) \tag{A.12}$$

Si les composantes sont données dans une base $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ *fixe* (c'est-à-dire que les $\boldsymbol{e}_i$ sont indépendants de t), les deux derniers termes disparaissent.

A.3 Dérivée de produits de tenseurs du second ordre

On montre facilement les dérivées de produits suivantes :

– produit tensoriel (le résultat est un tenseur d'ordre 4)

$$\frac{\partial(\boldsymbol{T} \otimes \boldsymbol{R})}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial t} \otimes \boldsymbol{R} + \boldsymbol{T} \otimes \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial t}$$

– produit tensoriel contracté une fois (le résultat est un tenseur d'ordre 2)

$$\frac{\partial(\boldsymbol{T} \overline{\otimes} \boldsymbol{R})}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial t} \overline{\otimes} \boldsymbol{R} + \boldsymbol{T} \overline{\otimes} \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial t} \tag{A.13}$$

en particulier,

$$\frac{\partial \boldsymbol{T} \overline{\otimes} \boldsymbol{T}}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial t} \overline{\otimes} \boldsymbol{T} + \boldsymbol{T} \overline{\otimes} \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial t} \qquad \neq 2\,\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial t} \overline{\otimes} \boldsymbol{T}$$

La non commutativité de $\overline{\otimes}$ invalide la règle habituelle sur les réels.

– produit tensoriel contracté deux fois (le résultat est un tenseur d'ordre 0)

$$\frac{\partial \boldsymbol{T} \overline{\overline{\otimes}} \boldsymbol{R}}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial t} \overline{\overline{\otimes}} \boldsymbol{R} + \boldsymbol{T} \overline{\overline{\otimes}} \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial t}$$

en particulier,

$$\frac{\partial \boldsymbol{T} \overline{\overline{\otimes}} \boldsymbol{T}}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial t} \overline{\overline{\otimes}} \boldsymbol{T} + \boldsymbol{T} \overline{\overline{\otimes}} \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial t} = 2\,\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial t} \overline{\overline{\otimes}} \boldsymbol{T}$$

car le produit scalaire $\overline{\overline{\otimes}}$ est commutatif.
On en déduit la dérivée de la norme d'un tenseur du second ordre:

$$\frac{\partial ||\boldsymbol{T}||}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial t} \overline{\overline{\otimes}} \frac{\boldsymbol{T}}{||\boldsymbol{T}||}$$

A.3.1 Puissance entière d'un tenseur du second ordre

Elle est définie par

$$\boldsymbol{T}^n = \underbrace{\boldsymbol{T} \overline{\otimes} \ldots \overline{\otimes} \boldsymbol{T}}_{n \text{ fois}} \quad n \in \mathbb{N}$$

On pose par convention $\boldsymbol{T}^0 = \boldsymbol{G}$

A.3.2 Dérivée de la puissance entière d'un tenseur du second ordre

En appliquant la règle de dérivation (A.13), on obtient :

$$\frac{\partial \boldsymbol{T}^n}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{T}^{i-1} \overline{\otimes} \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial t} \overline{\otimes} \boldsymbol{T}^{n-i}$$

A.3.3 Inverse d'un tenseur du second ordre

L'inverse d'un tenseur $\boldsymbol{T}$ est le tenseur $\boldsymbol{U}$ tel que $\boldsymbol{T} \overline{\otimes} \boldsymbol{U} = \boldsymbol{G}$

$\boldsymbol{U}$ est généralement noté[2] $\boldsymbol{T}^{-1}$.

Un tel tenseur n'existe pas toujours ! Pour que $\boldsymbol{T}^{-1}$ existe il faut que son déterminant soit non nul.

A.3.4 Exponentielle d'un tenseur du second ordre

L'exponentielle d'un tenseur est le tenseur défini par :

$$\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{T}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{T}^n}{n!} \tag{A.14}$$

On doit noter que la dérivée de l'exponentielle d'un tenseur du second ordre *ne suit pas les règles habituelles de dérivation de l'exponentielle des réels* :

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{T}(t)}}{\partial t} \neq \frac{\partial T(t)}{\partial t} \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{T}(t)}$$

car la non commutativité de $\overline{\otimes}$ implique que

$$\frac{\partial \boldsymbol{T}^n}{\partial t} \neq n \, \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial t} \overline{\otimes} \boldsymbol{T}^{n-1}$$

et donc que la dérivée de (A.14) ne peut pas se factoriser.

De même, (et pour la même raison[3]) :

$$\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{T}_1 + \boldsymbol{T}_2} \neq \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{T}_1} \, \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{T}_2}$$

On verra plus loin que cette propriété est rétablie si les deux tenseurs $\boldsymbol{T}_1$ et $\boldsymbol{T}_2$ commutent dans le produit $\overline{\otimes}$, c'est-à-dire s'il existe une base propre commune aux deux tenseurs.

A.4 Invariants des tenseurs réels du second ordre

Les coefficients du polynôme caractéristique de la matrice des composantes d'un tenseur du second ordre sont des invariants, c'est à dire que leur valeur est la même dans toute base[4]. On pose :

$$\det(\boldsymbol{T} - \lambda \, \boldsymbol{G}) = -\lambda^3 + T_I \, \lambda^2 - T_{II} \, \lambda + T_{III} \tag{A.15}$$

2. Cette notation ne prendra tout son sens que pour les tenseurs symétriques définis positifs. Voir section A.7 page 200.

3. On peut s'en convaincre facilement en examinant le terme de degré 3 du développement de $e^{\boldsymbol{T}_1 + \boldsymbol{T}_2}$: $(\boldsymbol{T}_1 + \boldsymbol{T}_2)^3$ contient le terme $\boldsymbol{T}_1 \boldsymbol{T}_2 \boldsymbol{T}_1$ qui ne peut en aucun cas figurer dans le produit des développements de $e^{\boldsymbol{T}_1}$ et $e^{\boldsymbol{T}_2}$

4. à condition de normaliser le polynôme en mettant à 1 le coefficient de plus haut deg?e.

où

$$
\begin{aligned}
T_I &= T^1{}_1 + T^2{}_2 + T^3{}_3 = \operatorname{Tr}\boldsymbol{T} = \operatorname{Tr}\left[T^i{}_j\right] \\
T_{II} &= \left(T^1{}_1 + T^2{}_2 - T^1{}_2 + T^2{}_1\right) + \left(T^2{}_2 + T^3{}_3 - T^2{}_3 + T^3{}_2\right) + \left(T^3{}_3 + T^1{}_1 - T^1{}_3 + T^3{}_1\right) \\
T_{III} &= \det \boldsymbol{T} = \det\left[T^i{}_j\right]
\end{aligned}
$$

T_I, T_{II} et T_{III} sont respectivement apppelés le premier, le second et le troisième invariant. Ces quantités sont appelées invariants car les combinaisons de composantes qui les définissent sont indépendantes de la base. Toute fonction de ces invariants est un invariant.

Les valeurs propres sont solution de l'équation (A.15), qui est de degré 3. Elles sont donc des invariants[5]. Il y a donc au moins une valeur propre réelle. Les deux autres sont soit toutes les deux réelles, soit toutes les deux complexes, mais conjuguées.
Les vecteurs propres associés à des valeurs propres complexes conjuguées, sont des vecteurs complexes conjugués.

On rappelle l'identité de Cayley-Hamilton: Tout tenseur du second ordre est solution de son polynôme caractéristique :

$$
-\boldsymbol{T}^3 + T_I\,\boldsymbol{T}^2 - T_{II}\,\boldsymbol{T} + T_{III}\,\boldsymbol{G} = \boldsymbol{0} \tag{A.16}
$$

Toute puissance entière supérieure à 2 de $\boldsymbol{T}$ peut donc s'exprimer en fonction de $\boldsymbol{T}^2$, $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{G}$ et des invariants.

Il est facile de vérifier que :

$$
T_{II} = \frac{1}{2}\left[\left(\operatorname{Tr}\boldsymbol{T}\right)^2 - \operatorname{Tr}\left(\boldsymbol{T}^2\right)\right]
$$

En prenant la trace de l'identité de Cayley-Hamilton, on a une autre expression du troisième invariant :

$$
T_{III} = \frac{1}{3}\left[\operatorname{Tr}\left(\boldsymbol{T}^3\right) - \frac{3}{2}\operatorname{Tr}\boldsymbol{T}\ \operatorname{Tr}\left(\boldsymbol{T}^2\right) + \frac{1}{2}\left(\operatorname{Tr}\boldsymbol{T}\right)^3\right] = \det \boldsymbol{T} \tag{A.17}
$$

En résumé on a

$$
\begin{aligned}
T_I &= \operatorname{Tr}\boldsymbol{T} = \operatorname{Tr}\left[T^\bullet{}_\bullet\right] = \operatorname{Tr}\left[T_\bullet{}^\bullet\right] && \text{(A.18)} \\
T_{II} &= \frac{1}{2}\left[\left(\operatorname{Tr}\boldsymbol{T}\right)^2 - \operatorname{Tr}\left(\boldsymbol{T}^2\right)\right] && \text{(A.19)} \\
T_{III} &= \det \boldsymbol{T} = \det\left[T^\bullet{}_\bullet\right] = \det\left[T_\bullet{}^\bullet\right] && \text{(A.20)}
\end{aligned}
$$

Les trois invariants peuvent donc s'exprimer en fonction des traces des trois premières puissances de $\boldsymbol{T}$.

Inversement on peut exprimer les traces des puissances entières de $\boldsymbol{T}$ en fonction des invariants :

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Tr}\boldsymbol{T} &= T_I && \text{(A.21)} \\
\operatorname{Tr}\left(\boldsymbol{T}^2\right) &= T_I^2 - 2\,T_{II} && \text{(A.22)} \\
\operatorname{Tr}\left(\boldsymbol{T}^3\right) &= 3\,T_{III} - 3\,T_I\,T_{II} + T_I^3 && \text{(A.23)}
\end{aligned}
$$

(On peut continuer en utilisant l'identité de Cayley-Hamilton autant de fois que nécessaire : $\operatorname{Tr}\boldsymbol{T}^n$ pour $n > 3$ peut toujours s'exprimer en fonction de T_I, T_{II}, T_{III}).

$\left\{\operatorname{Tr}\boldsymbol{T},\ \operatorname{Tr}\left(\boldsymbol{T}^2\right),\ \operatorname{Tr}\left(\boldsymbol{T}^3\right)\right\}$ constituent donc un système d'invariants équivalent à $\{T_I, T_{II}, T_{III}\}$.

5. Mais leur expression algébrique en fonction des composantes du tenseur est généralement compliquée.

A.5 Tenseurs antisymétriques réels du second ordre

A.5.1 Définitions

Un tenseur $\boldsymbol{A}$ est antisymétrique si pour tout couple de vecteurs $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ on a l'égalité :

$$\boldsymbol{X} \overline{\otimes} \boldsymbol{A} \overline{\otimes} \boldsymbol{Y} = -\boldsymbol{Y} \overline{\otimes} \boldsymbol{A} \overline{\otimes} \boldsymbol{X}$$

On appelle *vecteur adjoint* au tenseur antisymétrique $\boldsymbol{A}$, le vecteur défini par :

$$\boldsymbol{a} = \operatorname{adj}(\boldsymbol{A}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{E} \overline{\overline{\otimes}} \boldsymbol{A}$$

où $\boldsymbol{E}$ est le tenseur d'orientation, c'est-à-dire le tenseur d'ordre 3 tel que

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}) = (\boldsymbol{X} \cdot (\boldsymbol{Y} \wedge \boldsymbol{Z}))$$

Inversement, à tout vecteur $\boldsymbol{a}$, on peut associer le tenseur antisymétrique $\boldsymbol{E} \overline{\otimes} \boldsymbol{a}$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E} \overline{\otimes} \boldsymbol{a} &= \boldsymbol{E} \overline{\otimes} \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{E} \overline{\overline{\otimes}} \boldsymbol{A} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(e^{ijk} \, e_{klm} \, A^{lm} \right) \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \\
&= \frac{1}{2} \left(\left(\delta^i_l \delta^j_m - \delta^i_m \delta^j_l \right) A^{lm} \right) \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \\
&= \frac{1}{2} \left(A^{ij} - A^{ji} \right) \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \\
&= \frac{1}{2} \left(A^{ij} + A^{ij} \right) \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \\
&= \boldsymbol{A}
\end{aligned}$$

Il existe donc un isomorphisme bijectif entre les tenseurs antisymétriques du second ordre et les vecteurs.

Il est facile de vérifier que l'endomorphisme associé à $\boldsymbol{A}$ est :

$$\boldsymbol{A} \overline{\otimes} \boldsymbol{X} = \boldsymbol{E} \overline{\otimes} \boldsymbol{X} = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{X} \quad \forall \boldsymbol{X} \in \mathbb{V}$$

et que les invariants de $\boldsymbol{A}$ sont :

$$\begin{aligned}
A_I &= 0 \\
A_{II} &= ||\boldsymbol{a}||^2 = \frac{1}{2} ||\boldsymbol{A}||^2 = -\frac{1}{2} \operatorname{Tr} \boldsymbol{A}^2 \\
A_{III} &= 0
\end{aligned}$$

A.5.2 Valeurs propres et vecteurs propres d'un tenseur antisymétrique

Son polynôme caractéristique est donc:

$$-\lambda^3 - ||\boldsymbol{a}||^2 \, \lambda = 0$$

Ses valeurs propres sont donc $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = i \, ||\boldsymbol{a}||$ et $\lambda_3 = -i \, ||\boldsymbol{a}||$.

La relation $\boldsymbol{A} \overline{\otimes} \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ montre que $\boldsymbol{a}$ est le vecteur propre associé à $\lambda_1 = 0$ (le vecteur $\boldsymbol{a}$ engendre le noyau de $\boldsymbol{A}$).

Le vecteur propre complexe $\boldsymbol{b}+i\,\boldsymbol{c}$, ($\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$ sont des vecteurs *réels*) associé à $i||\boldsymbol{a}||$, est solution de

$$(\boldsymbol{E}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{a})\;\overline{\otimes}\;(\boldsymbol{b}+i\,\boldsymbol{c}) = i\,||\boldsymbol{a}||\;(\boldsymbol{b}+i\,\boldsymbol{c})$$

En séparant parties réelles et imaginaires :

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{E}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{a})\;\overline{\otimes}\,\boldsymbol{b} &= -||\boldsymbol{a}||\,\boldsymbol{c}\\ (\boldsymbol{E}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{a})\;\overline{\otimes}\,\boldsymbol{c} &= ||\boldsymbol{a}||\,\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

soit encore :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{a} &= -||\boldsymbol{a}||\,\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{a} &= ||\boldsymbol{a}||\,\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

ce qui montre que les 3 vecteurs réels $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$ sont orthogonaux entre eux et forment une base directe.

Donc, si on choisit *arbitrairement* deux vecteurs réels $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$ orthogonaux entre eux et orthogonaux à la direction propre réelle $\boldsymbol{a}$ de $\boldsymbol{A}$, le vecteur complexe $\boldsymbol{b}+i\,\boldsymbol{c}$ est la direction propre associée à la valeur propre $i||\boldsymbol{a}||$.
Le vecteur propre associé à $-i||\boldsymbol{a}||$ est $\overline{\boldsymbol{b}+i\,\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{b}-i\,\boldsymbol{c}$.

Les composantes d'un tenseur antisymétrique $\boldsymbol{A}$ dans toute base orthonormée réelle ayant comme premier vecteur la direction propre réelle $\frac{\boldsymbol{a}}{||\boldsymbol{a}||}$ sont :

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \epsilon||\boldsymbol{a}||\\ 0 & -\epsilon||\boldsymbol{a}|| & 0\end{pmatrix}\quad\text{avec}\quad \epsilon=\pm 1$$

c'est-à-dire

$$\boldsymbol{A} = \epsilon||\boldsymbol{a}||\;(\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{c}-\boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{b})$$

A.5.3 Dérivée d'un tenseur antisymétrique

La dérivée d'un tenseur antisymétrique est un tenseur antisymétrique[6].

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(t) &= \boldsymbol{E}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{a}(t)\\ \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} &= \boldsymbol{E}\,\overline{\otimes}\,\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial t}\end{aligned}$$

A.5.4 Exponentielle d'un tenseur antisymétrique du second ordre.

Pour un tenseur antisymétrique du second ordre $\boldsymbol{A}$, l'identité de Cayley-Hamilton se réduit à :

$$\boldsymbol{A}^3 = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Tr}\boldsymbol{A}^2\right)\boldsymbol{A}$$

6. Pour s'en convaincre il suffit de l'exprimer sur une base fixe.

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}^4 &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{Tr}\boldsymbol{A}^2\right)\boldsymbol{A}^2 \\
\boldsymbol{A}^5 &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{Tr}\boldsymbol{A}^2\right)\boldsymbol{A}^3 = \frac{1}{2^2}\left(\mathrm{Tr}\boldsymbol{A}^2\right)^2\boldsymbol{A} \\
\boldsymbol{A}^6 &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{Tr}\boldsymbol{A}^2\right)\boldsymbol{A}^4 = \frac{1}{2^2}\left(\mathrm{Tr}\boldsymbol{A}^2\right)^2\boldsymbol{A}^2 \\
\ldots &= \ldots \\
\boldsymbol{A}^{2n+1} &= \frac{1}{2^n}\left(\mathrm{Tr}\boldsymbol{A}^2\right)^n\boldsymbol{A} \\
\boldsymbol{A}^{2n+2} &= \frac{1}{2^n}\left(\mathrm{Tr}\boldsymbol{A}^2\right)^n\boldsymbol{A}^2
\end{aligned}$$

où $\mathrm{Tr}\boldsymbol{A}^2 = -2||\boldsymbol{a}||^2$ si $\boldsymbol{a}$ est le vecteur adjoint à $\boldsymbol{A}$.

En séparant les exposants pairs et impairs, l'exponentielle de $\boldsymbol{A}$ s'écrit :

$$\begin{aligned}
e^{\boldsymbol{A}} &= \boldsymbol{G} + \sum_{p=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{A}^{2p+1}}{(2p+1)!} + \sum_{p=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{A}^{2p+2}}{(2p+2)!} \\
&= \boldsymbol{G} + \sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{2^p}\frac{(\mathrm{Tr}\boldsymbol{A}^2)^p}{(2p+1)!}\boldsymbol{A} + \sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{2^p}\frac{(\mathrm{Tr}\boldsymbol{A}^2)^p}{(2p+2)!}\boldsymbol{A}^2 \\
&= \boldsymbol{G} + \sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{2^p}\frac{(-2||\boldsymbol{a}||^2)^p}{(2p+1)!}\boldsymbol{A} + \sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{2^p}\frac{(-2||\boldsymbol{a}||^2)^p}{(2p+2)!}\boldsymbol{A}^2 \\
&= \boldsymbol{G} + \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\frac{||\boldsymbol{a}||^{2p}}{(2p+1)!}\boldsymbol{A} + \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\frac{||\boldsymbol{a}||^{2p}}{(2p+2)!}\boldsymbol{A}^2 \\
&= \boldsymbol{G} + \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\frac{||\boldsymbol{a}||^{2p+1}}{(2p+1)!}\frac{\boldsymbol{A}}{||\boldsymbol{a}||} + \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\frac{||\boldsymbol{a}||^{2p+2}}{(2p+2)!}\frac{\boldsymbol{A}^2}{||\boldsymbol{a}||^2} \\
&= \boldsymbol{G} + \sin||\boldsymbol{a}||\frac{\boldsymbol{A}}{||\boldsymbol{a}||} + (1-\cos||\boldsymbol{a}||)\frac{\boldsymbol{A}^2}{||\boldsymbol{a}||^2}
\end{aligned}$$

En se plaçant dans une base contenant le vecteur $\boldsymbol{a}$, on vérifie facilement les deux propriétés importantes suivantes :

- $e^{\boldsymbol{A}}$ est orthogonal car $e^{\boldsymbol{A}} \overline{\otimes} \left(e^{\boldsymbol{A}}\right)^T = \boldsymbol{G}$
- $\det e^{\boldsymbol{A}} = +1$

On verra plus loin (A.8 page 202) que l'endomorphisme associé à $e^{\boldsymbol{A}}$ est une rotation autour du vecteur unitaire $\frac{\boldsymbol{a}}{||\boldsymbol{a}||}$ et d'angle (positif) $||\boldsymbol{a}||$, et que toute rotation peut se mettre sous cette forme.

A.6 Tenseurs symétriques réels

Un tenseur du second ordre $\boldsymbol{S}$ est symétrique si pour tous vecteurs $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$ on a l'égalité :

$$\boldsymbol{X} \overline{\otimes} \boldsymbol{S} \overline{\otimes} \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y} \overline{\otimes} \boldsymbol{S} \overline{\otimes} \boldsymbol{X}$$

La symétrie entraîne que son polynôme caractéristique a trois racines réelles (distinctes ou non). En effet, soient λ_2 et $\lambda_3 = \overline{\lambda_2}$ les deux valeurs propres conjugées, associée aux vecteurs propres complexes $\boldsymbol{v}_2$ et $\boldsymbol{v}_3 = \overline{\boldsymbol{v}_2}$. La symétrie de $\boldsymbol{S}$ appliquée à $\boldsymbol{v}_2$ et $\boldsymbol{v}_3$ implique :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_2 \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{S} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{v}_3 &= \boldsymbol{v}_3 \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{S} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{v}_2 \\
\lambda_3\, \boldsymbol{v}_2 \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{v}_3 &= \lambda_2\, \boldsymbol{v}_3 \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{v}_2 \\
\overline{\lambda_2}\, \boldsymbol{v}_2 \,\overline{\otimes}\, \overline{\boldsymbol{v}_2} &= \lambda_2\, \overline{\boldsymbol{v}_2} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{v}_2 \\
\overline{\lambda_2} &= \lambda_2
\end{aligned}$$

Donc, λ_2 est réel et son conjugué λ_3 l'est aussi.

Les vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux entre eux. En effet, soient $\boldsymbol{u}_1$ et $\boldsymbol{u}_2$ deux vecteurs propres distincts asssociés aux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2. La symétrie entraîne:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{S} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{u}_2 &= \boldsymbol{u}_2 \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{S} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{u}_1 \\
\lambda_2\, \boldsymbol{u}_1 \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{u}_2 &= \lambda_1\, \boldsymbol{u}_2 \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{u}_1
\end{aligned}$$

Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, on en déduit $\boldsymbol{u}_2 \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{u}_1 = 0$.

Pour les tenseurs symétriques réels, on peut donc toujours construire une une base propre orthonormée.

Tout tenseur du second ordre symétrique est donc la somme de trois tenseurs uniaxiaux

$$\boldsymbol{S} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i\, \boldsymbol{u}_i \otimes \boldsymbol{u}_i$$

Ses composantes dans une base propre orthonormée se rangent dans une matrice diagonale :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Inversement, si un tenseur du second ordre réel a trois valeurs propres réelles, il est symétrique.

On vérifie facilement (en utilisant l'orthonormalité de la base propre), qu'on peut aussi le mettre sous forme de produit tensoriel contracté une fois :

$$\boldsymbol{S} = \overline{\bigotimes}_{i=1}^{3} \left(\boldsymbol{G} + (\lambda_i - 1)\, \boldsymbol{u}_i \otimes \boldsymbol{u}_i\right)$$

(Ces trois tenseurs commutent dans le produit $\overline{\otimes}$)

A.6.1 Dérivée d'un tenseur symétrique réel

La dérivée d'un tenseur symétrique est un tenseur symétrique [7].

$$\frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial t} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \lambda_i}{\partial t} \left(\boldsymbol{u}_i \otimes \boldsymbol{u}_i\right) + \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}_i}{\partial t} \otimes \boldsymbol{u}_i + \boldsymbol{u}_i \otimes \frac{\partial \boldsymbol{u}_i}{\partial t} \right)$$

7. Pour s'en convaincre il suffit de l'exprimer sur une base fixe.

A.6.2 Puissance entière d'un tenseur symétrique réel

Soit λ_i la valeur propre assocée au vecteur propre unitaire $\boldsymbol{u}_i$ de S :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{S} \overline{\otimes} \boldsymbol{u}_i &= \lambda_i \, \boldsymbol{u}_i \\
\boldsymbol{S}^n \overline{\otimes} \boldsymbol{u}_i &= \lambda_i \, \boldsymbol{S}^{n-1} \overline{\otimes} \boldsymbol{u}_i \\
&= \lambda_i^2 \, \boldsymbol{S}^{n-2} \overline{\otimes} \boldsymbol{u} \\
&= \ldots \\
\boldsymbol{S}^n \overline{\otimes} \boldsymbol{u}_i &= \lambda_i^n \, \boldsymbol{u}_i
\end{aligned}$$

λ_i^n est valeur propre de $\boldsymbol{S}^n$.
$\boldsymbol{S}$ et $\boldsymbol{S}^n$ ont même base propre.

A.6.3 Dérivée de la puissance entière d'un tenseur symétrique réel

La dérivée d'un tenseur symétrique est symétrique. $\boldsymbol{S}^n$ étant symétrique, sa dérivée l'est aussi.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{S}^2}{\partial t} &= \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial t} \overline{\otimes} \boldsymbol{S} + \boldsymbol{S} \overline{\otimes} \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial t} \\
\frac{\partial \boldsymbol{S}^3}{\partial t} &= \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial t} \overline{\otimes} \boldsymbol{S}^2 + \boldsymbol{S} \overline{\otimes} \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial t} \overline{\otimes} \boldsymbol{S} + \boldsymbol{S}^2 \overline{\otimes} \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial t} \\
\frac{\partial \boldsymbol{S}^4}{\partial t} &= \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial t} \overline{\otimes} \boldsymbol{S}^3 + \boldsymbol{S} \overline{\otimes} \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial t} \overline{\otimes} \boldsymbol{S}^2 + \boldsymbol{S}^2 \overline{\otimes} \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial t} \overline{\otimes} \boldsymbol{S} + \boldsymbol{S}^3 \overline{\otimes} \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial t} \\
&\ldots
\end{aligned}$$

En généralisant :

$$\frac{\partial \boldsymbol{S}^n}{\partial t} = \sum_{j=0}^{n-1} \boldsymbol{S}^j \overline{\otimes} \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial t} \overline{\otimes} \boldsymbol{S}^{n-j-1} \tag{A.24}$$

Propriété:

Si $\boldsymbol{\Sigma}$ est un tenseur symétrique ***de même base propre que S***, les produits $\overline{\otimes}$ entre $\boldsymbol{\Sigma}$ et $\boldsymbol{S}$ commutent, et on peut factoriser.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Sigma} \overline{\overline{\otimes}} \frac{\partial \boldsymbol{S}^n}{\partial t} &= \boldsymbol{\Sigma} \overline{\overline{\otimes}} \sum_{j=0}^{n-1} \boldsymbol{S}^j \overline{\otimes} \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial t} \overline{\otimes} \boldsymbol{S}^{n-j-1} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \boldsymbol{\Sigma} \overline{\overline{\otimes}} \left(\boldsymbol{S}^j \overline{\otimes} \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial t} \overline{\otimes} \boldsymbol{S}^{n-j-1} \right) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \left(\boldsymbol{S}^j \overline{\otimes} \boldsymbol{\Sigma} \overline{\otimes} \boldsymbol{S}^{n-j-1} \right) \overline{\overline{\otimes}} \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial t} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \left(\boldsymbol{\Sigma} \overline{\otimes} \boldsymbol{S}^{n-1} \right) \overline{\overline{\otimes}} \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial t} \quad \text{car } \boldsymbol{\Sigma} \text{ et } \boldsymbol{S} \text{ commutent} \\
\boldsymbol{\Sigma} \overline{\overline{\otimes}} \frac{\partial \boldsymbol{S}^n}{\partial t} &= n \, \left(\boldsymbol{\Sigma} \overline{\otimes} \boldsymbol{S}^{n-1} \right) \overline{\overline{\otimes}} \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial t}
\end{aligned} \tag{A.25}$$

Cas particulier: $n = 2$:

Dans ce cas, la simple symétrie de $\boldsymbol{\Sigma}$ suffit :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{S}^2}{\partial t} &= \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial t} \overline{\otimes} \boldsymbol{S} + \boldsymbol{S} \overline{\otimes} \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial t} \\
\boldsymbol{\Sigma} \overline{\overline{\otimes}} \frac{\partial \boldsymbol{S}^2}{\partial t} &= \boldsymbol{\Sigma} \overline{\overline{\otimes}} \left(\frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial t} \overline{\otimes} \boldsymbol{S} \right) + \boldsymbol{\Sigma} \overline{\overline{\otimes}} \left(\boldsymbol{S} \overline{\otimes} \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial t} \right) \\
&= (\boldsymbol{\Sigma} \overline{\otimes} \boldsymbol{S}) \overline{\overline{\otimes}} \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial t} + (\boldsymbol{S} \overline{\otimes} \boldsymbol{\Sigma}) \overline{\overline{\otimes}} \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial t} \\
\boldsymbol{\Sigma} \overline{\overline{\otimes}} \frac{\partial \boldsymbol{S}^2}{\partial t} &= 2 \, \mathrm{Sym} \, (\boldsymbol{\Sigma} \overline{\otimes} \boldsymbol{S}) \overline{\overline{\otimes}} \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial t}
\end{aligned}$$

A.6.4 Exponentielle d'un tenseur symétrique réel

$$\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{S}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{S}^n}{n!}$$

L'exponentielle d'un tenseur symétrique est un tenseur symétrique, car il est la somme de tenseurs symétriques. Il a donc des valeurs propres réelles et il existe une base de vecteurs propres orthonormée.

Si on note λ_1, λ_2 et λ_3 les valeurs propres de $\boldsymbol{S}$, et $\{\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{s}_3\}$ une base propre orthonormée de $\boldsymbol{S}$, le tenseur $\boldsymbol{S}^n$ a les mêmes vecteurs propres, et ses valeurs propres sont λ_1^n, λ_2^n et λ_3^n. L'application de la définition (A.14) avec $\boldsymbol{S}$ exprimé dans la base propre, montre immédiatement que :

- Les valeurs propres de $\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{S}}$ sont e^{s_1}, e^{s_2} et e^{s_3}. L'exponentielle d'un tenseur symétrique est un tenseur symétrique défini positif (voir définition section A.7 page 200).
- les vecteurs propres de $\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{S}}$ sont ceux de $\boldsymbol{S}$.

En faisant le calcul dans la base propre, on en déduit immédiatement que si $\boldsymbol{S}_1$ et $\boldsymbol{S}_2$ sont deux tenseurs symétriques *ayant une base propre commune*, on a :

$$\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2} = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{S}_1} \overline{\otimes} \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{S}_2} = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{S}_2} \overline{\otimes} \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{S}_1}$$

et donc aussi

$$\boldsymbol{e}^{n\,\boldsymbol{S}} = \left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{S}}\right)^n \tag{A.26}$$

A.6.5 Dérivée de l'exponentielle d'un tenseur symétrique

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{S}}}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial \boldsymbol{S}^n}{\partial t}$$

La dérivée de l'exponentielle d'un tenseur symétrique est un tenseur symétrique, car il est la somme de tenseurs symétriques.

Propriété:

Si $\boldsymbol{\Sigma}$ est un tenseur symétrique ***de même base propre que S***, en utilisant (A.25) et (A.25) page 198, on a :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Sigma} \overline{\overline{\otimes}} \frac{\partial \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{S}}}{\partial t} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \boldsymbol{\Sigma} \overline{\overline{\otimes}} \frac{\partial \boldsymbol{S}^n}{\partial t} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} \left(\boldsymbol{\Sigma} \overline{\otimes} \boldsymbol{S}^{n-1}\right) \overline{\overline{\otimes}} \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial t} \\
&= \left(\boldsymbol{\Sigma} \overline{\otimes} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\boldsymbol{S}^{n-1}}{(n-1)!}\right) \overline{\overline{\otimes}} \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial t} \\
\boldsymbol{\Sigma} \overline{\overline{\otimes}} \frac{\partial \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{S}}}{\partial t} &= \left(\boldsymbol{\Sigma} \overline{\otimes} \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{S}}\right) \overline{\overline{\otimes}} \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial t}
\end{aligned} \tag{A.27}$$

où le produit $\boldsymbol{\Sigma} \overline{\otimes} \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{S}}$ commute.

A.7 Tenseurs symétriques définis positifs

Les tenseurs symétriques définis positifs sont les tenseurs réels symétriques $\boldsymbol{U}$ tels que

$$\boldsymbol{V} \overline{\otimes} \boldsymbol{U} \overline{\otimes} \boldsymbol{V} > 0 \;\; \forall \boldsymbol{V} \in \mathbb{V}$$

Si $\boldsymbol{v}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre λ, il vient

$$\boldsymbol{v} \overline{\otimes} (\lambda\, \boldsymbol{v}) = \lambda \|\boldsymbol{v}\|^2 > 0$$

Les valeurs propres d'un tenseur symétrique défini positif $\boldsymbol{U}$ sont donc des *réels positifs*, et ses invariants sont positifs.

En particulier, le déterminant est positif, et $\boldsymbol{U}^{-1}$ existe.
$\boldsymbol{U}^{-1}$ a les mêmes vecteurs propres que $\boldsymbol{U}$
Les valeurs propres de $\boldsymbol{U}^{-1}$ sont les inverses de celles de $\boldsymbol{U}$

A.7.1 Puissance réelle d'un tenseur symétrique défini positif

Soit $\boldsymbol{U}$ un tenseur symétrique défini positif, soient λ_i ses valeurs propres, et soient $\boldsymbol{u}_i$ une base propre orthonormée :

$$\boldsymbol{U} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i\, \boldsymbol{u}_i \otimes \boldsymbol{u}_i$$

On définit les puissances réelles de $\boldsymbol{U}$ par leurs composantes dans la base propre :

$$\boldsymbol{U}^{\alpha} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^{\alpha}\, \boldsymbol{u}_i \otimes \boldsymbol{u}_i = \sum_{i=1}^{3} e^{\alpha \ln \lambda_i}\, \boldsymbol{u}_i \otimes \boldsymbol{u}_i \;\; \forall \alpha \in \mathbb{R} \tag{A.28}$$

car les λ_i sont positifs.

Ce sont des tenseurs réels symétriques définis positifs de même base propre que $\boldsymbol{U}$. Les valeurs propres sont λ_i^{α}.

En particulier on peut écrire : $\sqrt{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{U}^{\frac{1}{2}}$.

A.7.2 Dérivée d'une puissance réelle d'un tenseur symétrique défini positif

En partant de la définition (A.28), pour $\alpha \neq 1$, on trouve :

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}^\alpha}{\partial t} = \sum_{i=1}^{3} \alpha\, \lambda_i^{\alpha-1} \frac{\partial \lambda_i}{\partial t} \boldsymbol{u}_i \otimes \boldsymbol{u}_i + \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^\alpha \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}_i}{\partial t} \otimes \boldsymbol{u}_i + \boldsymbol{u}_i \otimes \frac{\partial \boldsymbol{u}_i}{\partial t} \right)$$

Cette expression fait intervenir les dérivées des vecteurs propres de $\boldsymbol{U}$.
$\frac{\partial \boldsymbol{U}^\alpha}{\partial t}$ est un tenseur symétrique non défini positif.

Une autre expression

La base propre $\{\boldsymbol{u}_i\}$ étant orthonormée, on peut toujours choisir une base fixe $\{\boldsymbol{e}_i\}$ et un tenseur orthogonal $\boldsymbol{Q}_u(t)$ tels que

$$\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{Q}_u \overline{\otimes}\, \boldsymbol{e}_i$$

On a alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{u}_i}{\partial t} &= \frac{\partial \boldsymbol{Q}_u}{\partial t} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{e}_i \\ &= \frac{\partial \boldsymbol{Q}_u}{\partial t} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{Q}_u^T \overline{\otimes}\, \boldsymbol{u}_i \end{aligned}$$

Le produit $\boldsymbol{A}_u = \frac{\partial \boldsymbol{Q}_u}{\partial t} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{Q}_u^T$ est un tenseur antisymétrique. On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{u}_i}{\partial t} \otimes \boldsymbol{u}_i &= (\boldsymbol{A}_u \overline{\otimes}\, \boldsymbol{u}_i) \otimes \boldsymbol{u}_i \\ &= \boldsymbol{A}_u \overline{\otimes}\, (\boldsymbol{u}_i \otimes \boldsymbol{u}_i) \\ \boldsymbol{u}_i \otimes \frac{\partial \boldsymbol{u}_i}{\partial t} &= \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}_i}{\partial t} \otimes \boldsymbol{u}_i \right)^T \end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_i}{\partial t} \otimes \boldsymbol{u}_i + \boldsymbol{u}_i \otimes \frac{\partial \boldsymbol{u}_i}{\partial t} = 2\,\mathrm{Sym}\left[\boldsymbol{A}_u \overline{\otimes}\, (\boldsymbol{u}_i \otimes \boldsymbol{u}_i)\right]$$

La dérivée s'écrit alors sous la forme :

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}^\alpha}{\partial t} = \underbrace{\sum_{i=1}^{3} \alpha\, \lambda_i^{\alpha-1} \frac{\partial \lambda_i}{\partial t} \boldsymbol{u}_i \otimes \boldsymbol{u}_i}_{\frac{\delta \boldsymbol{U}^\alpha}{\delta t}} + 2\,\mathrm{Sym}\left[\boldsymbol{A}_u \overline{\otimes}\, \boldsymbol{U}^\alpha\right]$$

où $\frac{\delta \boldsymbol{U}^\alpha}{\delta t}$ est la dérivée *à base propre constante*, et où $\boldsymbol{A}_u$ est un tenseur antisymétrique traduisant les variations de la base propre en fonction de t.

Cas particulier : $\alpha = \frac{1}{2}$

Posons $\boldsymbol{V} = \sqrt{\boldsymbol{U}}$.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{U} &= \boldsymbol{V}^2 \\ \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} &= \boldsymbol{V} \overline{\otimes}\, \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{V} \\ \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} &= 2\,\mathrm{Sym}\left(\boldsymbol{U}^{\frac{1}{2}} \overline{\otimes}\, \frac{\partial \boldsymbol{U}^{\frac{1}{2}}}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

En utilisant le résultat (D.2) page 226 de l'annexe D, on trouve

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}^{\frac{1}{2}}}{\partial t} = \boldsymbol{U}^{-\frac{1}{2}} \overline{\otimes} \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \boldsymbol{U}^{-\frac{1}{2}} \overline{\otimes} \boldsymbol{A}$$

où $\boldsymbol{A}$ est un tenseur antisymétrique défini par :

$$\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{E} \overline{\otimes} \left\{ \left[\boldsymbol{E} \overline{\overline{\otimes}} \left(\boldsymbol{U}^{-\frac{1}{2}} \overline{\otimes} \boldsymbol{E} \right) \right]^{-1} \overline{\otimes} \left[\boldsymbol{E} \overline{\overline{\otimes}} \left(\boldsymbol{U}^{-\frac{1}{2}} \overline{\otimes} \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} \right) \right] \right\}$$

On peut donc exprimer $\frac{\partial \boldsymbol{U}^{\frac{1}{2}}}{\partial t}$ en fonction de $\boldsymbol{U}$ et $\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}$, mais l'expression est inhabituelle.

A.7.3 Logarithme népérien d'un tenseur symétrique défini positif

On définit le logarithme népérien d'un tenseur symétrique défini positif $\boldsymbol{U}$ par ses composantes dans la base propre de $\boldsymbol{U}$:

$$\mathbf{Ln}\, \boldsymbol{U} = \sum_{i=1}^{3} \ln \lambda_i \, \boldsymbol{u}_i \otimes \boldsymbol{u}_i \tag{A.29}$$

$\mathbf{Ln}\, \boldsymbol{U}$ est symétrique, *non défini positif*, mais de même base propre que $\boldsymbol{U}$.

En particulier, la définition (A.28) page 200 permet d'écrire :

$$\boldsymbol{U}^{\alpha} = e^{\alpha \mathbf{Ln} \boldsymbol{U}}$$

A.7.4 Dérivée du logarithme népérien d'un tenseur symétrique défini positif

Le calcul de cette dérivée pose les mêmes problèmes que pour les puissances non entières. En utilisant la même méthode, on peut écrire :

$$\frac{\partial \mathbf{Ln} \boldsymbol{U}}{\partial t} = \underbrace{\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{\lambda_i} \frac{\partial \lambda_i}{\partial t} \, \boldsymbol{u}_i \otimes \boldsymbol{u}_i}_{\frac{\delta \mathbf{Ln} \boldsymbol{U}}{\delta t}} + 2\, \mathrm{Sym} \left[\boldsymbol{A}_u \overline{\otimes} \mathbf{Ln} \boldsymbol{U} \right]$$

où $\frac{\delta \mathbf{Ln} \boldsymbol{U}}{\delta t}$ est la dérivée *à base propre constante*, et où $\boldsymbol{A}_u$ est un tenseur antisymétrique traduisant les variations de la base propre en fonction de t.

A.8 Tenseurs du second ordre orthogonaux

Les tenseurs orthogonaux sont les tenseurs du second ordre tels que :

$$\boldsymbol{Q} \boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{G} \;\; \Leftrightarrow \;\; \boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{Q}^{-1}$$

A.8.1 Propriétés algébriques

Si $\boldsymbol{Q}$ est un tenseur du second ordre orthogonal, si $\boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{U}$ sont des tenseurs du second ordre quelconque, et si $\boldsymbol{V}$ et $\boldsymbol{W}$ sont des vecteurs, on montre facilement les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{Q} \text{ orthogonal} &\Rightarrow \boldsymbol{Q}^T \text{ orthogonal} \\
\|\boldsymbol{Q} \overline{\otimes} \boldsymbol{V}\| &= \|\boldsymbol{V}\| \text{ (conservation de la norme des vecteurs)} \\
(\boldsymbol{Q} \overline{\otimes} \boldsymbol{V}) \overline{\otimes} (\boldsymbol{Q} \overline{\otimes} \boldsymbol{W}) &= \boldsymbol{V} \overline{\otimes} \boldsymbol{W} \text{ (conservation du produit scalaire des vecteurs)} \\
(\boldsymbol{Q} \overline{\otimes} \boldsymbol{V}) \wedge (\boldsymbol{Q} \overline{\otimes} \boldsymbol{W}) &= \boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{W} \text{ (conservation du produit vectoriel des vecteurs)} \\
\mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{Q}^T \overline{\otimes} \boldsymbol{T} \overline{\otimes} \boldsymbol{Q}\right) &= \mathrm{Tr}\boldsymbol{T} \text{ (conservation du premier invariant)} \\
\left(\boldsymbol{Q}^T \overline{\otimes} \boldsymbol{T} \overline{\otimes} \boldsymbol{Q}\right)_{II} &= T_{II} \text{ (conservation du second invariant)} \\
\det\left(\boldsymbol{Q}^T \overline{\otimes} \boldsymbol{T} \overline{\otimes} \boldsymbol{Q}\right) &= \det \boldsymbol{T} \text{ (conservation du troisième invariant)} \\
\|\boldsymbol{Q}^T \overline{\otimes} \boldsymbol{T} \overline{\otimes} \boldsymbol{Q}\| &= \|\boldsymbol{T}\| \text{ (conservation de la norme des tenseurs)} \\
\left(\boldsymbol{Q}^T \overline{\otimes} \boldsymbol{T} \overline{\otimes} \boldsymbol{Q}\right) \overline{\overline{\otimes}} \left(\boldsymbol{Q}^T \overline{\otimes} \boldsymbol{U} \overline{\otimes} \boldsymbol{Q}\right) &= \boldsymbol{T} \overline{\overline{\otimes}} \boldsymbol{U} \text{ (conservation du produit scalaire des tenseurs)} \\
\left(\boldsymbol{Q}^T \overline{\otimes} \boldsymbol{T} \overline{\otimes} \boldsymbol{Q}\right) \overline{\otimes} \left(\boldsymbol{Q}^T \overline{\otimes} \boldsymbol{U} \overline{\otimes} \boldsymbol{Q}\right) &= \boldsymbol{T} \overline{\otimes} \boldsymbol{U} \text{ (conservation du produit interne des tenseurs)}
\end{aligned}$$

Si $\boldsymbol{T}$ est un tenseur du second ordre, on a l'égalité :

$$\left(\boldsymbol{Q}^T \overline{\otimes} \boldsymbol{T} \overline{\otimes} \boldsymbol{Q}\right)^n = \boldsymbol{Q}^T \overline{\otimes} \boldsymbol{T}^n \overline{\otimes} \boldsymbol{Q} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Si $\boldsymbol{U}$ est un tenseur du second ordre *symétrique défini positif*, on a l'égalité :

$$\left(\boldsymbol{Q}^T \overline{\otimes} \boldsymbol{U} \overline{\otimes} \boldsymbol{Q}\right)^\alpha = \boldsymbol{Q}^T \overline{\otimes} \boldsymbol{U}^\alpha \overline{\otimes} \boldsymbol{Q} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \tag{A.30}$$

Les valeurs propres de $\boldsymbol{T}$ et de $\boldsymbol{Q}^T \overline{\otimes} \boldsymbol{T} \overline{\otimes} \boldsymbol{Q}$ (si elles existent) sont les mêmes.
Si $\boldsymbol{t}$ est un vecteur propre de $\boldsymbol{T}$, alors $\boldsymbol{Q} \overline{\otimes} \boldsymbol{t}$ est vecteur propre de $\boldsymbol{Q}^T \overline{\otimes} \boldsymbol{T} \overline{\otimes} \boldsymbol{Q}$.

Étude des rotations

Les tenseurs orthogonaux dont le déterminant vaut 1 sont appelés *rotations*.

Le théorème de Cayley-Hamilton s'écrit:

$$-\boldsymbol{Q}^3 + Q_I\,\boldsymbol{Q}^2 - Q_{II}\,\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{G} = \boldsymbol{0}$$

en multipliant par $\boldsymbol{Q}^T$, il vient deux égalités:

$$\begin{aligned}
-\boldsymbol{Q}^2 + Q_I\,\boldsymbol{Q} - Q_{II}\,\boldsymbol{G} + \boldsymbol{Q}^T &= \boldsymbol{0} \\
-\boldsymbol{Q} + Q_I\,\boldsymbol{G} - Q_{II}\,\boldsymbol{Q}^T + \boldsymbol{Q}^{2T} &= \boldsymbol{0}
\end{aligned}$$

En sommant la première avec la transposée de la seconde :

$$Q_I\,(\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{G}) - Q_{II}\,(\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{G}) = \boldsymbol{0}$$

Pour une rotation, on a donc $Q_I = Q_{II}$.

Le polynôme caractéristique est donc:

$$-\lambda^3 + Q_I\,\lambda^2 - Q_I\,\lambda + 1 = -(\lambda - 1)\left(\lambda^2 + \lambda\,(1 - Q_I) + 1\right) = 0$$

L'une des valeurs propres est réelle et vaut $\lambda_1 = 1$. On note $\boldsymbol{\omega}$ son vecteur propre *unitaire* associé.

Les autres valeurs propres sont *a priori* complexes.
Dans la base propre, l'orthogonalité de $\boldsymbol{Q}$ s'écrit $\lambda_2\overline{\lambda_2} = 1$ et $\lambda_3\overline{\lambda_3} = 1$, soit encore :

$$||\lambda_2|| = ||\lambda_3|| = 1$$

Le déterminant est $\lambda_2\lambda_3 = 1$. Il n'y a pas de solution réelle[8] à ce système, par contre les solutions complexes sont nécessairement de la forme

$$\lambda_2 = \mathrm{e}^{i\theta} \text{ et } \lambda_3 = \mathrm{e}^{-i\theta} \quad \forall\theta \in [0,\pi]$$

Pour déterminer θ, il suffit de considérer la trace:

$$Q_I = \lambda_2 + \lambda_3 + 1 = e^{i\theta} + e^{-i\theta} + 1 = 2\cos\theta + 1$$

On a donc

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(Q_I - 1) \iff \theta = \pm\text{Arccos}\left(\frac{Q_I - 1}{2}\right)$$

L'endomorphisme associé à $\boldsymbol{Q}$ est une rotation autour du vecteur propre réel $\boldsymbol{\omega}$ de $\boldsymbol{Q}$, et dont l'angle est[9] $\pm\text{Arccos}\left(\frac{Q_I - 1}{2}\right)$. On sait donc déterminer l'axe $\boldsymbol{\omega}$ et l'angle θ d'une rotation $\boldsymbol{Q}$ en calculant son vecteur propre réel unitaire $\boldsymbol{\omega}$ et sa trace Q_I.

A.8.2 Reconstitution des rotations

Inversement, si on connaît $\boldsymbol{\omega}$ unitaire et θ, on peut reconstruire le tenseur orthogonal $\boldsymbol{Q}$. En effet :
Le tenseur $\cos\theta\,\boldsymbol{G}$ est diagonal dans toute base.
Le tenseur $\boldsymbol{\omega}\otimes\boldsymbol{\omega}$ a pour diagonale $0, 0, 1$ dans toute base contenant ω comme troisième vecteur.
Le tenseur $\cos\theta\,\boldsymbol{G} + (1-\cos\theta)\,\boldsymbol{\omega}\otimes\boldsymbol{\omega}$ a pour diagonale $\cos\theta, \cos\theta, 1$ dans cette base.
Pour compléter la rotation, il suffit d'ajouter un tenseur de diagonale $i\sin\theta, -i\sin\theta, 0$ dans cette base.
Soit $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{E}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{\omega}$ le tenseur antisymétrique dont le vecteur adjoint est le vecteur unitaire ω. Ses valeurs propres sont $+i$ et $-i$ dans cette base. Le tenseur $\boldsymbol{Q}$ est donc :

$$\boxed{\boldsymbol{Q} = \cos\theta\,\boldsymbol{G} + (1-\cos\theta)\,\boldsymbol{\omega}\otimes\boldsymbol{\omega} + \sin\theta\,\boldsymbol{\Omega}}$$

En remarquant enfin que $\boldsymbol{\omega}\otimes\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{G} + \boldsymbol{\Omega}^2$, on obtient encore :

$$\boxed{\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{G} + \sin\theta\,\boldsymbol{\Omega} + (1-\cos\theta)\,\boldsymbol{\Omega}^2}$$

On reconnait l'exponentielle du tenseur antisymétrique $\theta\boldsymbol{\Omega}$ (voir A.5.4 page 195).

Toute rotation d'angle θ autour de l'unitaire $\boldsymbol{\omega}$[10] est donc l'endomorphisme associé au tenseur orthogonal

$$\boxed{\boldsymbol{Q} = e^{\theta\boldsymbol{\Omega}}}$$

On identifie facilement la rotation associée à un tenseur orthogonal $\boldsymbol{Q}$ tel que $\det\boldsymbol{Q} = 1$

- Sa partie antisymétrique de $\boldsymbol{Q}$ est $\sin\theta\,\boldsymbol{E}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{\omega}$. Son vecteur adjoint est $\boldsymbol{\omega}\sin\theta$. Il donne la direction $\boldsymbol{\omega}$ et le sinus de l'angle
- Sa trace est $1 + 2\cos\theta$. Elle donne le cosinus de l'angle.

8. autre que 1, mais on aurait alors $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{G}$. $\boldsymbol{G}$ est la rotation triviale d'angle nul.
9. L'ambiguïté du signe provient du fait que le vecteur propre unitaire $\boldsymbol{w}$ est de sens arbitraire. Si on change le sens de $\boldsymbol{\omega}$, on change le sens de la rotation.
10. Le vecteur $\theta\boldsymbol{\omega}$ est souvent appelé *vecteur rotation.*

A.9 Décomposition polaire d'un tenseur du second ordre

Tout tenseur du second ordre $\boldsymbol{T}$ est la composition (à gauche ou à droite) d'un tenseur orthogonal et d'un tenseur symétrique défini positif. Cette décomposition est unique.

Démonstration de l'existence

Le tenseur $\boldsymbol{T}^T \overline{\otimes} \boldsymbol{T}$ est symétrique défini positif. On peut donc poser :

$$\boldsymbol{U} = \left(\boldsymbol{T}^T \overline{\otimes} \boldsymbol{T}\right)^{\frac{1}{2}}$$

On pose :

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{T} \overline{\otimes} \boldsymbol{U}^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{T} = \boldsymbol{R} \overline{\otimes} \boldsymbol{U}$$

Le tenseur $\boldsymbol{R}$ est orthogonal, en effet :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{R} \overline{\otimes} \boldsymbol{R}^T &= \boldsymbol{T} \overline{\otimes} \boldsymbol{U}^{-1} \overline{\otimes} \boldsymbol{U}^{-T} \overline{\otimes} \boldsymbol{T}^T \\
&= \boldsymbol{T} \overline{\otimes} \boldsymbol{U}^{-2} \overline{\otimes} \boldsymbol{T}^T \quad \text{(car } \boldsymbol{U} \text{ est symétrique)} \\
&= \boldsymbol{T} \overline{\otimes} \left(\boldsymbol{T}^T \overline{\otimes} \boldsymbol{T}\right)^{-1} \overline{\otimes} \boldsymbol{T}^T \\
&= \boldsymbol{T} \overline{\otimes} \boldsymbol{T}^{-1} \overline{\otimes} \boldsymbol{T}^{-T} \overline{\otimes} \boldsymbol{T}^T \\
&= \boldsymbol{G}
\end{aligned}$$

En posant

$$\boldsymbol{V} = \left(\boldsymbol{T} \overline{\otimes} \boldsymbol{T}^T\right)^{\frac{1}{2}}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{V} &= \left(\boldsymbol{T} \overline{\otimes} \boldsymbol{T}^T\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\boldsymbol{R} \overline{\otimes} \boldsymbol{U} \overline{\otimes} \boldsymbol{U}^T \overline{\otimes} \boldsymbol{R}^T\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\boldsymbol{R} \overline{\otimes} \boldsymbol{U}^2 \overline{\otimes} \boldsymbol{R}^T\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \boldsymbol{R} \overline{\otimes} \boldsymbol{U} \overline{\otimes} \boldsymbol{R}^T \quad \text{(voir (A.30))} \\
&= \boldsymbol{T} \overline{\otimes} \boldsymbol{R}^T \\
\boldsymbol{V} \overline{\otimes} \boldsymbol{R} &= \boldsymbol{T}
\end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\boxed{\boldsymbol{T} = \boldsymbol{R} \overline{\otimes} \boldsymbol{U} = \boldsymbol{V} \overline{\otimes} \boldsymbol{R}} \tag{A.31}$$

où $\boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{V}$ sont symétriques définis positifs et où $\boldsymbol{R}$ est orthogonal.

De plus, la relation entre $\boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{V}$ est :

$$\boxed{\boldsymbol{U} = \boldsymbol{R}^T \overline{\otimes} \boldsymbol{V} \overline{\otimes} \boldsymbol{R} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{V} = \boldsymbol{R} \overline{\otimes} \boldsymbol{U} \overline{\otimes} \boldsymbol{R}^T}$$

Démonstration de l'unicité

Supposons qu'il existe deux décompositions avec les propriétés précédentes :

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{R} \overline{\otimes} \boldsymbol{U} = \boldsymbol{R}' \overline{\otimes} \boldsymbol{U}'$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}^T \overline{\otimes} \boldsymbol{T} &= \boldsymbol{T}^T \overline{\otimes} \boldsymbol{T} \\
\boldsymbol{U}^T \overline{\otimes} \boldsymbol{R}^T \overline{\otimes} \boldsymbol{R} \overline{\otimes} \boldsymbol{U} &= \boldsymbol{U}'^T \overline{\otimes} \boldsymbol{R}'^T \overline{\otimes} \boldsymbol{R}' \overline{\otimes} \boldsymbol{U}' \\
\boldsymbol{U}^T \overline{\otimes} \boldsymbol{U} &= \boldsymbol{U}'^T \overline{\otimes} \boldsymbol{U}' \quad \text{(car } \boldsymbol{R} \text{ et } \boldsymbol{R}' \text{ sont orthogonaux)} \\
\boldsymbol{U}^2 &= \boldsymbol{U}'^2 \quad \text{(car } \boldsymbol{U} \text{ et } \boldsymbol{U}' \text{ sont symétriques)} \\
\boldsymbol{U} &= \boldsymbol{U}' \quad \text{(car } \boldsymbol{U} \text{ et } \boldsymbol{U}' \text{ sont symétriques définis positifs)}
\end{aligned}$$

Ainsi $\boldsymbol{U}$ est unique.

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{R} &= \boldsymbol{T} \overline{\otimes} \boldsymbol{U}^{-1} \\
&= \boldsymbol{T} \overline{\otimes} \boldsymbol{U}'^{-1} \quad \text{(car } \boldsymbol{U} \text{ et } \boldsymbol{U}' \text{ sont égaux)} \\
&= \boldsymbol{R}'
\end{aligned}$$

Ainsi $\boldsymbol{R}$ est unique.

Enfin,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{V} &= \boldsymbol{R} \overline{\otimes} \boldsymbol{U}^{-1} \overline{\otimes} \boldsymbol{R}^T \\
&= \boldsymbol{R}' \overline{\otimes} \boldsymbol{U}'^{-1} \overline{\otimes} \boldsymbol{R}'^T \;\; ; \text{ (unicité } \boldsymbol{R} \text{ et } \boldsymbol{U}\text{)} \\
&= \boldsymbol{V}'
\end{aligned}$$

Ainsi $\boldsymbol{V}$ est unique.

A.9.1 Propriétés

$\boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{V}$ étant symétriques définis positifs, il ont chacun trois valeurs propres réelles (éventuellement confondues) et trois vecteurs propres orthogonaux.

Soit λ une valeur propre de $\boldsymbol{U}$ et soit $\boldsymbol{u}$ son vecteur propre associé. λ et $\boldsymbol{u}$ sont solutions de l'équation :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{U} \overline{\otimes} \boldsymbol{u} &= \lambda \boldsymbol{u} \\
\boldsymbol{R}^T \overline{\otimes} \boldsymbol{V} \overline{\otimes} \boldsymbol{R} \overline{\otimes} \boldsymbol{u} &= \lambda \boldsymbol{u} \\
\boldsymbol{V} \overline{\otimes} \boldsymbol{R} \overline{\otimes} \boldsymbol{u} &= \lambda \boldsymbol{R} \overline{\otimes} \boldsymbol{u} \\
\boldsymbol{V} \overline{\otimes} (\boldsymbol{R} \overline{\otimes} \boldsymbol{u}) &= \lambda \, (\boldsymbol{R} \overline{\otimes} \boldsymbol{u})
\end{aligned}$$

ce qui montre que λ est valeur propre de $\boldsymbol{V}$ et que le vecteur propre associé est $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{R} \overline{\otimes} \boldsymbol{u}$.

Annexe B

Dérivée généralisée

Les variables des fonctions habituellement étudiées en mathématiques élémentaires sont des éléments de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{R}^n$. On va considérer ici des fonctions dont les variables sont des éléments de $\mathbb{V}^n$ ou de $(\mathbb{V} \otimes \mathbb{V})^n$.

B.1 Fonction scalaire d'une variable vectorielle

Soit f l'application

$$f \;:\; \boldsymbol{V} \in \mathbb{V} \to f(\boldsymbol{V}) \in \mathbb{R}$$

On note $\mathcal{F}_{\mathbb{V}\to\mathbb{R}}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{V}$ dans $\mathbb{R}$.

Si f est différentiable, il existe un opérateur linéaire noté provisoirement $\mathcal{L}_f$ tel que :

$$df = \mathcal{L}_f(\boldsymbol{dV})$$

L'opérateur linéaire $\mathcal{L}_f$ est donc une forme linéaire sur $\mathbb{V}$, c'est-à-dire un tenseur du premier ordre. On écrit :

$$df = \frac{df}{\boldsymbol{dV}} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{dV}$$

ATTENTION : le symbole $\dfrac{df}{\boldsymbol{dV}}$ est indissociable. Il ne s'agit pas d'un rapport ! C'est une notation qui désigne le tenseur du premier ordre défini précédemment [1].

On appellera $\dfrac{df}{\boldsymbol{dV}}$ la dérivée généralisée de la fonction f par rapport à sa variable vectorielle. La dérivée généralisée d'une fonction $f \in \mathcal{F}_{\mathbb{V}\to\mathbb{R}}$ est donc un tenseur du premier ordre.

Composantes de $\dfrac{df}{\boldsymbol{dV}}$

Soit $\{\boldsymbol{e}_i\}$ une base quelconque de $\mathbb{V}$. On pose $\boldsymbol{V} = V^i \boldsymbol{e}_i$. Les V^i sont donc les composantes contravariantes de $\boldsymbol{V}$. Dans cette base, le vecteur $\boldsymbol{dV}$ est :

$$\boldsymbol{dV} = dV^1\, \boldsymbol{e}_1 + dV^2\, \boldsymbol{e}_2 + dV^3\, \boldsymbol{e}_3$$

1. Bien que communément adoptée, cette notation n'est pas sans défaut, car elle fait apparaître le nom de la variable vectorielle, alors que ce nom est sans importance. Pour noter cet opérateur, une notation comme f' ou $\boldsymbol{D}f$ serait plus cohérente.

A la fonction f de $\mathbb{V}$ dans $\mathbb{R}$ on associe la fonction ${f_{\boldsymbol{e}_i}}$ [2] de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$:

$$f_{\boldsymbol{e}_i} \;:\; \left(V^1, V^2, V^3\right) \in \mathbb{R}^3 \;\rightarrow\; f_{\boldsymbol{e}_i}\left(V^1, V^2, V^3\right) = f\left(\boldsymbol{V}\right) \in \mathbb{R}$$

Sa différentielle $df_{\boldsymbol{e}_i}$ est :

$$df = df_{\boldsymbol{e}_i} = \frac{\partial f_{\boldsymbol{e}_i}}{\partial V^i}\, dV^i$$

On en déduit que

$$\frac{df}{\boldsymbol{dV}} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{dV} = \frac{\partial f_{\boldsymbol{e}_i}}{\partial V^i}\, dV^i \quad \forall \boldsymbol{dV}$$

et donc que les composantes covariantes de $\dfrac{df}{\boldsymbol{dV}}$ sont:

$$\boxed{\frac{df}{\boldsymbol{dV}} = \frac{\partial f_{\boldsymbol{e}_i}}{\partial V^i}\, \boldsymbol{e}^i = \left[\frac{df}{\boldsymbol{dV}}\right]_i \boldsymbol{e}^i}$$

où $\left\{\boldsymbol{e}^i\right\}$ est la base duale de $\{\boldsymbol{e}_i\}$.

Si on s'était donné $\boldsymbol{V}$ par ses composantes covariantes, ou aurait obtenu les composantes contravariantes de $\dfrac{df}{\boldsymbol{dV}}$:

$$\boxed{\frac{df}{\boldsymbol{dV}} = \frac{\partial f_{\boldsymbol{e}^i}}{\partial V_i}\, \boldsymbol{e}_i = \left[\frac{df}{\boldsymbol{dV}}\right]^i \boldsymbol{e}_i}$$

où $f_{\boldsymbol{e}^i}$ est la fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$:

$$f_{\boldsymbol{e}^i} \;:\; \left(V_1, V_2, V_3\right) \in \mathbb{R}^3 \;\rightarrow\; f_{\boldsymbol{e}^i}\left(V_1, V_2, V_3\right) = f\left(\boldsymbol{V}\right) \in \mathbb{R}$$

B.2 Fonction scalaire de plusieurs variables vectorielles

Soit f l'application

$$f \;:\; (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}) \in \mathbb{V}^2 \;\rightarrow f\,(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}) \in \mathbb{R}$$

On note $\mathcal{F}_{\mathbb{V}^2 \rightarrow \mathbb{R}}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{V}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Le couple $(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W})$ varie dans un espace de dimension 6.

La dérivé partielle de f par rapport à sa première variable vectorielle est la dérivée de f à $\boldsymbol{W}$ constant. C'est donc une dérivée d'une fonction à une seule variable. Sa différentielle est :

$$df_1 = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{V}} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{dV}$$

Le symbole $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{V}}$ est la dérivée généralisée de f par rapport à sa première variable [3]. C'est un tenseur du premier ordre.

2. l'indice $\boldsymbol{e}_i$ de $f_{\boldsymbol{e}_i}$ est indispensable: pour une autre base, les composantes de $\boldsymbol{V}$ seraient différentes et la fonction $f_{\boldsymbol{e}'_i}$ est différente. On a $f\left(\boldsymbol{V}\right) = f_{\boldsymbol{e}_i}\left(V^1, V^2, V^3\right) = f_{\boldsymbol{e}'_i}\left(V'^1, V'^2, V'^3\right)$

3. Cette notation a les mêmes inconvénients que la précédente: $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{V}}$ signifie « dérivée généralisée de f par rapport à la première variable». Pour noter cet opérateur, une notation comme $f'^{(1)}$ ou $\boldsymbol{D}^{(1)} f$ serait plus cohérente, le $^{(1)}$ indiquant le numéro de la variable par rapport à laquelle on dérive.

De même pour la seconde variable de f :

$$df_2 = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{W}} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{dW}$$

La différentielle totale de f est pour une variation arbitraire du couple $(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W})$ est donc :

$$df = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{V}} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{dV} + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{W}} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{dW}$$

Si $\boldsymbol{V}$ et $\boldsymbol{W}$ sont fonction d'un paramètre réel t, la dérivée (ordinaire) de f par rapport à t est :

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{V}} \overline{\otimes}\, \dot{\boldsymbol{V}} + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{W}} \overline{\otimes}\, \dot{\boldsymbol{W}}$$

On généralise sans difficulté aux applications de $\mathbb{V}^n$ dans $\mathbb{R}$.

B.3 Fonction scalaire d'une variable tensorielle du second ordre

Soit f l'application

$$f \quad : \quad \boldsymbol{T} \in \mathbb{V} \otimes \mathbb{V} \ \rightarrow f(\boldsymbol{T}) \in \mathbb{R}$$

On note $\mathcal{F}_{\mathbb{V}\otimes\mathbb{V}\rightarrow\mathbb{R}}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{V} \otimes \mathbb{V}$ dans $\mathbb{R}$.

Si f est différentiable, il existe un opérateur linéaire noté provisoirement $\mathcal{L}_f$ tel que :

$$df = \mathcal{L}_f\,(\boldsymbol{dT})$$

L'opérateur $\mathcal{L}_f$ est donc une forme linéaire sur l'espace vectoriel des tenseurs du second ordre. C'est donc un tenseur du second ordre et on écrit :

$$df = \frac{df}{\boldsymbol{dT}} \overline{\overline{\otimes}}\, \boldsymbol{dT}$$

car le produit $\overline{\overline{\otimes}}$ est le produit scalaire de $\mathbb{V} \otimes \mathbb{V}$.

On appellera $\dfrac{df}{\boldsymbol{dT}}$ [4] la dérivée généralisée de la fonction f par rapport à sa variable tensorielle. C'est un tenseur du second ordre.

Composantes de $\dfrac{df}{\boldsymbol{dT}}$

Soit $\{\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j\}$ une base quelconque de $\mathbb{V} \otimes \mathbb{V}$. On pose $\boldsymbol{T} = T^{ij}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j$. Dans cette base, le tenseur $\boldsymbol{dT}$ est :

$$\boldsymbol{dT} = dT^{ij}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j$$

4. avec les mêmes remarques que précédemment sur la notation.

Avec un raisonnement analogue au fonctions d'une variable vectorielle, on trouve que les composantes de $\dfrac{df}{\boldsymbol{dT}}$ sont :

$$\begin{aligned}
\frac{df}{\boldsymbol{dT}} &= \frac{\partial f_{\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j}}{\partial T^{ij}}\,\boldsymbol{e}^i\otimes\boldsymbol{e}^j = \left[\frac{df}{\boldsymbol{dT}}\right]_{ij}\boldsymbol{e}^i\otimes\boldsymbol{e}^j \\
&= \frac{\partial f_{\boldsymbol{e}^i\otimes\boldsymbol{e}^j}}{\partial T_{ij}}\,\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j = \left[\frac{df}{\boldsymbol{dT}}\right]^{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j \\
&= \frac{\partial f_{\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}^j}}{\partial T^i{}_j}\,\boldsymbol{e}^i\otimes\boldsymbol{e}_j = \left[\frac{df}{\boldsymbol{dT}}\right]_i{}^j\boldsymbol{e}^i\otimes\boldsymbol{e}_j \\
&= \frac{\partial f_{\boldsymbol{e}^i\otimes\boldsymbol{e}_j}}{\partial T_i{}^j}\,\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}^j = \left[\frac{df}{\boldsymbol{dT}}\right]^i{}_j\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}^j
\end{aligned}$$

B.4 Fonction scalaire de plusieurs variables tensorielles du second ordre

Soit f l'application

$$f \;:\; (\boldsymbol{T},\boldsymbol{U})\in(\mathbb{V}\otimes\mathbb{V})^2 \to f(\boldsymbol{T},\boldsymbol{U})\in\mathbb{R}$$

On note $\mathcal{F}_{(\mathbb{V}\otimes\mathbb{V})^2\to\mathbb{R}}$ l'ensemble des applications de $(\mathbb{V}\otimes\mathbb{V})^2$ dans $\mathbb{R}$.

Le couple $(\boldsymbol{T},\boldsymbol{U})$ varie dans un espace de dimension 18.

La dérivée partielle de f par rapport à sa première variable tensorielle est la dérivée de f à $\boldsymbol{U}$ constant. c'est donc un tenseur du second ordre, et la différentielle partielle est :

$$df_1 = \frac{\partial f}{\boldsymbol{\partial T}}\,\overset{=}{\otimes}\,\boldsymbol{dT}$$

De même pour la seconde variable :

$$df_2 = \frac{\partial f}{\boldsymbol{\partial U}}\,\overset{=}{\otimes}\,\boldsymbol{dU}$$

La différentielle totale de f est pour une variation arbitraire du couple $(\boldsymbol{T},\boldsymbol{U})$ est donc :

$$df = \frac{\partial f}{\boldsymbol{\partial T}}\,\overset{=}{\otimes}\,\boldsymbol{dT} + \frac{\partial f}{\boldsymbol{\partial U}}\,\overset{=}{\otimes}\,\boldsymbol{dU}$$

Si $\boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{U}$ sont fonction d'un paramètre réel t, la dérivée (ordinaire) de f par rapport à t est :

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\boldsymbol{\partial T}}\,\overset{=}{\otimes}\,\dot{\boldsymbol{T}} + \frac{\partial f}{\boldsymbol{\partial U}}\,\overset{=}{\otimes}\,\dot{\boldsymbol{U}}$$

On généralise sans difficulté aux applications de $(\mathbb{V}\otimes\mathbb{V})^n$ dans $\mathbb{R}$.

B.5 Applications

B.5.1 Quelques dérivées par rapport à un vecteur

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\left(\boldsymbol{V}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{W}\right)}{\boldsymbol{\partial V}} &= \boldsymbol{W} \\
\frac{d\left(\boldsymbol{V}^2\right)}{\boldsymbol{dV}} &= 2\,\boldsymbol{V} \\
\frac{d||\boldsymbol{V}||}{\boldsymbol{dV}} &= \frac{\boldsymbol{V}}{||\boldsymbol{V}||} \\
\frac{\partial\left(\boldsymbol{W}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{T}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{V}\right)}{\boldsymbol{\partial V}} &= \boldsymbol{W}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^T\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{W} \\
\frac{d\left(\boldsymbol{V}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{T}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{V}\right)}{\boldsymbol{dV}} &= \left(\boldsymbol{T} + \boldsymbol{T}^T\right)\overline{\otimes}\,\boldsymbol{V}
\end{aligned}
$$

B.5.2 Quelques dérivées par rapport à un tenseur

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\left(\boldsymbol{T}\,\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{U}\right)}{\boldsymbol{\partial T}} &= \boldsymbol{U} \\
\frac{d\left(\boldsymbol{T}\,\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{T}\right)}{\boldsymbol{dT}} &= 2\,\boldsymbol{T} \\
\frac{d||\boldsymbol{T}||}{\boldsymbol{dT}} &= \frac{\boldsymbol{T}}{||\boldsymbol{T}||}
\end{aligned}
$$

Traces et invariants

Si $\boldsymbol{T}$ est un tenseur du second ordre, les traces des puissances entières de $\boldsymbol{T}$ sont des fonctions scalaires de $\boldsymbol{T}$:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\,\mathrm{Tr}\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{dT}} &= \boldsymbol{G} \\
\frac{d\,\mathrm{Tr}\boldsymbol{T}^2}{\boldsymbol{dT}} &= 2\,\boldsymbol{T}^T \\
\frac{d\,\mathrm{Tr}\boldsymbol{T}^3}{\boldsymbol{dT}} &= 3\,\boldsymbol{T}^{2T} \\
&\dots \\
\frac{d\,\mathrm{Tr}\boldsymbol{T}^3}{\boldsymbol{dT}} &= n\,\boldsymbol{T}^{(n-1)T}
\end{aligned}
$$

On en déduit les dérivées des invariants par rapport à $\boldsymbol{T}$:

$$
\begin{aligned}
\frac{dT_I}{\boldsymbol{dT}} &= \boldsymbol{G} \\
\frac{dT_{II}}{\boldsymbol{dT}} &= T_I\boldsymbol{G} - \boldsymbol{T}^T \\
\frac{dT_{III}}{\boldsymbol{dT}} &= T_{II}\boldsymbol{G} - T_I\boldsymbol{T}^T + \boldsymbol{T}^{2T}
\end{aligned}
$$

B.5.3 Quelques dérivées particulaires

Les dérivés particulaires des invariants sont :

$$\dot{T_I} = \boldsymbol{G} \overline{\overline{\otimes}} \dot{\boldsymbol{T}} = \mathrm{Tr}\left(\dot{\boldsymbol{T}}\right) \tag{B.1}$$

$$\dot{T_{II}} = \frac{dT_{II}}{\boldsymbol{dT}} \overline{\overline{\otimes}} \dot{\boldsymbol{T}} = \left(T_I \boldsymbol{G} - \boldsymbol{T}^T\right) \overline{\overline{\otimes}} \dot{\boldsymbol{T}} \tag{B.2}$$

$$\dot{T_{III}} = \frac{dT_{III}}{\boldsymbol{dT}} \overline{\overline{\otimes}} \dot{\boldsymbol{T}} = \left(T_{II} \boldsymbol{G} - T_I \boldsymbol{T}^T + \boldsymbol{T}^{2T}\right) \overline{\overline{\otimes}} \dot{\boldsymbol{T}} \tag{B.3}$$

Les dérivés particulaires des traces des puissances entières de $\boldsymbol{T}$ sont :

$$\dot{\overbrace{\mathrm{Tr}\boldsymbol{T}}} = G \overline{\overline{\otimes}} \dot{\boldsymbol{T}} \tag{B.4}$$

$$\dot{\overbrace{\mathrm{Tr}\boldsymbol{T}^2}} = 2\,\boldsymbol{T}^T \overline{\overline{\otimes}} \dot{\boldsymbol{T}} \tag{B.5}$$

$$\dot{\overbrace{\mathrm{Tr}\boldsymbol{T}^3}} = 3\,\boldsymbol{T}^{2T} \overline{\overline{\otimes}} \dot{\boldsymbol{T}} \tag{B.6}$$

$$\dots \tag{B.7}$$

$$\dot{\overbrace{\mathrm{Tr}\boldsymbol{T}^n}} = n\,\boldsymbol{T}^{(n-1)T} \overline{\overline{\otimes}} \dot{\boldsymbol{T}} \tag{B.8}$$

Dérivée particulaire de la norme d'un tenseur du second ordre :

$$||\boldsymbol{T}||^2 = \boldsymbol{T} \overline{\overline{\otimes}} \boldsymbol{T}$$

$$\dot{\overbrace{||\boldsymbol{T}||^2}} = \dot{\overbrace{\boldsymbol{T} \overline{\overline{\otimes}} \boldsymbol{T}}}$$

$$\begin{aligned} 2\,||\boldsymbol{T}||\,\dot{\overbrace{||\boldsymbol{T}||}} &= \dot{\boldsymbol{T}} \overline{\overline{\otimes}} \boldsymbol{T} + \boldsymbol{T} \overline{\overline{\otimes}} \dot{\boldsymbol{T}} \\ &= 2\,\boldsymbol{T} \overline{\overline{\otimes}} \dot{\boldsymbol{T}} \end{aligned}$$

$$\dot{\overbrace{||\boldsymbol{T}||}} = \frac{\boldsymbol{T}}{||\boldsymbol{T}||} \overline{\overline{\otimes}} \dot{\boldsymbol{T}} \tag{B.9}$$

Annexe C

Étude de quelques transformations élémentaires

Toutes les tranformations étudiées dans cette partie sont des transformations *homogènes*, c'est-à-dire que le gradient de la transformation $\boldsymbol{F}$ est uniforme dans l'espace. Puisque $\boldsymbol{F}$ peut être vu comme une description locale de la transformation, elles permettent de mieux comprendre géométriquement les déformations au voisinage d'une particule.

C.1 Dilatation sphérique

Soit O un point géométrique fixe.

Soit P une particule de position initiale m_0 et de position finale m_t.

Considérons la transformation qui transforme le domaine Ω_0 en un domaine Ω_t par une homothétie de centre O et de rapport $k > 0$ [1] :

$$Om_t = k\, Om_0 \tag{C.1}$$

Soit δP un segment matériel issu de P, de position initiale $\boldsymbol{dm_0}$ et de position finale $\boldsymbol{dm_t}$. En

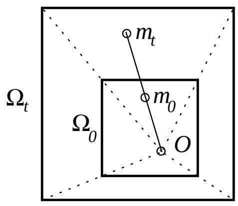

FIG. C.1 – *Dilatation sphérique (pour $k > 1$)*

différentiant (C.1), on obtient la description locale de la transformation :

$$\boldsymbol{dm_t} = k\, \boldsymbol{dm_0} = k\, \boldsymbol{G} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{dm_0}$$

On en déduit le gradient de la transformation :

$$\boxed{\boldsymbol{F} = k\, \boldsymbol{G}}$$

1. pour $k > 1$ on a une dilatation sphérique ; pour $0 < k < 1$ on a une contraction sphérique. Pour $k < 0$, ce n'est pas une transformation, car la dilatation volumique serait négative.

La transformation inverse est :

$$\boxed{\boldsymbol{F}^{-1} = \frac{1}{k}\,\boldsymbol{G}}$$

Il est facile de vérifier que

- La dilatation linéique dans toute direction matérielle δP est k, et les directions matérielles sont invariantes ($\boldsymbol{u}_t = \boldsymbol{u}_0$).
- La dilatation surfacique dans toute facette matérielle est k^2, et les orientations des facettes matérielles sont invariantes ($\boldsymbol{n}_t = \boldsymbol{n}_0$).
- La dilatation volumique est k^3.

Si on utilise $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{F} \overline{\otimes} \boldsymbol{F}^T$ comme tenseur de déformation :

$$\boldsymbol{B} = k^2\,\boldsymbol{G}$$

dont les invariants sont : $B_I = 3\,k^2$; $B_{II} = 3\,k^4$; $B_{III} = k^6$.
Les valeurs propres de $\boldsymbol{B}$ sont : $b_1 = b_2 = b_3 = k^2$, et toutes les directions sont des directions propres.

Si on utilise $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{B}^{\frac{1}{2}}$ comme tenseur de déformation :

$$\boldsymbol{V} = k\,\boldsymbol{G} \quad (= \boldsymbol{F})$$

dont les invariants sont : $V_I = 3\,k$; $V_{II} = 3\,k^2$; $V_{III} = k^3$.
Les valeurs propres de $\boldsymbol{V}$ sont : $v_1 = v_2 = v_3 = k$, et toutes les directions sont des directions propres.

Si on utilise $\boldsymbol{M} = \mathbf{Ln}\boldsymbol{V}$ comme tenseur de déformation :

$$\boldsymbol{M} = \ln k\,\boldsymbol{G}$$

dont les invariants sont : $M_I = 3\,\ln k$; $M_{II} = 3\,(\ln k)^2$; $M_{III} = (\ln k)^3$.
Les valeurs propres de $\boldsymbol{M}$ sont : $m_1 = m_2 = m_3 = \ln k$, et toutes les directions sont des directions propres.

C.2 Extension/contraction dans une direction $\boldsymbol{i}$

Soit Π un plan géométrique fixe de normale unitaire $\boldsymbol{i}$.

Soit P une particule de position initiale m_0 et de position finale m_t. On note m_π la projection orthogonale de m_0 sur le plan Π.

Considérons la transformation qui transforme de domaine Ω_0 en un domaine Ω_t par une affinité de rapport $k > 0$ [2], de direction $\boldsymbol{i}$, par rapport au plan Π :

$$m_t = m_\pi + k\ (m_0 - m_\pi) \tag{C.2}$$

Soit δP un segment matériel issu de P, de position initiale $\boldsymbol{dm_0}$ et de position finale $\boldsymbol{dm_t}$. On note $\boldsymbol{dm_\pi}$ la projection orthogonale de $\boldsymbol{dm_0}$ sur le plan Π :

$$\boldsymbol{dm_\pi} = \boldsymbol{dm_0} - (\boldsymbol{dm_0} \overline{\otimes} \boldsymbol{i})\ \boldsymbol{i} = (\boldsymbol{G} - \boldsymbol{i} \otimes \boldsymbol{i})\ \overline{\otimes}\,\boldsymbol{dm_0}$$

2. pour $k > 1$ on a une dilatation dans la direction $\boldsymbol{i}$; pour $0 < k < 1$ on a une contraction dans la direction $\boldsymbol{i}$. Pour $k < 0$, ce n'est pas une transformation, car la dilatation volumique serait négative.

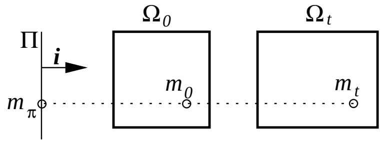

FIG. C.2 – *Dilatation uniforme dans la direction $\boldsymbol{i}$ (pour $k > 1$)*

En différentiant (C.2), on obtient la description locale de la transformation :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{dm_t} &= \boldsymbol{dm_\pi} + k\ (\boldsymbol{dm_0} - \boldsymbol{dm_\pi})\\ &= (1-k)\,\boldsymbol{dm_\pi} + k\,\boldsymbol{dm_0}\\ &= (1-k)\,(\boldsymbol{G} - \boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{i})\ \overline{\otimes}\,\boldsymbol{dm_0} + k\,\boldsymbol{dm_0}\end{aligned}$$

On en déduit le gradient de la transformation :

$$\boxed{\boldsymbol{F} = \boldsymbol{G} + (k-1)\ \boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{i}} \tag{C.3}$$

La transformation inverse est

$$\boxed{\boldsymbol{F}^{-1} = \boldsymbol{G} + \left(\frac{1}{k} - 1\right)\ \boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{i}}$$

La dilatation linéique d'un segment matériel δP est :

$$\begin{aligned}K_l &= \|\boldsymbol{F}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{u}_0\| = \|\boldsymbol{u}_0 + (k-1)\ (\boldsymbol{i}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{u}_0)\ \boldsymbol{i}\|\\ &= \frac{1}{\|\boldsymbol{F}^{-1}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{u}_t\|} = \frac{1}{\|\boldsymbol{u}_t + (\frac{1}{k}-1)\ (\boldsymbol{i}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{u}_t)\ \boldsymbol{i}\|}\end{aligned}$$

Pour $k > 1$ on a une extension, pour $0 < k < 1$ on a une contraction.

Les changements de direction d'un segment matériel δP sont :

$$\boldsymbol{u}_t = \frac{\boldsymbol{u}_0 + (1-k)(\boldsymbol{u}_0\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{i})\,\boldsymbol{i}}{\|\boldsymbol{u}_0 + (1-k)(\boldsymbol{u}_0\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{i})\,\boldsymbol{i}\|}\quad;\quad \boldsymbol{u}_0 = \frac{\boldsymbol{u}_t + (1-\frac{1}{k})(\boldsymbol{u}_t\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{i})\,\boldsymbol{i}}{\|\boldsymbol{u}_t + (1-\frac{1}{k})(\boldsymbol{u}_t\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{i})\,\boldsymbol{i}\|}$$

En particulier, les directions matérielles colinéaires à $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ ou $\boldsymbol{k}$ sont invariantes.
Les dilatations linéiques respectives sont :k, 1, 1.

La dilatation volumique[3] est $K_v = \det \boldsymbol{F} = k$:

La dilatation surfacique d'une facette matérielle est :

$$\begin{aligned}K_s &= K_v\,\|\boldsymbol{F}^{-T}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{n}_0\| = k\,\|\boldsymbol{n}_0 + \left(\frac{1}{k}-1\right)\ (\boldsymbol{i}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{n}_0)\ \boldsymbol{i}\|\\ &= \frac{K_v}{\|\boldsymbol{F}^T\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{n}_t\|} = \frac{k}{\|\boldsymbol{n}_t + (k-1)\ (\boldsymbol{i}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{n}_t)\ \boldsymbol{i}\|}\end{aligned}$$

En particulier, les directions des facettes matérielles de normales unitaires $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ ou $\boldsymbol{k}$ sont invariantes.
Les dilatations surfaciques respectives sont : 1, k, k.

Si on utilise $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{F}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{F}^T$ comme tenseur de déformation :

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{G} + (k^2-1)\,\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{i}$$

3. Pour la calculer facilement, il suffit d'écrire les composantes de $\boldsymbol{F}$ dans une base contenant $\boldsymbol{i}$.

dont les invariants sont : $B_I = 2 + k^2$; $B_{II} = 1 + 2\,k^2$; $B_{III} = k^2$.
Les valeurs propres de $\boldsymbol{B}$ sont : $b_1 = k^2$; $b_2 = b_3 = 1$.
et les directions propres associés sont $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{i}$, et toutes les directions orthogonales à $\boldsymbol{i}$.

Si on utilise $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{B}^{\frac{1}{2}}$ comme tenseur de déformation :

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{G} + (k-1)\,\boldsymbol{i} \otimes \boldsymbol{i} \;\; (= \boldsymbol{F})$$

dont les invariants sont : $V_I = 2 + k$; $V_{II} = 1 + 2\,k$; $V_{III} = k$.
Les valeurs propres de $\boldsymbol{V}$ sont : $v_1 = k$; $v_2 = v_3 = 1$.
et les directions propres associés sont celles de $\boldsymbol{B}$.

Si on utilise $\boldsymbol{M} = \mathbf{Ln}\boldsymbol{V}$ comme tenseur de déformation :

$$\boldsymbol{M} = \ln k\, \boldsymbol{i} \otimes \boldsymbol{i}$$

dont les invariants sont : $M_I = \ln k$; $M_{II} = 0$; $M_{III} = 0$.
Les valeurs propres de $\boldsymbol{V}$ sont : $m_1 = \ln k$; $m_2 = m_3 = 0$.
et les directions propres associés sont celles de $\boldsymbol{B}$.

C.3 Dilatation isotrope autour d'une direction $\boldsymbol{i}$

Soit une droite géométrique fixe d de direction unitaire $\boldsymbol{i}$.

Soit P une particule de position initiale m_0 et de position finale m_t. On note m_d la projection orthogonale de m_0 sur la droite d.

Considérons la transformation qui transforme de domaine Ω_0 en un domaine Ω_t par une affinité de rapport $k > 0$ par rapport à la droite d :

$$m_t = m_d + k\;(m_0 - m_d) \tag{C.4}$$

Soit δP un segment matériel issu de P, de position initiale $\boldsymbol{dm_0}$ et de position finale $\boldsymbol{dm_t}$. On

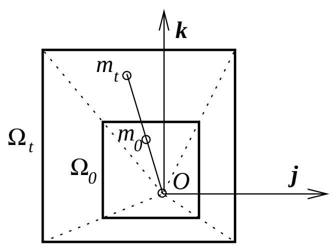

FIG. C.3 – *Dilatation isotrope autour de la direction $\boldsymbol{i}$ (pour $k > 1$)*

note $\boldsymbol{dm}_d$ la projection orthogonale de $\boldsymbol{dm}_0$ sur la droite d :

$$\boldsymbol{dm}_d = (\boldsymbol{dm_0} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{i})\; \boldsymbol{i} = (\boldsymbol{i} \otimes \boldsymbol{i})\, \overline{\otimes}\, \boldsymbol{dm_0}$$

En différentiant (C.4), on obtient la description locale de la transformation :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{dm}_t &= \boldsymbol{dm}_d + k\;(\boldsymbol{dm}_0 - \boldsymbol{dm}_d)\\
&= (1-k)\,\boldsymbol{dm}_d + k\;\boldsymbol{dm}_0\\
&= (1-k)\,(\boldsymbol{i} \otimes \boldsymbol{i})\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{dm_0} + k\;\boldsymbol{dm}_0
\end{aligned}$$

On en déduit le gradient de la transformation :

$$\boxed{\boldsymbol{F} = k\,\boldsymbol{G} + (1-k)\;\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{i}} \tag{C.5}$$

La transformation inverse est

$$\boxed{\boldsymbol{F}^{-1} = \frac{1}{k}\,\boldsymbol{G} + \left(1-\frac{1}{k}\right)\;\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{i}}$$

La dilatation linéique d'un segment matériel δP est :

$$\begin{aligned}
K_l &= ||\boldsymbol{F}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{u}_0|| = ||k\,\boldsymbol{u}_0 + (1-k)\;(\boldsymbol{i}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{u}_0)\;\boldsymbol{i}|| \\
&= \frac{1}{||\boldsymbol{F}^{-1}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{u}_t||} = \frac{1}{||\frac{1}{k}\,\boldsymbol{u}_t + \left(1-\frac{1}{k}\right)\;(\boldsymbol{i}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{u}_t)\;\boldsymbol{i}||}
\end{aligned}$$

Les changements de direction d'un segment matériel δP sont :

$$\boldsymbol{u}_t = \frac{k\,\boldsymbol{u}_0 + (1-k)\;(\boldsymbol{i}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{u}_0)\;\boldsymbol{i}}{||k\,\boldsymbol{u}_0 + (1-k)\;(\boldsymbol{i}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{u}_0)\;\boldsymbol{i}||} \quad ; \quad \boldsymbol{u}_0 = \frac{\frac{1}{k}\,\boldsymbol{u}_t + \left(1-\frac{1}{k}\right)\;(\boldsymbol{i}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{u}_t)\;\boldsymbol{i}}{||\frac{1}{k}\,\boldsymbol{u}_t + \left(1-\frac{1}{k}\right)\;(\boldsymbol{i}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{u}_t)\;\boldsymbol{i}||}$$

En particulier, les directions matérielles colinéaires à $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ ou $\boldsymbol{k}$ sont invariantes.
Les dilatations linéiques respectives sont :$1, k, k$.

La dilatation volumique[4] est $K_v = \det \boldsymbol{F} = k^2$.

La dilatation surfacique d'une facette matérielle est :

$$\begin{aligned}
K_s &= K_v\;||\boldsymbol{F}^{-T}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{n}_0|| = k^2\;||\frac{1}{k}\,\boldsymbol{n}_0 + \left(1-\frac{1}{k}\right)\;(\boldsymbol{i}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{n}_0)\;\boldsymbol{i}|| \\
&= \frac{K_v}{||\boldsymbol{F}^{T}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{n}_t||} = \frac{k^2}{||k\,\boldsymbol{n}_t + (1-k)\;(\boldsymbol{i}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{n}_t)\;\boldsymbol{i}||}
\end{aligned}$$

En particulier, les directions des facettes matérielles de normales unitaires $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ ou $\boldsymbol{k}$ sont invariantes.
Les dilatations surfaciques respectives sont : k^2, k, k.

Si on utilise $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{F}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{F}^T$ comme tenseur de déformation :

$$\boldsymbol{B} = k^2\,\boldsymbol{G} + (1-k^2)\,\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{i}$$

dont les invariants sont : $B_I = 1 + 2\,k^2$; $B_{II} = 2\,k^2 + k^4$; $B_{III} = k^4$.
Les valeurs propres de $\boldsymbol{B}$ sont : $b_1 = 1$; $b_2 = k^2$; $b_3 = k^2$, et les directions propres associées sont : $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{i}$,et toutes les directions orthogonales à $\boldsymbol{i}$.

Si on utilise $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{B}^{\frac{1}{2}}$ comme tenseur de déformation :

$$\boldsymbol{V} = k\,\boldsymbol{G} + (1-k)\,\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{i}\;\;(=\boldsymbol{F})$$

dont les invariants sont : $V_I = 1 + 2\,k$; $V_{II} = 2\,k + k^2$; $V_{III} = k^2$.
Les valeurs propres de $\boldsymbol{V}$ sont : $v_1 = 1$; $v_2 = v_3 = k$, et les directions propres associés sont celles de $\boldsymbol{B}$.

Si on utilise $\boldsymbol{M} = \mathbf{Ln}\boldsymbol{V}$ comme tenseur de déformation :

$$\boldsymbol{M} = \ln k\,\boldsymbol{G} - \ln k\,\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{i}$$

dont les invariants sont : $M_I = 2\,\ln k$; $M_{II} = (\ln k)^2$; $M_{III} = 0$.
Les valeurs propres de $\boldsymbol{M}$ sont : $m_1 = 0$; $m_2 = m_3 = \ln k$, et les directions propres associés sont celles de $\boldsymbol{B}$.

4. Pour la calculer facilement, il suffit d'écrire les composantes de $\boldsymbol{F}$ dans une base contenant $\boldsymbol{i}$.

C.4 Cisaillement isovolume de direction $\boldsymbol{i}$ dans le plan $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j})$

Soit Π un plan géométrique fixe de normale unitaire $\boldsymbol{j}$ et soit $\boldsymbol{i}$ une direction fixe du plan Π.

Soit P une particule de position initiale m_0 et de position finale m_t. On note m_π la projection orthogonale de m_0 sur le plan Π.

Considérons la transformation qui impose à toute particule P de position initiale m_0 une position finale m_t translatée dans la direction $\boldsymbol{i}$ de Π d'une quantité proportionnelle à sa distance au plan Π :

$$m_t = m_0 + \gamma \underbrace{[(m_0 - m_\pi)\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{j}]}_{\text{distance de } m_0 \text{ à } \Pi} \;\boldsymbol{i} \tag{C.6}$$

Soit δP un segment matériel issu de P, de position initiale $\boldsymbol{dm_0}$ et de position finale $\boldsymbol{dm_t}$. On

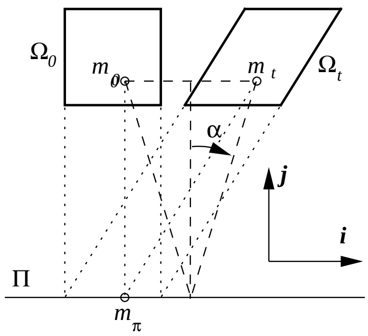

FIG. C.4 – *Cisaillement isovolume de direction $\boldsymbol{i}$, dans le plan $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j})$)*

note $\boldsymbol{dm_\pi}$ la projection orthogonale de $\boldsymbol{dm_0}$ sur le plan Π :

$$\boldsymbol{dm_\pi} = \boldsymbol{dm_0} - (\boldsymbol{dm_0}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{j})\;\boldsymbol{j} = (\boldsymbol{G} - \boldsymbol{j}\otimes\boldsymbol{j})\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{dm_0}$$

En différentiant (C.6), on obtient la description locale de la transformation :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{dm_t} &= \boldsymbol{dm_0} + \gamma\;[(\boldsymbol{dm_0} - \boldsymbol{dm_\pi})\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{j}]\;\boldsymbol{i}\\ &= \boldsymbol{dm_0} + \gamma\;(\boldsymbol{dm_0}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{j})\;\boldsymbol{i}\\ &= \boldsymbol{dm_0} + \gamma\;(\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{j})\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{dm_0}\end{aligned}$$

On en déduit le gradient de la transformation :

$$\boxed{\boldsymbol{F} = \boldsymbol{G} + \gamma\,\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{j}}$$

La transformation inverse est

$$\boxed{\boldsymbol{F}^{-1} = \boldsymbol{G} - \gamma\,\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{j}}$$

La dilatation linéique d'un segment matériel δP est :

$$\begin{aligned}K_l &= ||\boldsymbol{F}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{u}_0|| = ||\boldsymbol{u}_0 + \gamma\;(\boldsymbol{j}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{u}_0)\;\boldsymbol{i}||\\ &= \frac{1}{||\boldsymbol{F}^{-1}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{u}_t||} = \frac{1}{||\boldsymbol{u}_t - \gamma\;(\boldsymbol{j}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{u}_t)\;\boldsymbol{i}||}\end{aligned}$$

Les changements de direction d'un segment matériel δP sont :

$$\boldsymbol{u}_t = \frac{\boldsymbol{u}_0 + \gamma\ (\boldsymbol{j}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{u}_0)\ \boldsymbol{i}}{||\boldsymbol{u}_0 + \gamma\ (\boldsymbol{j}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{u}_0)\ \boldsymbol{i}||}\ ;\ \boldsymbol{u}_0 = \frac{\boldsymbol{u}_t - \gamma\ (\boldsymbol{j}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{u}_t)\ \boldsymbol{i}}{||\boldsymbol{u}_t - \gamma\ (\boldsymbol{j}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{u}_t)\ \boldsymbol{i}||}$$

En particulier, les directions matérielles colinéaires à $\boldsymbol{i}$ ou $\boldsymbol{k}$ sont invariantes.
Les dilatations linéiques respectives sont :1, 1.

La dilatation volumique[5] est $K_v = \det \boldsymbol{F} = 1$.
La transformation mérite donc bien le qualificatif d'isovolume.

La dilatation surfacique d'une facette matérielle est :

$$K_s = K_v\, ||\boldsymbol{F}^{-T}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{n}_0|| = ||\boldsymbol{n}_0 - \gamma\ (\boldsymbol{i}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{n}_0)\ \boldsymbol{j}|| = \frac{K_v}{||\boldsymbol{F}^T\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{n}_t||} = \frac{1}{||\boldsymbol{n}_t + \gamma\ (\boldsymbol{i}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{n}_t)\ \boldsymbol{j}||}$$

En particulier, les directions des facettes matérielles de normales unitaires $\boldsymbol{i}$ ou $\boldsymbol{k}$ sont invariantes.
Les dilatations surfaciques respectives sont : 1, 1.

Si on utilise $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{F}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{F}^T$ comme tenseur de déformation:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{G} + \gamma^2\, \boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{i} + \gamma\ (\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{j} + \boldsymbol{j}\otimes\boldsymbol{i})$$

dont les invariants sont : $B_I = B_{II} = 3+\gamma^2 > 3$; $B_{III} = 1$.
Les valeurs propres de $\boldsymbol{B}$ sont : $b_1 = 1 + \frac{\gamma^2}{2} + \frac{\gamma}{2}\sqrt{\gamma^2+4}$; $b_2 = \frac{1}{b_1} = 1 + \frac{\gamma^2}{2} - \frac{\gamma}{2}\sqrt{\gamma^2+4}$, et $b_3 = 1$
Remarque :
On peut toujours poser $\gamma = 2\tan\alpha$, avec $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. L'interprétation de α est donnée sur la figure C.4 page 218.
Les valeurs propres de $\boldsymbol{B}$ sont alors : $b_1 = \frac{(1+\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha} = \frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$, $b_2 = \frac{1}{b_1} = \frac{(1-\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha} = \frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$ et $b_3 = 1$,
et les directions propres associées sont : $\boldsymbol{b}_1 = \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}\,\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b}_2 = \frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}\,\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$ et $\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{k}$.

Si on utilise $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{B}^{\frac{1}{2}}$ comme tenseur de déformation:

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{G} + \frac{(2+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}{\cos\alpha}\,\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{i} + (\cos\alpha - 1)\,\boldsymbol{j}\otimes\boldsymbol{j} + \sin\alpha\ (\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{j} + \boldsymbol{j}\otimes\boldsymbol{i})$$

dont les invariants sont : $V_I = V_{II} = 1 + \frac{2}{\cos\alpha} > 3$; $V_{III} = 1$.
Les valeurs propres de $\boldsymbol{V}$ sont : $v_1 = \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha} = \sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}$, $v_2 = \frac{1}{v_1} = \frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha} = \sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$, $v_3 = 1$ et les directions propres associés sont celles de $\boldsymbol{B}$.
La rotation $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{V}^{-1}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{F}$ est une rotation d'angle α autour de $\boldsymbol{k}$.
Remarque :
Il ne faut pas se laisser abuser par la forme des domaines Ω_0 et Ω_t de la figure C.4 page 218. La figure C.5 page 220 représente le même cisaillement isovolume appliqué à un autre domaine Ω_0. Pour le comprendre, il suffit de penser à la décompostion polaire $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{V}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{R}$ et de décomposer $\boldsymbol{V}$ en deux dilatations uniformes de rapports inverses (voir 5.4.4 page 49).

Si on utilise $\boldsymbol{M} = \mathbf{Ln}\boldsymbol{V}$ comme tenseur de déformation:

$$\boldsymbol{M} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}\right)\ [\sin\alpha\ (\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}\otimes\boldsymbol{j}) + \cos\alpha\ (\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{j} + \boldsymbol{j}\otimes\boldsymbol{i})]$$

dont les invariants sont : $M_I = 0$; $M_{II} = -\left(\ln\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2$; $M_{III} = 0$.
Les valeurs propres de $\boldsymbol{M}$ sont : $m_1 = \ln\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $m_2 = -m_1 = ln\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $m_3 = 0$ et les directions propres associés sont celles de $\boldsymbol{B}$.

5. Pour la calculer facilement, il suffit d'écrire les composantes de $\boldsymbol{F}$ dans une base contenant $\boldsymbol{j}$ et $\boldsymbol{i}$.

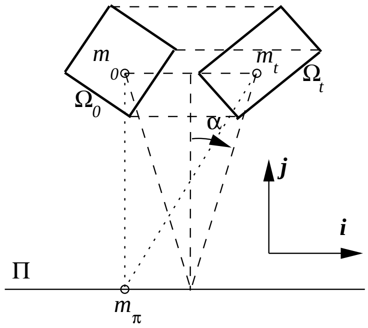

FIG. C.5 – *Cisaillement isovolume de direction $\boldsymbol{i}$, dans le plan $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j})$)*

C.5 Cisaillement pur de direction $\boldsymbol{i}$ dans le plan $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j})$

Soit Π un plan géométrique fixe de normale unitaire $\boldsymbol{j}$ et soit $\boldsymbol{i}$ une direction fixe du plan.

Soit P une particule de position initiale m_0 et de position finale m_t. On note m_π la projection orthogonale de m_0 sur le plan Π.

Considérons la transformation qui impose à toute particule P de position initiale m_0 une position finale m_t tournée d'un angle $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ autour de m_π dans le plan $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j})$:

$$m_t - m_\pi = \underbrace{\left[(m_0 - m_\pi)\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{j}\right]}_{\text{distance de } m_0 \text{ à } \Pi}\ (\cos\alpha\,\boldsymbol{j} + \sin\alpha\,\boldsymbol{i}) \tag{C.7}$$

Soit δP un segment matériel issu de P, de position initiale $\boldsymbol{dm_0}$ et de position finale $\boldsymbol{dm_t}$. On

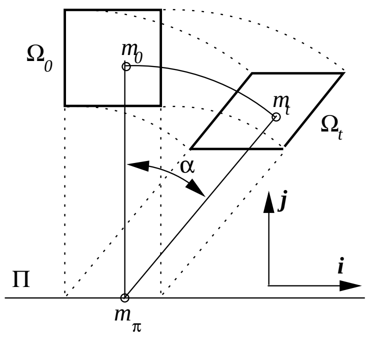

FIG. C.6 – *Cisaillement pur de direction $\boldsymbol{i}$, dans le plan $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j})$)*

note $\boldsymbol{dm_\pi}$ la projection orthogonale de $\boldsymbol{dm_0}$ sur le plan Π :

$$\boldsymbol{dm}_\pi = \boldsymbol{dm}_0 - (\boldsymbol{dm}_0\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{j})\ \boldsymbol{j} = (\boldsymbol{G} - \boldsymbol{j}\otimes\boldsymbol{j})\ \overline{\otimes}\,\boldsymbol{dm}_0$$

En différentiant (C.7), on obtient la description locale de la transformation :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{dm_t} - \boldsymbol{dm}_\pi &= \left[(\boldsymbol{dm_0} - \boldsymbol{dm}_\pi)\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{j}\right](\cos\alpha\,\boldsymbol{j} + \sin\alpha\,\boldsymbol{i}) \\
&= (\boldsymbol{dm_0}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{j})\,(\cos\alpha\,\boldsymbol{j} + \sin\alpha\,\boldsymbol{i}) \quad \text{car } \boldsymbol{dm_\pi}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{j} = 0 \\
&= \cos\alpha\ (\boldsymbol{j}\otimes\boldsymbol{j})\ \overline{\otimes}\,\boldsymbol{dm_0} + \sin\alpha\ (\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{j})\ \overline{\otimes}\,\boldsymbol{dm_0} \\
\boldsymbol{dm_t} &= (\boldsymbol{G} - \boldsymbol{j}\otimes\boldsymbol{j})\ \overline{\otimes}\,\boldsymbol{dm}_0 + \cos\alpha\ (\boldsymbol{j}\otimes\boldsymbol{j})\ \overline{\otimes}\,\boldsymbol{dm_0} + \sin\alpha\ (\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{j})\ \overline{\otimes}\,\boldsymbol{dm_0}
\end{aligned}$$

On en déduit le gradient de la transformation :

$$\boxed{\boldsymbol{F}=\boldsymbol{G}+(\cos\alpha-1)\,\boldsymbol{j}\otimes\boldsymbol{j}+\sin\alpha\,\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{j}}$$

La transformation inverse est

$$\boxed{\boldsymbol{F}^{-1}=\boldsymbol{G}+\left(\frac{1}{\cos\alpha}-1\right)\boldsymbol{j}\otimes\boldsymbol{j}-\tan\alpha\,\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{j}}$$

La dilatation linéique d'un segment matériel quelconque δP de direction unitaire initiale $\boldsymbol{u}_0$ et de direction unitaire finale $\boldsymbol{u}_t$ est :

$$\begin{aligned}K_l&=||\boldsymbol{F}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{u}_0||=||\boldsymbol{u}_0+(\cos\alpha-1)(\boldsymbol{u}_0\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{j})\boldsymbol{j}+\sin\alpha(\boldsymbol{u}_0\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{j})\boldsymbol{i}||\\&=\frac{1}{||\boldsymbol{F}^{-1}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{u}_t||}=\frac{1}{||\boldsymbol{u}_t+\left(\frac{1}{\cos\alpha}-1\right)(\boldsymbol{u}_t\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{j})\boldsymbol{j}-\tan\alpha(\boldsymbol{u}_t\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{j})\boldsymbol{i}||}\end{aligned}$$

Les changements de direction d'un segment matériel δP sont :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_t&=\frac{\boldsymbol{u}_0+(\cos\alpha-1)(\boldsymbol{u}_0\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{j})\,\boldsymbol{j}+\sin\alpha(\boldsymbol{u}_0\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{j})\,\boldsymbol{i}}{||\boldsymbol{u}_0+(\cos\alpha-1)(\boldsymbol{u}_0\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{j})\,\boldsymbol{j}+\sin\alpha(\boldsymbol{u}_0\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{j})\,\boldsymbol{i}||}\\\boldsymbol{u}_0&=\frac{\boldsymbol{u}_t+\left(\frac{1}{\cos\alpha}-1\right)(\boldsymbol{u}_t\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{j})\,\boldsymbol{j}-\tan\alpha(\boldsymbol{u}_t\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{j})\,\boldsymbol{i}}{||\boldsymbol{u}_t+\left(\frac{1}{\cos\alpha}-1\right)(\boldsymbol{u}_t\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{j})\,\boldsymbol{j}-\tan\alpha(\boldsymbol{u}_t\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{j})\,\boldsymbol{i}||}\end{aligned}$$

En particulier, les directions matérielles colinéaires à $\boldsymbol{i}$ ou $\boldsymbol{k}$ sont invariantes, et leurs dilatations linéiques respectives sont 1 et 1.

La dilatation volumique[6] est $K_v=\det\boldsymbol{F}=\cos\alpha$.
Ce cisaillement n'est pas isovolume.

La dilatation surfacique d'une facette matérielle est :

$$\begin{aligned}K_s&=K_v\,||\boldsymbol{F}^{-T}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{n}_0||=\cos\alpha\,||\boldsymbol{n}_0+\left(\frac{1}{\cos\alpha}-1\right)(\boldsymbol{j}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{n}_0)\,\boldsymbol{j}-\tan\alpha(\boldsymbol{i}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{n}_0)\,\boldsymbol{j}||\\&=\frac{K_v}{||\boldsymbol{F}^{T}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{n}_t||}=\frac{\cos\alpha}{||\boldsymbol{n}_t+(\cos\alpha-1)(\boldsymbol{i}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{n}_t)\,\boldsymbol{j}+\sin\alpha(\boldsymbol{i}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{n}_t)\,\boldsymbol{j}||}\end{aligned}$$

En particulier, les facettes matérielles de directions initiales $\boldsymbol{i}$ et $\boldsymbol{j}$ tournent d'un angle α et leur dilatation surfacique est 1.

Si on utilise $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{F}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{F}^T$ comme tenseur de déformation :

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{G}+\sin^2\alpha\;(\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}\otimes\boldsymbol{j})+\sin\alpha\,\cos\alpha\;(\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{j}+\boldsymbol{j}\otimes\boldsymbol{i})$$

dont les invariants sont : $B_I=3$; $B_{II}=2+\cos^2\alpha$; $B_{III}=\cos^2\alpha$
Les valeurs propres sont $b_1=1+\sin\alpha=\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2$, $b_2=1-\sin\alpha=\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2$ et $b_3=1$.
Les directions propres associés sont : $\boldsymbol{b}_1=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}\,\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b}_2=\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}\,\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$, et $\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{k}$.

Si on utilise $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{B}^{\frac{1}{2}}$ comme tenseur de déformation :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}=\boldsymbol{G}&+\left(\frac{v_1+v_2}{2}+\frac{v_1-v_2}{2}\sin\alpha-1\right)\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{i}+\left(\frac{v_1+v_2}{2}-\frac{v_1-v_2}{2}\sin\alpha-1\right)\boldsymbol{j}\otimes\boldsymbol{j}\\&+\frac{v_1-v_2}{2}\cos\alpha\;(\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{j}+\boldsymbol{j}\otimes\boldsymbol{i})\end{aligned}$$

6. Pour la calculer facilement, il suffit d'écrire les composantes de $\boldsymbol{F}$ dans une base contenant $\boldsymbol{j}$ et $\boldsymbol{i}$.

dont les invariants sont :

$$\begin{aligned} V_I &= 1+\sqrt{1+\sin\alpha}+\sqrt{1-\sin\alpha} && = 1+2\,\cos\frac{\alpha}{2} \\ V_{II} &= \cos\alpha+\sqrt{1+\sin\alpha}+\sqrt{1-\sin\alpha} && = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2\,\cos\frac{\alpha}{2}-1 \\ V_{III} &= \cos\alpha && = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1 \end{aligned}$$

Les valeurs propres sont $v_1 = \sqrt{1+\sin\alpha} = \cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}$, $v_2 = \sqrt{1-\sin\alpha} = \cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}$ et $v_3 = 1$. Les directions propres associés sont celles de $\boldsymbol{B}$.
La rotation $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{V}^{-1}\overline{\otimes}\boldsymbol{F}$ est une rotation d'angle $\frac{\alpha}{2}$ autour de $\boldsymbol{k}$[7].

Si on utilise $\boldsymbol{M} = \mathbf{Ln}\boldsymbol{V}$ comme tenseur de déformation:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M} = &\left(\frac{1}{2}\ln\cos\alpha+\frac{\sin\alpha}{4}\ln\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}\right)\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{i}+\left(\frac{1}{2}\ln\cos\alpha-\frac{\sin\alpha}{4}\ln\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}\right)\boldsymbol{j}\otimes\boldsymbol{j} \\ &+\frac{\cos\alpha}{4}\ln\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}\,(\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{j}+\boldsymbol{j}\otimes\boldsymbol{i}) \end{aligned}$$

dont les invariants sont : $M_I = \ln\cos\alpha$; $M_{II} = \frac{1}{4}\ln(1+\sin\alpha)\,\ln(1-\sin\alpha)$; $M_{III} = 0$
Les valeurs propres sont

$$m_1 = \frac{1}{2}\ln(1+\sin\alpha) = \ln(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}) \;\; ; \;\; m_2 = \frac{1}{2}\ln(1-\sin\alpha) = \ln(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}) \;\; ; \;\; m_3 = 0.$$

Les directions propres associés sont celles de $\boldsymbol{B}$.

C.6 Cisaillement combiné

Soit le cisaillement isovolume $\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{G}+\gamma\,\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{j}$. Cette transformation laisse la direction matérielle colinéaire à $\boldsymbol{k}$ invariante, et la dilatation linéique dans cette direction vaut 1. Elle laisse aussi invariante la normale unitaire d'une facette matérielle de normale $\boldsymbol{k}$ et la dilatation surfacique vaut 1. La dilatation volumique vaut 1.

Considérons deux autres vecteurs unitaitres $\boldsymbol{i}'$ et $\boldsymbol{j}'$, résultats de la rotation des vecteurs $\boldsymbol{i}$ et $\boldsymbol{j}$ d'un angle ϕ autour de $\boldsymbol{k}$:

$$\boldsymbol{i}' = \cos\phi\,\boldsymbol{i}+\sin\phi\,\boldsymbol{j} \;\; ; \;\; \boldsymbol{j}' = -\sin\phi\,\boldsymbol{i}+\cos\phi\,\boldsymbol{j}$$

Soit le cisaillement pur $\boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{G}+(\cos\alpha-1)\,\boldsymbol{k}\otimes\boldsymbol{k}+\sin\alpha\,\boldsymbol{j}'\otimes\boldsymbol{k}$. Cette transformation ne dilate pas la direction matérielle de la position initiale $\boldsymbol{k}$, mais la direction matérielle est tournée d'un angle α autour de $\boldsymbol{i}'$. De même, la dilatation surfacique d'une facette matérielle de direction initiale $\boldsymbol{k}$ vaut 1, mais l'orientation de la facette matérielle est tournée d'un angle α autour de $\boldsymbol{i}'$. La dilatation volumique vaut $\cos\alpha$.

Considérons la transformation $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_2\overline{\otimes}\boldsymbol{F}_1$:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{G}+(\cos\alpha-1)\,\boldsymbol{k}\otimes\boldsymbol{k}+\gamma\,\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{j}-\sin\alpha\,\sin\phi\,\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{k}+\sin\alpha\,\cos\phi\,\boldsymbol{j}\otimes\boldsymbol{k}$$

On vérifie facilement que la dilatation linéique de la direction matérielle de direction initiale $\boldsymbol{k}$ vaut 1 mais qu'elle est tournée d'un angle α autour de $\boldsymbol{i}'$.
De même, la dilatation surfacique de la facette matérielle de direction initiale $\boldsymbol{k}$ vaut 1, mais qu'elle est tournée d'un angle α autour de $\boldsymbol{i}'$.
La dilatation volumique de $\boldsymbol{F}$ vaut $\cos\alpha$.

7. Comme dans le cisaillement isovolume, on peut trouver un domaine Ω_0 carré qui se transforme en rectangle.

Si on utilise $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{F} \overline{\otimes} \boldsymbol{F}^T$ comme tenseur de déformation :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B} &= (2+\gamma^2 - \sin^2\phi\cos^2\alpha - \cos^2\phi)\,\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{i} + (1+\cos^2\phi\sin^2\alpha)\,\boldsymbol{j}\otimes\boldsymbol{j} + \cos^2\alpha\,\boldsymbol{k}\otimes\boldsymbol{k}\\ &+ (\gamma - \sin\phi\cos\phi\sin^2\alpha)\,(\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{j}+\boldsymbol{j}\otimes\boldsymbol{i}) - \sin\phi\sin\alpha\cos\alpha\,(\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}\otimes\boldsymbol{i})\\ &+ \cos\phi\sin\alpha\cos\alpha\,(\boldsymbol{j}\otimes\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}\otimes\boldsymbol{j})\end{aligned}$$

Les invariants de $\boldsymbol{B}$ sont :

$$B_I = 3+\gamma^2 \tag{C.8}$$

$$B_{II} = 2+\cos^2\alpha + 2\,\gamma\,\cos\phi\sin\phi\sin^2\alpha + \gamma^2\,(\sin^2\alpha\cos^2\phi + \cos^2\alpha) \tag{C.9}$$

$$B_{III} = \cos^2\alpha \tag{C.10}$$

On constate que le second invariant B_{II} est fonction de l'orientation relative des deux cisaillements. Le premier ne dépend que du cisaillement isovolume et le dernier ne dépend que du cisaillement pur.

C.7 Transformation isovolume

Bien que le cisaillement isovolume soit une transformation isovolume, on ne peut pas en général ramener une transformation isovolume à une composition de cisaillements isovolumes.

La triangulation de Jordan montre qu'il existe une base orthonormée $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})$ dans laquelle les composantes de tout tenseur $\boldsymbol{F}$ sont de la forme

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & f_3 & f_2\\ 0 & \lambda_2 & f_1\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{F}$ étant isovolume, on a $\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3 = 1$.

On peut facilement vérifier que $\boldsymbol{F}$ est l'une des compositions suivantes :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= [\boldsymbol{G}+(\lambda_1-1)\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{i}]\,\overline{\otimes}\,[\boldsymbol{G}+(\lambda_2-1)\boldsymbol{j}\otimes\boldsymbol{j}]\,\overline{\otimes}\,[\boldsymbol{G}+(\lambda_3-1)\boldsymbol{k}\otimes\boldsymbol{k}]\,\overline{\otimes}\\ &\left[\boldsymbol{G}+\frac{f_1}{\lambda_2}\,\boldsymbol{j}\otimes\boldsymbol{k}\right]\overline{\otimes}\left[\boldsymbol{G}+\frac{f_2}{\lambda_1}\,\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{k}\right]\overline{\otimes}\left[\boldsymbol{G}+\frac{f_3}{\lambda_1}\,\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{j}\right]\\ \boldsymbol{F} &= \left[\boldsymbol{G}+\frac{f_1}{\lambda_3}\,\boldsymbol{j}\otimes\boldsymbol{k}\right]\overline{\otimes}\left[\boldsymbol{G}+\frac{f_2}{\lambda_3}\,\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{k}\right]\overline{\otimes}\left[\boldsymbol{G}+\frac{f_3}{\lambda_2}\,\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{j}\right]\\ &[\boldsymbol{G}+(\lambda_1-1)\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{i}]\,\overline{\otimes}\,[\boldsymbol{G}+(\lambda_2-1)\boldsymbol{j}\otimes\boldsymbol{j}]\,\overline{\otimes}\,[\boldsymbol{G}+(\lambda_3-1)\boldsymbol{k}\otimes\boldsymbol{k}]\end{aligned}$$

La combinaison de trois cisaillements isovolumes n'est donc pas suffisante pour générer une transformation isovolume quelconque. Il faut en plus combiner 3 extensions avec $\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3 = 1$[8].

Si on utilise $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{F} \overline{\otimes} \boldsymbol{F}^T$ comme tenseur de déformation :
Une transformation isovolume est telle que $\det \boldsymbol{F} = 1$. Si on note b_1, b_2, b_3 les valeurs propres (positives) de $\boldsymbol{B}$, on a $B_{III} = b_1\,b_2\,b_3 = 1$.

On peut montrer que la trace (toujours positive) est minimale et vaut 3 quand $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{G}$. On a donc $B_I \geq 3$

Le second invariant est :

$$B_{II} = b_1\,b_2 + b_2\,b_3 + b_3\,b_1 = \frac{b_1 b_2 b_3}{b_3} + \frac{b_1 b_2 b_3}{b_1} + \frac{b_1 b_2 b_3}{b_2} = \frac{1}{b_3} + \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_1} = \left(B^{-1}\right)_I$$

On a aussi $\left(B^{-1}\right)_{III} = 1$. Le second invariant de $\boldsymbol{B}$ est la trace d'un tenseur de déterminant 1. Il est donc aussi minimal et vaut 3 quand $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{G}$. On a donc $B_{II} \geq 3$

8. La combinaison des extensions est commutative, mais celle des cisaillements isovolumes ne l'est pas.

Annexe D

Résolution de $\mathrm{Sym}\,(\boldsymbol{U}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{S}$

Soit $\boldsymbol{U}$ un tenseur symétrique défini positif (donc inversible) et soit $\boldsymbol{S}$ un tenseur symétrique. On se propose de rechercher un tenseur symétrique $\boldsymbol{X}$ tel que

$$\mathrm{Sym}\,(\boldsymbol{U}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{S} \tag{D.1}$$

$\boldsymbol{X}$ étant symétrique, il comporte 6 inconnues. L'équation est une égalité entre tenseurs symétriques, elle comporte 6 équations.

A priori, le produit $\boldsymbol{U}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{X}$ n'est pas symétrique. On le décompose en parties symétriques et antisymétriques :

$$\boldsymbol{U}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{X} = \mathrm{Sym}\,(\boldsymbol{U}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{X}) + \boldsymbol{A}$$

où $\boldsymbol{A}$ est un tenseur antisymétrique.

Résoudre l'équation (D.1), revient à chercher $\boldsymbol{X}$ symétrique et $\boldsymbol{A}$ antisymétrique, tels que

$$\boldsymbol{U}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{X} = \boldsymbol{S} + \boldsymbol{A}$$

dont la solution en $\boldsymbol{X}$ est :

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{U}^{-1}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{S} + \boldsymbol{U}^{-1}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{A}$$

avec la condition $\boldsymbol{X}$ symétrique.

Le problème revient donc à trouver $\boldsymbol{A}$ antisymétrique tel que $\boldsymbol{X}$ soit symétrique. L'espace des tenseurs antisymétriques est de dimension 3. Ce problème est à 3 inconnues. Une formulation équivalente de ce problème est :
Trouver $\boldsymbol{A}$ antisymétrique tel que

$$\boldsymbol{E}\,\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{X} = 0$$

c'est-à-dire, trouver $\boldsymbol{A}$ antisymétrique tel que

$$\boldsymbol{E}\,\overline{\overline{\otimes}}\,\left(\boldsymbol{U}^{-1}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{S} + \boldsymbol{U}^{-1}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{A}\right) = \boldsymbol{0}$$
$$\boldsymbol{E}\,\overline{\overline{\otimes}}\,\left(\boldsymbol{U}^{-1}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{S}\right) + \boldsymbol{E}\,\overline{\overline{\otimes}}\,\left(\boldsymbol{U}^{-1}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{A}\right) = \boldsymbol{0}$$

où $\boldsymbol{E}$ est le tenseur d'orientation (tenseur d'ordre 3). Cette équation est donc une égalité vectorielle.

$\boldsymbol{A}$ étant antisymétrique, on peut toujours poser

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{a}$$

où $\boldsymbol{a}$ est le vecteur adjoint au tenseur $\boldsymbol{A}$. La détermination de $\boldsymbol{A}$ se ramène donc à la détermination de $\boldsymbol{a}$: Trouver le vecteur $\boldsymbol{a}$ tel que

$$\boldsymbol{E}\,\overline{\overline{\otimes}}\,\left(\boldsymbol{U}^{-1}\,\overline{\otimes}\,(\boldsymbol{E}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{a})\right) = -\boldsymbol{E}\,\overline{\overline{\otimes}}\,\left(\boldsymbol{U}^{-1}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{S}\right)$$

Or,

$$\boldsymbol{E}\,\overline{\overline{\otimes}}\,\left(\boldsymbol{U}^{-1}\,\overline{\otimes}\,(\boldsymbol{E}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{a})\right) = \left[\boldsymbol{E}\,\overline{\overline{\otimes}}\,\left(\boldsymbol{U}^{-1}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{E}\right)\right]\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{a}$$

$\boldsymbol{a}$ est donc solution de l'équation vectorielle

$$\underbrace{\left[\boldsymbol{E}\,\overline{\overline{\otimes}}\,\left(\boldsymbol{U}^{-1}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{E}\right)\right]}_{\text{ordre } 2}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{a} = -\underbrace{\boldsymbol{E}\,\overline{\overline{\otimes}}\,\left(\boldsymbol{U}^{-1}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{S}\right)}_{\text{ordre } 1}$$

dont la solution n'existe que si $\left[\boldsymbol{E}\,\overline{\overline{\otimes}}\,\left(\boldsymbol{U}^{-1}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{E}\right)\right]$ a un déterminant non nul.

On vérifie sans trop de difficulté que ce déterminant est non nul quand $\boldsymbol{U}$ est symétrique défini positif[1].

On a donc

$$\boldsymbol{a} = -\left[\boldsymbol{E}\,\overline{\overline{\otimes}}\,\left(\boldsymbol{U}^{-1}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{E}\right)\right]^{-1}\,\overline{\otimes}\,\left[\boldsymbol{E}\,\overline{\overline{\otimes}}\,\left(\boldsymbol{U}^{-1}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{S}\right)\right]$$

et donc

$$\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{E}\,\overline{\otimes}\,\left\{\left[\boldsymbol{E}\,\overline{\overline{\otimes}}\,\left(\boldsymbol{U}^{-1}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{E}\right)\right]^{-1}\,\overline{\otimes}\,\left[\boldsymbol{E}\,\overline{\overline{\otimes}}\,\left(\boldsymbol{U}^{-1}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{S}\right)\right]\right\}$$

La solution du problème initial (D.1) est donc

$$\boxed{\boldsymbol{X} = \boldsymbol{U}^{-1}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{S} + \boldsymbol{U}^{-1}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{A}} \tag{D.2}$$

où $\boldsymbol{A}$ est un tenseur antisymétrique défini par :

$$\boxed{\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{E}\,\overline{\otimes}\,\left\{\left[\boldsymbol{E}\,\overline{\overline{\otimes}}\,\left(\boldsymbol{U}^{-1}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{E}\right)\right]^{-1}\,\overline{\otimes}\,\left[\boldsymbol{E}\,\overline{\overline{\otimes}}\,\left(\boldsymbol{U}^{-1}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{S}\right)\right]\right\}}$$

1. Il suffit par exemple de se placer dans la base propre de $\boldsymbol{U}$: si on note λ_i ses valeurs propres positives, le déterminant vaut $\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}\right)\left(\frac{1}{\lambda_2}+\frac{1}{\lambda_3}\right)\left(\frac{1}{\lambda_3}+\frac{1}{\lambda_1}\right)$

Annexe E

Dérivées particulaires des tenseurs de déformation

Dans cette annexe, on calcule les dérivées particulaires de quelques tenseurs de déformation. Elles mettent en évidence une constatation importante :
Les dérivées des tenseurs non objectifs font intervenir les rotations $\boldsymbol{R}$.

On rappelle que le tenseur symétrique des vitesses de déformation $\boldsymbol{D}$ est (voir (6.2) et (6.3) page 59) :

$$\boldsymbol{D} = \mathrm{Sym}\left(\dot{\boldsymbol{F}} \overline{\otimes} \boldsymbol{F}^{-1}\right)$$

et que le tenseur antisymétrique des vitesses de rotation est

$$\boldsymbol{W} = \mathrm{Antisym}\left(\dot{\boldsymbol{F}} \overline{\otimes} \boldsymbol{F}^{-1}\right)$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{F}} \overline{\otimes} \boldsymbol{F}^{-1} &= \boldsymbol{D} + \boldsymbol{W} \\
\boldsymbol{F}^{-T} \overline{\otimes} \dot{\boldsymbol{F}}^{T} &= \left(\dot{\boldsymbol{F}} \overline{\otimes} \boldsymbol{F}^{-1}\right)^{T} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{W}
\end{aligned}$$

E.1 Tenseurs objectifs

E.1.1 Tenseur de Cauchy-Green gauche B

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B} &= \boldsymbol{F} \overline{\otimes} \boldsymbol{F}^{T} \\
\dot{\boldsymbol{B}} &= \dot{\boldsymbol{F}} \overline{\otimes} \boldsymbol{F}^{T} + \boldsymbol{F} \overline{\otimes} \dot{\boldsymbol{F}}^{T} \\
&= \dot{\boldsymbol{F}} \overline{\otimes} \boldsymbol{F}^{-1} \overline{\otimes} \boldsymbol{F} \overline{\otimes} \boldsymbol{F}^{T} + \boldsymbol{F} \overline{\otimes} \boldsymbol{F}^{T} \overline{\otimes} \boldsymbol{F}^{-T} \overline{\otimes} \dot{\boldsymbol{F}}^{T} \\
&= (\boldsymbol{D} + \boldsymbol{W}) \overline{\otimes} \boldsymbol{B} + \boldsymbol{B} \overline{\otimes} (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{W}) \\
\dot{\boldsymbol{B}} &= 2\,\mathrm{Sym}\left[\boldsymbol{B} \overline{\otimes} (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{W})\right] \qquad \text{(E.1)}
\end{aligned}$$

Si $\boldsymbol{T}$ est un tenseur quelconque, on en déduit le produit scalaire :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}\overline{\overline{\otimes}}\,\dot{\boldsymbol{B}} &= 2\,\boldsymbol{T}\overline{\overline{\otimes}}\,\mathrm{Sym}\left[\boldsymbol{B}\overline{\otimes}\,(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{W})\right] \\
&= 2\,\mathrm{Sym}\boldsymbol{T}\overline{\overline{\otimes}}\,\mathrm{Sym}\left[\boldsymbol{B}\overline{\otimes}\,(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{W})\right] \\
&= 2\,\mathrm{Sym}\boldsymbol{T}\overline{\overline{\otimes}}\,\left[\boldsymbol{B}\overline{\otimes}\,(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{W})\right] \\
&= 2\,\mathrm{Sym}\boldsymbol{T}\overline{\overline{\otimes}}\,(\boldsymbol{B}\overline{\otimes}\boldsymbol{D}) - 2\,\mathrm{Sym}\boldsymbol{T}\overline{\overline{\otimes}}\,(\boldsymbol{B}\overline{\otimes}\boldsymbol{W}) \\
&= 2\,(\boldsymbol{B}\overline{\otimes}\,\mathrm{Sym}\boldsymbol{T})\,\overline{\overline{\otimes}}\boldsymbol{D} - 2\,(\boldsymbol{B}\overline{\otimes}\,\mathrm{Sym}\boldsymbol{T})\,\overline{\overline{\otimes}}\boldsymbol{W}
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{T}\overline{\overline{\otimes}}\,\dot{\boldsymbol{B}} = \left(\boldsymbol{B}\overline{\otimes}\boldsymbol{T}+\boldsymbol{B}\overline{\otimes}\boldsymbol{T}^T\right)\overline{\overline{\otimes}}\boldsymbol{D} - \left(\boldsymbol{B}\overline{\otimes}\boldsymbol{T}+\boldsymbol{B}\overline{\otimes}\boldsymbol{T}^T\right)\overline{\overline{\otimes}}\boldsymbol{W} \tag{E.2}$$

Si $\boldsymbol{T}$ est symétrique et a une base propre commune avec $\boldsymbol{B}$, le produit $\boldsymbol{B}\overline{\otimes}\,\mathrm{Sym}\boldsymbol{T}$ est symétrique et le dernier terme est nul. En particulier, on a

$$\boldsymbol{B}^x\,\overline{\overline{\otimes}}\,\dot{\boldsymbol{B}} = 2\,\boldsymbol{B}^{x+1}\,\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{D} \quad ; \quad \forall x\in\mathbb{R} \tag{E.3}$$

En utilisant (B.1), (B.2) et (B.3) page 212, on en déduit les dérivées particulaires des invariants :

$$\dot{B}_I = \boldsymbol{G}\overline{\overline{\otimes}}\,\dot{\boldsymbol{B}} = 2\,\boldsymbol{B}\overline{\overline{\otimes}}\boldsymbol{D} \tag{E.4}$$

$$\dot{B}_{II} = (B_I\boldsymbol{G}-\boldsymbol{B})\,\overline{\overline{\otimes}}\,\dot{\boldsymbol{B}} = 2\,(B_I\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}^2)\,\overline{\overline{\otimes}}\boldsymbol{D} \tag{E.5}$$

$$\dot{B}_{III} = (B_{II}\boldsymbol{G}-B_I\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^2)\,\overline{\overline{\otimes}}\,\dot{\boldsymbol{B}} = 2\,(B_{II}\boldsymbol{B}-B_I\boldsymbol{B}^2+\boldsymbol{B}^3)\,\overline{\overline{\otimes}}\boldsymbol{D} \tag{E.6}$$

E.1.2 Tenseur de Green-Lagrange gauche $\boldsymbol{K}$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{K} &= \frac{1}{2}\,(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{G}) \\
\dot{\boldsymbol{K}} &= \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{B}} \\
\dot{\boldsymbol{K}} &= \mathrm{Sym}\left[(2\,\boldsymbol{K}+\boldsymbol{G})\,\overline{\otimes}\,(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{W})\right]
\end{aligned} \tag{E.7}$$

Si $\boldsymbol{T}$ est un tenseur quelconque, on en déduit le produit scalaire :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}\overline{\overline{\otimes}}\,\dot{\boldsymbol{K}} &= \boldsymbol{T}\overline{\overline{\otimes}}\,\mathrm{Sym}\left[(2\,\boldsymbol{K}+\boldsymbol{G})\,\overline{\otimes}\,(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{W})\right] \\
&= \mathrm{Sym}\boldsymbol{T}\overline{\overline{\otimes}}\,\mathrm{Sym}\left[(2\,\boldsymbol{K}+\boldsymbol{G})\,\overline{\otimes}\,(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{W})\right] \\
&= \mathrm{Sym}\boldsymbol{T}\overline{\overline{\otimes}}\,\left[(2\,\boldsymbol{K}+\boldsymbol{G})\,\overline{\otimes}\,(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{W})\right]
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{T}\overline{\overline{\otimes}}\,\dot{\boldsymbol{K}} = ((2\,\boldsymbol{K}+\boldsymbol{G})\,\overline{\otimes}\,\mathrm{Sym}\boldsymbol{T})\,\overline{\overline{\otimes}}\boldsymbol{D} - ((2\,\boldsymbol{K}+\boldsymbol{G})\,\overline{\otimes}\,\mathrm{Sym}\boldsymbol{T})\,\overline{\overline{\otimes}}\boldsymbol{W} \tag{E.8}$$

Si $\boldsymbol{T}$ a une base propre commune avec $(2\,\boldsymbol{K}+\boldsymbol{G})$ (c'est-à-dire avec $\boldsymbol{K}$), le produit $(2\,\boldsymbol{K}+\boldsymbol{G})\,\overline{\otimes}\,\mathrm{Sym}\boldsymbol{T}$ est symétrique et le second terme est nul. En particulier, on a

$$\boldsymbol{K}^n\,\overline{\overline{\otimes}}\,\dot{\boldsymbol{K}} = \left[(2\,\boldsymbol{K}+\boldsymbol{G})\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{K}^n\right]\overline{\overline{\otimes}}\boldsymbol{D} \quad ; \quad \forall n\mathbb{N} \tag{E.9}$$

$$(2\,\boldsymbol{K}+\boldsymbol{G})^x\,\overline{\overline{\otimes}}\,\dot{\boldsymbol{K}} = (2\,\boldsymbol{K}+\boldsymbol{G})^{x+1}\,\overline{\overline{\otimes}}\boldsymbol{D} \quad ; \quad \forall x\mathbb{R} \tag{E.10}$$

En utilisant (B.1), (B.2) et (B.3) page 212, on déduit de (E.9) les dérivées particulaires des invariants :

$$\dot{K}_I = \boldsymbol{G}\overline{\overline{\otimes}}\,\dot{\boldsymbol{K}} = (2\,\boldsymbol{K}+\boldsymbol{G})\,\overline{\overline{\otimes}}\boldsymbol{D} \tag{E.11}$$

$$\dot{K}_{II} = (K_I\boldsymbol{G}-\boldsymbol{K})\,\overline{\overline{\otimes}}\,\dot{\boldsymbol{K}} = (K_I(2\,\boldsymbol{K}+\boldsymbol{G}) - (2\,\boldsymbol{K}+\boldsymbol{G})\,\overline{\otimes}\boldsymbol{K})\,\overline{\overline{\otimes}}\boldsymbol{D} \tag{E.12}$$

$$\begin{aligned}
\dot{K}_{III} &= (K_{II}\boldsymbol{G}-K_I\boldsymbol{K}+\boldsymbol{K}^2)\,\overline{\overline{\otimes}}\,\dot{\boldsymbol{K}} \\
&= \left(K_{II}(2\,\boldsymbol{K}+\boldsymbol{G}) - K_I(2\,\boldsymbol{K}+\boldsymbol{G})\,\overline{\otimes}\boldsymbol{K} + (2\,\boldsymbol{K}+\boldsymbol{G})\,\overline{\otimes}\boldsymbol{K}^2\right)\overline{\overline{\otimes}}\boldsymbol{D}
\end{aligned} \tag{E.13}$$

E.1.3 Distorsion à gauche $\boldsymbol{V}$

De (E.1) page 227 il vient

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{V}} \overline{\otimes} \boldsymbol{V} + \boldsymbol{V} \overline{\otimes} \dot{\boldsymbol{V}} &= 2\,\mathrm{Sym}\left[\boldsymbol{B} \overline{\otimes} (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{W})\right] \\
2\,\mathrm{Sym}\left(\boldsymbol{V} \overline{\otimes} \dot{\boldsymbol{V}}\right) &= 2\,\mathrm{Sym}\left[\boldsymbol{V}^2 \overline{\otimes} (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{W})\right]
\end{aligned}$$

On trouve la solution de cette équation en $\dot{\boldsymbol{V}}$ en utilisant (D.2) page 226 de l'annexe D.

$$\dot{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{V}^{-1} \overline{\otimes} \mathrm{Sym}\left[\boldsymbol{V}^2 \overline{\otimes} (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{W})\right] + \boldsymbol{V}^{-1} \overline{\otimes} \boldsymbol{A} \tag{E.14}$$

où $\boldsymbol{A}$ est un tenseur antisymétrique défini par :

$$\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{E} \overline{\otimes} \left\{\left[\boldsymbol{E} \overline{\overline{\otimes}} (\boldsymbol{V}^{-1} \overline{\otimes} \boldsymbol{E})\right]^{-1} \overline{\otimes} \left[\boldsymbol{E} \overline{\overline{\otimes}} (\boldsymbol{V}^{-1} \overline{\otimes} \mathrm{Sym}\left[\boldsymbol{V}^2 \overline{\otimes} (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{W})\right])\right]\right\}$$

Si $\boldsymbol{T}$ est un tenseur quelconque, on en déduit le produit scalaire

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T} \overline{\overline{\otimes}} \dot{\boldsymbol{V}} &= \boldsymbol{T} \overline{\overline{\otimes}} \left\{\boldsymbol{V}^{-1} \overline{\otimes} \mathrm{Sym}\left[\boldsymbol{V}^2 \overline{\otimes} (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{W})\right]\right\} + \boldsymbol{T} \overline{\overline{\otimes}} \left(\boldsymbol{V}^{-1} \overline{\otimes} \boldsymbol{A}\right) \\
&= \left(\boldsymbol{V}^{-1} \overline{\otimes} \boldsymbol{T}\right) \overline{\overline{\otimes}} \mathrm{Sym}\left[\boldsymbol{V}^2 \overline{\otimes} (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{W})\right] + \left(\boldsymbol{V}^{-1} \overline{\otimes} \boldsymbol{T}\right) \overline{\overline{\otimes}} \boldsymbol{A} \\
&= \mathrm{Sym}\left(\boldsymbol{V}^{-1} \overline{\otimes} \boldsymbol{T}\right) \overline{\overline{\otimes}} \mathrm{Sym}\left[\boldsymbol{V}^2 \overline{\otimes} (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{W})\right] + \left(\boldsymbol{V}^{-1} \overline{\otimes} \boldsymbol{T}\right) \overline{\overline{\otimes}} \boldsymbol{A} \\
&= \mathrm{Sym}\left(\boldsymbol{V}^{-1} \overline{\otimes} \boldsymbol{T}\right) \overline{\overline{\otimes}} \left[\boldsymbol{V}^2 \overline{\otimes} (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{W})\right] + \left(\boldsymbol{V}^{-1} \overline{\otimes} \boldsymbol{T}\right) \overline{\overline{\otimes}} \boldsymbol{A} \\
\boldsymbol{T} \overline{\overline{\otimes}} \dot{\boldsymbol{V}} &= \left[\boldsymbol{V}^2 \overline{\otimes} \mathrm{Sym}\left(\boldsymbol{V}^{-1} \overline{\otimes} \boldsymbol{T}\right)\right] \overline{\overline{\otimes}} \boldsymbol{D} - \left[\boldsymbol{V}^2 \overline{\otimes} \mathrm{Sym}\left(\boldsymbol{V}^{-1} \overline{\otimes} \boldsymbol{T}\right)\right] \overline{\overline{\otimes}} \boldsymbol{W} + \left(\boldsymbol{V}^{-1} \overline{\otimes} \boldsymbol{T}\right) \overline{\overline{\otimes}} \boldsymbol{A}
\end{aligned} \tag{E.15}$$

Si $\boldsymbol{T}$ est un tenseur symétrique de même base propre que $\boldsymbol{V}$, les deux derniers termes sont nuls. En particulier, on a

$$\boldsymbol{V}^x \overline{\overline{\otimes}} \dot{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{V}^{x+1} \overline{\overline{\otimes}} \boldsymbol{D} \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{E.16}$$

En utilisant (B.1), (B.2) et (B.3) page 212, on en déduit les dérivées particulaires des invariants :

$$\dot{V}_I = \boldsymbol{G} \overline{\overline{\otimes}} \dot{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{V} \overline{\overline{\otimes}} \boldsymbol{D} \tag{E.17}$$

$$\dot{V}_{II} = (V_I \boldsymbol{G} - \boldsymbol{V}) \overline{\overline{\otimes}} \dot{\boldsymbol{V}} = (V_I \boldsymbol{V} - \boldsymbol{V}^2) \overline{\overline{\otimes}} \boldsymbol{D} \tag{E.18}$$

$$\dot{V}_{III} = (V_{II} \boldsymbol{G} - V_I \boldsymbol{V} + \boldsymbol{V}^2) \overline{\overline{\otimes}} \dot{\boldsymbol{V}} = (V_{II} \boldsymbol{V} - V_I \boldsymbol{V}^2 + \boldsymbol{V}^3) \overline{\overline{\otimes}} \boldsymbol{D} \tag{E.19}$$

E.1.4 Tenseur Biot gauche $\boldsymbol{J}$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{J} &= \boldsymbol{V} - \boldsymbol{G} \\
\dot{\boldsymbol{J}} &= \dot{\boldsymbol{V}} \\
\dot{\boldsymbol{J}} &= (\boldsymbol{J} + \boldsymbol{G})^{-1} \overline{\otimes} \mathrm{Sym}\left[(\boldsymbol{J} + \boldsymbol{G})^2 \overline{\otimes} (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{W})\right] + (\boldsymbol{J} + \boldsymbol{G})^{-1} \overline{\otimes} \boldsymbol{A}
\end{aligned} \tag{E.20}$$

Si $\boldsymbol{T}$ est un tenseur quelconque, on en déduit le produit scalaire :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}\,\overline{\overline{\otimes}}\,\dot{\boldsymbol{J}} &= \boldsymbol{T}\,\overline{\overline{\otimes}}\left\{(\boldsymbol{J}+\boldsymbol{G})^{-1}\,\overline{\otimes}\,\mathrm{Sym}\left[(\boldsymbol{J}+\boldsymbol{G})^{2}\,\overline{\otimes}\,(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{W})\right]\right\} + \boldsymbol{T}\,\overline{\overline{\otimes}}\left[(\boldsymbol{J}+\boldsymbol{G})^{-1}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{A}\right]\\
&= \left[(\boldsymbol{J}+\boldsymbol{G})^{-1}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{T}\right]\overline{\overline{\otimes}}\,\mathrm{Sym}\left[(\boldsymbol{J}+\boldsymbol{G})^{2}\,\overline{\otimes}\,(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{W})\right] + \left[(\boldsymbol{J}+\boldsymbol{G})^{-1}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{T}\right]\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{A}\\
&= \mathrm{Sym}\left[(\boldsymbol{J}+\boldsymbol{G})^{-1}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{T}\right]\overline{\overline{\otimes}}\,\mathrm{Sym}\left[(\boldsymbol{J}+\boldsymbol{G})^{2}\,\overline{\otimes}\,(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{W})\right] + \left[(\boldsymbol{J}+\boldsymbol{G})^{-1}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{T}\right]\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{A}\\
&= \mathrm{Sym}\left[(\boldsymbol{J}+\boldsymbol{G})^{-1}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{T}\right]\overline{\overline{\otimes}}\left[(\boldsymbol{J}+\boldsymbol{G})^{2}\,\overline{\otimes}\,(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{W})\right] + \left[(\boldsymbol{J}+\boldsymbol{G})^{-1}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{T}\right]\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{A}\\
\boldsymbol{T}\,\overline{\overline{\otimes}}\,\dot{\boldsymbol{J}} &= \left\{(\boldsymbol{J}+\boldsymbol{G})^{2}\,\overline{\otimes}\,\mathrm{Sym}\left[(\boldsymbol{J}+\boldsymbol{G})^{-1}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{T}\right]\right\}\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{D}\\
&\quad - \left\{(\boldsymbol{J}+\boldsymbol{G})^{2}\,\overline{\otimes}\,\mathrm{Sym}\left[(\boldsymbol{J}+\boldsymbol{G})^{-1}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{T}\right]\right\}\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{W} + \left[(\boldsymbol{J}+\boldsymbol{G})^{-1}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{T}\right]\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{A} \qquad \text{(E.21)}
\end{aligned}$$

Si $\boldsymbol{T}$ est un tenseur symétrique de même base propre que $\boldsymbol{J}$ les deux derniers termes disparaisent. En particulier, on a :

$$\boldsymbol{J}^{n}\,\overline{\overline{\otimes}}\,\dot{\boldsymbol{J}} = (\boldsymbol{J}+\boldsymbol{G})\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{J}^{n}\,\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{D} \ ; \ \forall n\in\mathbb{N} \qquad \text{(E.22)}$$

$$(\boldsymbol{J}+\boldsymbol{G})^{x}\,\overline{\overline{\otimes}}\,\dot{\boldsymbol{J}} = (\boldsymbol{J}+\boldsymbol{G})^{x+1}\,\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{D} \ ; \ \forall x\in\mathbb{R} \qquad \text{(E.23)}$$

En utilisant (B.1), (B.2) et (B.3) page 212, on déduit de (E.22) les dérivées particulaires des invariants :

$$\dot{J}_{I} = \boldsymbol{G}\,\overline{\overline{\otimes}}\,\dot{\boldsymbol{J}} = (\boldsymbol{J}+\boldsymbol{G})\,\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{D} \qquad \text{(E.24)}$$

$$\dot{J}_{II} = (J_{I}\boldsymbol{G}-\boldsymbol{J})\,\overline{\overline{\otimes}}\,\dot{\boldsymbol{J}} = (J_{I}(\boldsymbol{J}+\boldsymbol{G})-(\boldsymbol{J}+\boldsymbol{G})\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{J})\,\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{D} \qquad \text{(E.25)}$$

$$\begin{aligned}
\dot{J}_{III} &= (J_{II}\boldsymbol{G}-J_{I}\boldsymbol{K}+\boldsymbol{J}^{2})\,\overline{\overline{\otimes}}\,\dot{\boldsymbol{K}}\\
&= \left(J_{II}(\boldsymbol{J}+\boldsymbol{G})-J_{I}(\boldsymbol{J}+\boldsymbol{G})\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{J}+(\boldsymbol{J}+\boldsymbol{G})\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{J}^{2}\right)\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{D} \qquad \text{(E.26)}
\end{aligned}$$

E.1.5 Tenseur de Hill gauche M

De (E.15), il vient

$$\boldsymbol{T}\,\overline{\overline{\otimes}}\,\dot{\overbrace{\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{M}}}} = \left[\boldsymbol{e}^{2\boldsymbol{M}}\,\overline{\otimes}\,\mathrm{Sym}\left(\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{M}}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{T}\right)\right]\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{D} - \left[\boldsymbol{e}^{2\boldsymbol{M}}\,\overline{\otimes}\,\mathrm{Sym}\left(\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{M}}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{T}\right)\right]\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{W} + \left(e^{-\boldsymbol{M}}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{T}\right)\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{A}$$

Si on prend $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{S}_{m}$, où $\boldsymbol{S}_{m}$ est un tenseur *symétrique de même base propre que* $\boldsymbol{M}$, alors $\boldsymbol{S}_{m}$ et $\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{M}}$ commutent dans le produit $\overline{\otimes}$, et leur produit est symétrique :

$$\boldsymbol{S}_{m}\,\overline{\overline{\otimes}}\,\dot{\overbrace{\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{M}}}} = \left[\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{M}}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{S}_{m}\right]\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{D}$$

En utilisant (A.27) page 200, il vient :

$$\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{M}}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{S}_{m}\right)\overline{\overline{\otimes}}\,\dot{\boldsymbol{M}} = \left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{M}}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{S}_{m}\right)\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{D} \qquad \text{(E.27)}$$

En particulier, pour $\boldsymbol{S}_{m}=e^{-\boldsymbol{M}}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{M}^{n}$ où $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$\boldsymbol{M}^{n}\,\overline{\overline{\otimes}}\,\dot{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{M}^{n}\,\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{D} \ ; \ \forall n\in\mathbb{N} \qquad \text{(E.28)}$$

En utilisant (B.1), (B.2) et (B.3) page 212, on en déduit les dérivées particulaires des invariants :

$$\dot{M}_{I} = \boldsymbol{G}\,\overline{\overline{\otimes}}\,\dot{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{G}\,\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{D} \qquad \text{(E.29)}$$

$$\dot{M}_{II} = (M_{I}\boldsymbol{G}-\boldsymbol{M})\,\overline{\overline{\otimes}}\,\dot{\boldsymbol{M}} = (M_{I}\boldsymbol{G}-\boldsymbol{M})\,\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{D} \qquad \text{(E.30)}$$

$$\dot{M}_{III} = (M_{II}\boldsymbol{G}-M_{I}\boldsymbol{M}+\boldsymbol{M}^{2})\,\overline{\overline{\otimes}}\,\dot{\boldsymbol{M}} = (M_{II}\boldsymbol{G}-M_{I}\boldsymbol{M}+\boldsymbol{M}^{2})\,\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{D} \qquad \text{(E.31)}$$

E.2 Tenseurs non objectifs

E.2.1 Tenseur de Cauchy-Green droit $\boldsymbol{C}$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{C} &= \boldsymbol{F}^T \overline{\otimes}\, \boldsymbol{F} \\
\dot{\boldsymbol{C}} &= \dot{\boldsymbol{F}}^T \overline{\otimes}\, \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}^T \overline{\otimes}\, \dot{\boldsymbol{F}} \\
&= \boldsymbol{F}^T \overline{\otimes}\, \boldsymbol{F}^{-T} \overline{\otimes}\, \dot{\boldsymbol{F}}^T \overline{\otimes}\, \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}^T \overline{\otimes}\, \dot{\boldsymbol{F}} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{F}^{-1} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{F} \\
&= \boldsymbol{F}^T \overline{\otimes}\, (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{W}) \overline{\otimes}\, \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}^T \overline{\otimes}\, (\boldsymbol{D} + \boldsymbol{W}) \overline{\otimes}\, \boldsymbol{F} \\
&= 2\, \boldsymbol{F}^T \overline{\otimes}\, \boldsymbol{D} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{F} \\
&= 2\, \boldsymbol{U} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{R}^T \overline{\otimes}\, \boldsymbol{D} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{R} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{U} \\
\dot{\boldsymbol{C}} &= 2\, \boldsymbol{C}^{\frac{1}{2}} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{R}^T \overline{\otimes}\, \boldsymbol{D} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{R} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{C}^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
\tag{E.32}
$$

Si $\boldsymbol{T}$ est un tenseur quelconque, on en déduit le produit scalaire :

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{T} \overline{\overline{\otimes}}\, \dot{\boldsymbol{C}} &= 2\, \boldsymbol{T} \overline{\overline{\otimes}} \left(\boldsymbol{C}^{\frac{1}{2}} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{R}^T \overline{\otimes}\, \boldsymbol{D} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{R} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{C}^{\frac{1}{2}} \right) \\
\boldsymbol{T} \overline{\overline{\otimes}}\, \dot{\boldsymbol{C}} &= 2 \left(\boldsymbol{R} \overline{\otimes}\, C^{\frac{1}{2}} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{T} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{C}^{\frac{1}{2}} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{R}^T \right) \overline{\overline{\otimes}}\, \boldsymbol{D}
\end{aligned}
\tag{E.33}
$$

En particulier, on a :

$$
\boldsymbol{C}^x \overline{\overline{\otimes}}\, \dot{\boldsymbol{C}} = 2 \left(\boldsymbol{R} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{C}^{x+1} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{R}^T \right) \overline{\overline{\otimes}}\, \boldsymbol{D} \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}
\tag{E.34}
$$

En utilisant (B.1), (B.2) et (B.3) page 212, on en déduit les dérivées particulaires des invariants :

$$
\dot{C}_I = \boldsymbol{G} \overline{\overline{\otimes}}\, \dot{\boldsymbol{C}} = 2\, (\boldsymbol{R} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{C} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{R}^T) \overline{\overline{\otimes}}\, \boldsymbol{D}
\tag{E.35}
$$

$$
\dot{C}_{II} = (C_I \boldsymbol{G} - \boldsymbol{C}) \overline{\overline{\otimes}}\, \dot{\boldsymbol{C}} = 2\, (C_I \boldsymbol{R} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{C} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{R}^T - \boldsymbol{R} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{C}^2 \overline{\otimes}\, \boldsymbol{R}^T) \overline{\overline{\otimes}}\, \boldsymbol{D}
\tag{E.36}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{C}_{III} &= (C_{II} \boldsymbol{G} - C_I \boldsymbol{C} + \boldsymbol{C}^2) \overline{\overline{\otimes}}\, \dot{\boldsymbol{C}} \\
&= 2\, (C_{II} \boldsymbol{R} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{C} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{R}^T - C_I \boldsymbol{R} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{C}^2 \overline{\otimes}\, \boldsymbol{R}^T + \boldsymbol{R} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{C}^3 \overline{\otimes}\, \boldsymbol{R}^T) \overline{\overline{\otimes}}\, \boldsymbol{D}
\end{aligned}
\tag{E.37}
$$

E.2.2 Tenseur de Green-Lagrange droit $\boldsymbol{E}$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= \frac{1}{2}\, (\boldsymbol{C} - \boldsymbol{G}) \\
\dot{\boldsymbol{E}} &= \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{C}} \\
\dot{\boldsymbol{E}} &= 2\, (2\boldsymbol{E} + \boldsymbol{G})^{\frac{1}{2}} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{R}^T \overline{\otimes}\, \boldsymbol{D} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{R} \overline{\otimes}\, (2\boldsymbol{E} + \boldsymbol{G})^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

De (E.33), il vient :

$$
\boldsymbol{T} \overline{\overline{\otimes}}\, \dot{\boldsymbol{E}} = 2 \left(\boldsymbol{R} \overline{\otimes}\, (2\boldsymbol{E} + \boldsymbol{G})^{\frac{1}{2}} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{T} \overline{\otimes}\, (2\boldsymbol{E} + \boldsymbol{G})^{\frac{1}{2}} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{R}^T \right) \overline{\overline{\otimes}}\, \boldsymbol{D}
\tag{E.38}
$$

En particulier, on a :

$$
\boldsymbol{E}^n \overline{\overline{\otimes}}\, \dot{\boldsymbol{E}} = \left[\boldsymbol{R} \overline{\otimes}\, (2\, \boldsymbol{E} + \boldsymbol{G})^{\frac{1}{2}} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{E}^n \overline{\otimes}\, (2\, \boldsymbol{E} + \boldsymbol{G})^{\frac{1}{2}} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{R}^T \right] \overline{\overline{\otimes}}\, \boldsymbol{D} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}
\tag{E.39}
$$

$$
(2\, \boldsymbol{E} + \boldsymbol{G})^x \overline{\overline{\otimes}}\, \dot{\boldsymbol{E}} = \left[\boldsymbol{R} \overline{\otimes}\, (2\, \boldsymbol{E} + \boldsymbol{G})^{x+1} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{R}^T \right] \overline{\overline{\otimes}}\, \boldsymbol{D} \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}
\tag{E.40}
$$

E.2.3 Distorsion à droite $\boldsymbol{U}$

de (E.32) page 231 on tire

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{U} \overline{\otimes} \dot{\boldsymbol{U}} + \dot{\boldsymbol{U}} \overline{\otimes} \boldsymbol{U} &= 2\, \boldsymbol{U} \overline{\otimes} \boldsymbol{R}^T \overline{\otimes} \boldsymbol{D} \overline{\otimes} \boldsymbol{R} \overline{\otimes} \boldsymbol{U} \\
\mathrm{Sym}\left(\boldsymbol{U} \overline{\otimes} \dot{\boldsymbol{U}}\right) &= \boldsymbol{U} \overline{\otimes} \boldsymbol{R}^T \overline{\otimes} \boldsymbol{D} \overline{\otimes} \boldsymbol{R} \overline{\otimes} \boldsymbol{U}
\end{aligned}$$

On trouve la solution de cette équation en $\dot{\boldsymbol{U}}$ en utilisant (D.2) page 226 de l'annexe D.

$$\dot{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{R}^T \overline{\otimes} \boldsymbol{D} \overline{\otimes} \boldsymbol{R} \overline{\otimes} \boldsymbol{U} + \boldsymbol{U}^{-1} \overline{\otimes} \boldsymbol{A} \tag{E.41}$$

où $\boldsymbol{A}$ est un tenseur antisymétrique défini par :

$$\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{E} \overline{\otimes} \left\{ \left[\boldsymbol{E} \overline{\overline{\otimes}} \left(\boldsymbol{U}^{-1} \overline{\otimes} \boldsymbol{E}\right)\right]^{-1} \overline{\otimes} \left[\boldsymbol{E} \overline{\overline{\otimes}} \left(\boldsymbol{R}^T \overline{\otimes} \boldsymbol{D} \overline{\otimes} \boldsymbol{R} \overline{\otimes} \boldsymbol{U}\right)\right] \right\}$$

Si $\boldsymbol{T}$ est une tenseur du second ordre quelconque, on en déduit le produit scalaire :

$$\boldsymbol{T} \overline{\overline{\otimes}} \dot{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{T} \overline{\overline{\otimes}} \left(\boldsymbol{R}^T \overline{\otimes} \boldsymbol{D} \overline{\otimes} \boldsymbol{R} \overline{\otimes} \boldsymbol{U}\right) + \boldsymbol{T} \overline{\overline{\otimes}} \left(\boldsymbol{U}^{-1} \overline{\otimes} \boldsymbol{A}\right) \tag{E.42}$$

$$\boldsymbol{T} \overline{\overline{\otimes}} \dot{\boldsymbol{U}} = \left(\boldsymbol{R} \overline{\otimes} \boldsymbol{T} \overline{\otimes} \boldsymbol{U} \overline{\otimes} \boldsymbol{R}^T\right) \overline{\overline{\otimes}} \boldsymbol{D} + \left(\boldsymbol{U}^{-1} \overline{\otimes} \boldsymbol{T}\right) \overline{\overline{\otimes}} \boldsymbol{A} \tag{E.43}$$

Si $\boldsymbol{T}$ est un tenseur symétrique de même base propre que $\boldsymbol{U}$, le dernier terme est nul. En particulier, on a :

$$\boldsymbol{U}^x \overline{\overline{\otimes}} \dot{\boldsymbol{U}} = \left(\boldsymbol{R} \overline{\otimes} \boldsymbol{U}^{x+1} \overline{\otimes} \boldsymbol{R}^T\right) \overline{\overline{\otimes}} \boldsymbol{D} \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{E.44}$$

E.2.4 Tenseur de Biot droit $\boldsymbol{P}$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P} &= \boldsymbol{U} - \boldsymbol{G} \\
\dot{\boldsymbol{P}} &= \dot{\boldsymbol{U}} \\
\dot{\boldsymbol{P}} &= \boldsymbol{R}^T \overline{\otimes} \boldsymbol{D} \overline{\otimes} \boldsymbol{R} \overline{\otimes} (\boldsymbol{P} + \boldsymbol{G}) + (\boldsymbol{P} + \boldsymbol{G})^{-1} \overline{\otimes} \boldsymbol{A}
\end{aligned} \tag{E.45}$$

Si $\boldsymbol{T}$ est un tenseur symétrique quelconque, on en déduit le produit scalaire :

$$\boldsymbol{T} \overline{\overline{\otimes}} \dot{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{T} \overline{\overline{\otimes}} \left(\boldsymbol{R}^T \overline{\otimes} \boldsymbol{D} \overline{\otimes} \boldsymbol{R} \overline{\otimes} (\boldsymbol{P} + \boldsymbol{G})\right) + \boldsymbol{T} \overline{\overline{\otimes}} \left((\boldsymbol{P} + \boldsymbol{G})^{-1} \overline{\otimes} \boldsymbol{A}\right)$$

$$\boldsymbol{T} \overline{\overline{\otimes}} \dot{\boldsymbol{P}} = \left(\boldsymbol{R} \overline{\otimes} \boldsymbol{T} \overline{\otimes} (\boldsymbol{P} + \boldsymbol{G}) \overline{\otimes} \boldsymbol{R}^T\right) \overline{\overline{\otimes}} \boldsymbol{D} + \left((\boldsymbol{P} + \boldsymbol{G})^{-1} \boldsymbol{T}\right) \overline{\overline{\otimes}} \boldsymbol{A} \tag{E.46}$$

Si $\boldsymbol{T}$ est un tenseur symétrique de même base propre que $\boldsymbol{P}$, le dernier terme est nul. En particulier, on a :

$$\boldsymbol{P}^n \overline{\overline{\otimes}} \dot{\boldsymbol{P}} = \left(\boldsymbol{R} \overline{\otimes} \boldsymbol{P}^n \overline{\otimes} (\boldsymbol{P} + \boldsymbol{G}) \overline{\otimes} \boldsymbol{R}^T\right) \overline{\overline{\otimes}} \boldsymbol{D} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{E.47}$$

$$(\boldsymbol{P} + \boldsymbol{G})^x \overline{\overline{\otimes}} \dot{\boldsymbol{P}} = \left(\boldsymbol{R} \overline{\otimes} (\boldsymbol{P} + \boldsymbol{G})^{x+1} \overline{\otimes} \boldsymbol{R}^T\right) \overline{\overline{\otimes}} \boldsymbol{D} \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{E.48}$$

E.2.5 Tenseur de Hill droit $\boldsymbol{L}$

de (E.43), il vient :

$$\boldsymbol{T} \overline{\overline{\otimes}} \overbrace{e^{\boldsymbol{L}}}^{\cdot} = \left(\boldsymbol{R} \overline{\otimes} \boldsymbol{T} \overline{\otimes} e^{\boldsymbol{L}} \overline{\otimes} \boldsymbol{R}^T \right) \overline{\overline{\otimes}} \boldsymbol{D} + \left(e^{-\boldsymbol{L}} \overline{\otimes} \boldsymbol{T} \right) \overline{\overline{\otimes}} \boldsymbol{A}$$

Si on prend $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{S}_l$, où $\boldsymbol{S}_l$ est un tenseur *symétrique de même base propre que* $\boldsymbol{L}$, alors $\boldsymbol{S}_l$ et $\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{L}}$ commutent dans le produit $\overline{\otimes}$, et leur produit est symétrique :

$$\boldsymbol{S}_l \overline{\overline{\otimes}} \overbrace{\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{L}}}^{\cdot} = \left(\boldsymbol{R} \overline{\otimes} \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{L}} \overline{\otimes} \boldsymbol{S}_l \overline{\otimes} \boldsymbol{R}^T \right) \overline{\overline{\otimes}} \boldsymbol{D}$$

En utilisant (A.27) page 200, il vient :

$$\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{L}} \overline{\otimes} \boldsymbol{S}_l \right) \overline{\overline{\otimes}} \dot{\boldsymbol{L}} = \left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{L}} \overline{\otimes} \boldsymbol{S}_l \right) \overline{\overline{\otimes}} \boldsymbol{D} \tag{E.49}$$

En particulier, pour $\boldsymbol{S}_l = e^{-\boldsymbol{L}} \overline{\otimes} \boldsymbol{L}^n$ où $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\boldsymbol{L}^n \overline{\overline{\otimes}} \dot{\boldsymbol{L}} = \left(\boldsymbol{R} \overline{\otimes} \boldsymbol{L}^n \overline{\otimes} \boldsymbol{R}^T \right) \overline{\overline{\otimes}} \boldsymbol{D} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{E.50}$$

Annexe F

Propriétés des directions matérielles

Considérons une particule P et la particule $P + \delta P$ située sur la fibre passant par P.

À l'instant t_0 (l'état relâché), la position de P pour l'observateur O est le point m_0. À l'instant t (l'état déformé), la position de P pour l'observateur O est le point m_t.

La direction matérielle de la fibre à l'instant t_0 est

$$\boldsymbol{n}_0 = \frac{\boldsymbol{dm_0}}{||\boldsymbol{dm_0}||}$$

La direction matérielle de la fibre à l'instant t est

$$\boldsymbol{n}_t = \frac{\boldsymbol{dm_t}}{||\boldsymbol{dm_t}||}$$

La transformation de t_0 à t implique

$$\boldsymbol{dm_t} = \boldsymbol{F} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{dm_0}$$

On a donc

$$\boldsymbol{n}_t = \frac{\boldsymbol{F} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{dm_0}}{||\boldsymbol{F} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{dm_0}||} = \frac{\boldsymbol{F} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{n}_0}{||\boldsymbol{F} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{n}_0||} \iff \boldsymbol{n}_0 = ||\boldsymbol{F} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{n}_0||\, \boldsymbol{F}^{-1} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{n}_t \tag{F.1}$$

Dans la suite, il sera commode d'introduire le tenseur uniaxial du second ordre

$$\boldsymbol{N}_t = \boldsymbol{n}_t \otimes \boldsymbol{n}_t$$

F.1 Objectivité de $\boldsymbol{n}_t$

Pour un observateur $\widetilde{O}$, on a de la même manière :

$$\widetilde{\boldsymbol{n}}_t = \frac{\widetilde{\boldsymbol{F}} \overline{\otimes}\, \widetilde{\boldsymbol{dm_0}}}{||\widetilde{\boldsymbol{F}} \overline{\otimes}\, \widetilde{\boldsymbol{dm_0}}||} = \frac{\widetilde{\boldsymbol{F}} \overline{\otimes}\, \widetilde{\boldsymbol{n}}_0}{||\widetilde{\boldsymbol{F}} \overline{\otimes}\, \widetilde{\boldsymbol{n}}_0||} \iff \widetilde{\boldsymbol{n}}_0 = ||\widetilde{\boldsymbol{F}} \overline{\otimes}\, \widetilde{\boldsymbol{n}}_0||\, \widetilde{\boldsymbol{F}}^{-1} \overline{\otimes}\, \widetilde{\boldsymbol{n}}_t \tag{F.2}$$

La formule de changement d'observateur du tenseur non objectif $\boldsymbol{F}$ a été établie en (5.13) page 45 :

$$\widetilde{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{Q}_t \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{F} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{Q}_0^T$$

et d'autre part on a

$$\widetilde{\boldsymbol{dm_0}} = \boldsymbol{Q}_0 \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{dm_0}$$

On a donc

$$\widetilde{\boldsymbol{F}} \,\overline{\otimes}\, \widetilde{\boldsymbol{dm_0}} = \boldsymbol{Q}_t \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{F} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{dm_0}$$

De (F.2), on déduit la formule de changement d'observateur de $\boldsymbol{n}_t$:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\boldsymbol{n}}_t &= \frac{\boldsymbol{Q}_t \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{F} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{dm_0}}{||\boldsymbol{Q}_t \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{F} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{dm_0}||} \\
&= \boldsymbol{Q}_t \,\overline{\otimes}\, \frac{\boldsymbol{F} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{dm_0}}{||\boldsymbol{Q}_t \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{F} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{dm_0}||} \\
&= \boldsymbol{Q}_t \,\overline{\otimes}\, \frac{\boldsymbol{F} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{dm_0}}{||\boldsymbol{F} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{dm_0}||} \quad \text{car } \boldsymbol{Q}_t \text{ est orthogonal)} \\
\widetilde{\boldsymbol{n}}_t &= \boldsymbol{Q}_t \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{n}_t
\end{aligned}$$

Cette formule de changement d'observateur montre que la direction matérielle unitaire des fibres $\boldsymbol{n}_t$ est un vecteur objectif.

F.2 Dérivée particulaire de $\boldsymbol{n}_t$

On a

$$||\boldsymbol{F} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{n}_0|| = \sqrt{\boldsymbol{n}_0 \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{F}^T \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{F} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{n}_0}$$

et $\boldsymbol{n}_0$ est indépendant de t.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{n}_t &= \frac{\boldsymbol{F} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{n}_0}{||\boldsymbol{F} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{n}_0||} \\
\dot{\boldsymbol{n}}_t &= \frac{\dot{\boldsymbol{F}} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{n}_0}{||\boldsymbol{F} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{n}_0||} - \frac{1}{2} \frac{\boldsymbol{F} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{n}_0}{||\boldsymbol{F} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{n}_0||^2} \frac{\boldsymbol{n}_0 \left(\dot{\boldsymbol{F}}^T \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}^T \,\overline{\otimes}\, \dot{\boldsymbol{F}} \right) \overline{\otimes}\, \boldsymbol{n}_0}{||\boldsymbol{F} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{n}_0||} \\
&= \dot{\boldsymbol{F}} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{F}^{-1} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{n}_t - \frac{1}{2} \frac{\boldsymbol{F} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{n}_0}{||\boldsymbol{F} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{n}_0||} \boldsymbol{n}_t \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{F}^{-T} \,\overline{\otimes} \left(\dot{\boldsymbol{F}}^T \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}^T \,\overline{\otimes}\, \dot{\boldsymbol{F}} \right) \overline{\otimes}\, \boldsymbol{F}^{-1} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{n}_t \\
&= \dot{\boldsymbol{F}} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{F}^{-1} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{n}_t - \frac{1}{2} \boldsymbol{n}_t \left[\boldsymbol{n}_t \,\overline{\otimes} \left(\boldsymbol{F}^{-T} \,\overline{\otimes}\, \dot{\boldsymbol{F}}^T \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{F} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{F}^{-1} + \boldsymbol{F}^{-T} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{F}^T \,\overline{\otimes}\, \dot{\boldsymbol{F}} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{F}^{-1} \right) \overline{\otimes}\, \boldsymbol{n}_t \right] \\
&= (\boldsymbol{D} + \boldsymbol{W}) \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{n}_t - \frac{1}{2} \boldsymbol{n}_t \left[\boldsymbol{n}_t \,\overline{\otimes}\, ((\boldsymbol{D} - \boldsymbol{W}) + (\boldsymbol{D} + \boldsymbol{W})) \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{n}_t \right] \\
&= (\boldsymbol{D} + \boldsymbol{W}) \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{n}_t - (\boldsymbol{n}_t \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{D} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{n}_t) \, \boldsymbol{n}_t \\
\dot{\boldsymbol{n}}_t &= (\boldsymbol{D} + \boldsymbol{W}) \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{n}_t - \left(\boldsymbol{N}_t \,\overline{\overline{\otimes}}\, \boldsymbol{D} \right) \boldsymbol{n}_t
\end{aligned} \tag{F.3}$$

F.3 Dérivées particulaires

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{N}}_t &= \boldsymbol{n}_t \otimes \dot{\boldsymbol{n}}_t + \dot{\boldsymbol{n}}_t \otimes \boldsymbol{n}_t \\
&= \boldsymbol{n}_t \otimes \left((\boldsymbol{D}+\boldsymbol{W}) \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{n}_t \right) - \boldsymbol{n}_t \otimes \left(\left(\boldsymbol{N}_t \,\overline{\overline{\otimes}}\, \boldsymbol{D} \right) \boldsymbol{n}_t \right) + \left((\boldsymbol{D}+\boldsymbol{W}) \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{n}_t \right) \otimes \boldsymbol{n}_t - \left(\left(\boldsymbol{N}_t \,\overline{\overline{\otimes}}\, \boldsymbol{D} \right) \boldsymbol{n}_t \right) \otimes \boldsymbol{n}_t \\
&= (\boldsymbol{n}_t \otimes \boldsymbol{n}_t) \,\overline{\otimes}\, (\boldsymbol{D}+\boldsymbol{W})^T - \left(\boldsymbol{N}_t \,\overline{\overline{\otimes}}\, \boldsymbol{D} \right) (\boldsymbol{n}_t \otimes \boldsymbol{n}_t) + (\boldsymbol{D}+\boldsymbol{W}) \,\overline{\otimes}\, (\boldsymbol{n}_t \otimes \boldsymbol{n}_t) - \left(\boldsymbol{N}_t \,\overline{\overline{\otimes}}\, \boldsymbol{D} \right) (\boldsymbol{n}_t \otimes \boldsymbol{n}_t) \\
&= \boldsymbol{N}_t \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{D} - \boldsymbol{N}_t \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{W} + \boldsymbol{D} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{N}_t + \boldsymbol{W} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{N}_t - 2 \left(\boldsymbol{N}_t \,\overline{\overline{\otimes}}\, \boldsymbol{D} \right) \boldsymbol{N}_t \\
&= 2\,\mathrm{Sym}\,(\boldsymbol{N}_t \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{D}) - 2\,\mathrm{Sym}\,(\boldsymbol{N}_t \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{W}) - 2 \left(\boldsymbol{N}_t \,\overline{\overline{\otimes}}\, \boldsymbol{D} \right) \boldsymbol{N}_t \\
&= 2\,\mathrm{Sym}\,(\boldsymbol{N}_t \,\overline{\otimes}\, (\boldsymbol{D}-\boldsymbol{W})) - 2 \left(\boldsymbol{N}_t \,\overline{\overline{\otimes}}\, \boldsymbol{D} \right) \boldsymbol{N}_t
\end{aligned}
$$

$$
\dot{\boldsymbol{N}}_t = 2\,\mathrm{Sym}\,((\boldsymbol{D}+\boldsymbol{W}) \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{N}_t) - 2 \left(\boldsymbol{N}_t \,\overline{\overline{\otimes}}\, \boldsymbol{D} \right) \boldsymbol{N}_t \tag{F.4}
$$

En anisotropie, on a aussi besoin des dérivées particulaires des deux produits $X_{IV} = \boldsymbol{X} \,\overline{\overline{\otimes}}\, \boldsymbol{Nt}$ et $X_V = \boldsymbol{X}^2 \,\overline{\overline{\otimes}}\, \boldsymbol{Nt}$.

En utilisant (4.2) page 128, la dérivée de $\boldsymbol{X} \,\overline{\overline{\otimes}}\, \boldsymbol{Nt}$ est :

$$
\begin{aligned}
\dot{X}_{IV} &= \boldsymbol{X} \,\overline{\overline{\otimes}}\, \dot{\boldsymbol{N}}_t + \boldsymbol{N}_t \,\overline{\overline{\otimes}}\, \dot{\boldsymbol{X}} \\
&= 2\,\boldsymbol{X} \,\overline{\overline{\otimes}}\, \mathrm{Sym}\,(\boldsymbol{N}_t \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{D}) - 2\,\boldsymbol{X} \,\overline{\overline{\otimes}}\, \mathrm{Sym}\,(\boldsymbol{N}_t \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{W}) - 2 \left(\boldsymbol{N}_t \,\overline{\overline{\otimes}}\, \boldsymbol{D} \right) \boldsymbol{X} \,\overline{\overline{\otimes}}\, \boldsymbol{N}_t + \boldsymbol{N}_t \,\overline{\overline{\otimes}}\, \dot{\boldsymbol{X}} \\
&= 2\,\boldsymbol{X} \,\overline{\overline{\otimes}}\, (\boldsymbol{N}_t \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{D}) - 2\,\boldsymbol{X} \,\overline{\overline{\otimes}}\, (\boldsymbol{N}_t \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{W}) - 2 \left(\boldsymbol{N}_t \,\overline{\overline{\otimes}}\, \boldsymbol{D} \right) X_{IV} + \boldsymbol{N}_t \,\overline{\overline{\otimes}}\, \dot{\boldsymbol{X}} \\
&= 2\,(\boldsymbol{N}_t \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{X}) \,\overline{\overline{\otimes}}\, \boldsymbol{D} - 2\,(\boldsymbol{N}_t \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{X}) \,\overline{\overline{\otimes}}\, \boldsymbol{W} - 2\,X_{IV}\,\boldsymbol{N}_t \,\overline{\overline{\otimes}}\, \boldsymbol{D} + \boldsymbol{N}_t \,\overline{\overline{\otimes}}\, \dot{\boldsymbol{X}}
\end{aligned}
\tag{F.5}
$$

Si on utilise le tenseur de déformation objectif $\boldsymbol{B}$, dont la dérivée particulaire est donnée par E.1 page 227, on obtient :

$$
\begin{aligned}
\dot{B}_{IV} &= 2\,(\boldsymbol{N}_t \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{B}) \,\overline{\overline{\otimes}}\, \boldsymbol{D} - 2\,(\boldsymbol{N}_t \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{B}) \,\overline{\overline{\otimes}}\, \boldsymbol{W} - 2\,B_{IV}\,\boldsymbol{N}_t \,\overline{\overline{\otimes}}\, \boldsymbol{D} + 2\,\boldsymbol{N}_t \,\overline{\overline{\otimes}}\, \mathrm{Sym}\,[\boldsymbol{B} \,\overline{\otimes}\, (\boldsymbol{D}-\boldsymbol{W})] \\
&= 2\,(\boldsymbol{N}_t \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{B}) \,\overline{\overline{\otimes}}\, \boldsymbol{D} - 2\,(\boldsymbol{N}_t \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{B}) \,\overline{\overline{\otimes}}\, \boldsymbol{W} - 2\,B_{IV}\,\boldsymbol{N}_t \,\overline{\overline{\otimes}}\, \boldsymbol{D} \\
&+ \quad \boldsymbol{Nt} \,\overline{\overline{\otimes}}\, (\boldsymbol{B} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{D}) - \boldsymbol{N}_t \,\overline{\overline{\otimes}}\, (\boldsymbol{B} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{W}) + \boldsymbol{N}_t \,\overline{\overline{\otimes}}\, (\boldsymbol{D} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{N}_t \,\overline{\overline{\otimes}}\, (\boldsymbol{W} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{B}) \\
&= 2\,(\boldsymbol{N}_t \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{B}) \,\overline{\overline{\otimes}}\, \boldsymbol{D} - 2\,(\boldsymbol{N}_t \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{B}) \,\overline{\overline{\otimes}}\, \boldsymbol{W} - 2\,B_{IV}\,\boldsymbol{N}_t \,\overline{\overline{\otimes}}\, \boldsymbol{D} \\
&+ \quad (\boldsymbol{B} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{N}_t + \boldsymbol{N}_t \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{B}) \,\overline{\overline{\otimes}}\, \boldsymbol{D} + 2\,(\boldsymbol{N}_t \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{B}) \,\overline{\overline{\otimes}}\, \boldsymbol{W}
\end{aligned}
$$

$$
\dot{B}_{IV} = 2\,(\boldsymbol{N}_t \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{B}) \,\overline{\overline{\otimes}}\, \boldsymbol{D} - 2\,B_{IV}\,\boldsymbol{N}_t \,\overline{\overline{\otimes}}\, \boldsymbol{D} + (\boldsymbol{B} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{N}_t + \boldsymbol{N}_t \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{B}) \,\overline{\overline{\otimes}}\, \boldsymbol{D} \tag{F.6}
$$

Un calcul analogue conduit à la dérivée de $X_V = \boldsymbol{X}^2 \,\overline{\overline{\otimes}}\, \boldsymbol{Nt}$:

$$
\begin{aligned}
\dot{X}_V &= \boldsymbol{X}^2 \,\overline{\overline{\otimes}}\, \dot{\boldsymbol{N}}_t + \boldsymbol{N}_t \,\overline{\overline{\otimes}}\, \left(\dot{\boldsymbol{X}} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{X} + \boldsymbol{X} \,\overline{\otimes}\, \dot{\boldsymbol{X}} \right) \\
&= 2\,\left(\boldsymbol{N}_t \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{X}^2 \right) \,\overline{\overline{\otimes}}\, \boldsymbol{D} - 2\,\left(\boldsymbol{N}_t \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{X}^2 \right) \,\overline{\overline{\otimes}}\, \boldsymbol{W} - 2\,X_V\,\boldsymbol{N}_t \,\overline{\overline{\otimes}}\, \boldsymbol{D} + 2\,(\boldsymbol{X} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{N}_t) \,\overline{\overline{\otimes}}\, \dot{\boldsymbol{X}}
\end{aligned}
\tag{F.7}
$$

où $\boldsymbol{D}$ est le tenseur (symétrique) des vitesses de déformation, et $\boldsymbol{W}$ est le tenseur (antisymétrique) des vitesses de rotation (voir (6.2) et (6.3) page 59).

Si on utilise le tenseur de déformation objectif $\boldsymbol{B}$, dont la dérivée particulaire est donnée par E.1 page 227, le terme $2\,(\boldsymbol{X} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{N}_t) \,\overline{\overline{\otimes}}\, \dot{\boldsymbol{X}}$ devient :

$$
\begin{aligned}
2\,(\boldsymbol{X} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{N}_t) \,\overline{\overline{\otimes}}\, \dot{\boldsymbol{B}} &= 2\,\boldsymbol{B} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{N}_t \,\overline{\overline{\otimes}}\, (\boldsymbol{B} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{D} - \boldsymbol{B} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{W} + \boldsymbol{D} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{B} + \boldsymbol{W} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{B}) \\
&= 2\,(\boldsymbol{B}^2 \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{N}_t) \,\overline{\overline{\otimes}}\, \boldsymbol{D} - 2\,(\boldsymbol{B}^2 \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{N}_t) \,\overline{\overline{\otimes}}\, \boldsymbol{W} + 2\,(\boldsymbol{B} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{N}_t \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{B}) \,\overline{\overline{\otimes}}\, \boldsymbol{D} - 0
\end{aligned}
$$

Finalement,

$$\dot{X}_V = 2\left(\boldsymbol{N}_t \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{B}^2 + \boldsymbol{B}^2 \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{N}_t\right) \overline{\overline{\otimes}}\, \boldsymbol{D} - 2\, X_V\, \boldsymbol{N}_t \,\overline{\overline{\otimes}}\, \boldsymbol{D} + 2\,(\boldsymbol{B} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{N}_t \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{B}) \,\overline{\overline{\otimes}}\, \boldsymbol{D} \tag{F.8}$$

Annexe G

Déformations à contrainte nulle en thermo-élasticité

On se propose d'étudier les tenseurs de déformation conduisant à une contrainte nulle en thermo-élasticité. Ces tenseurs de déformation représentent la dilatation thermique libre (c'est-à-dire sans contraintes).

Suivant le type de milieu, la forme de ces tenseurs n'est pas quelconque. On va voir que pour avoir des dilatations thermiques physiquement raisonnables, il faut que l'énergie libre ψ satisfasse à certaines conditions qui limitent les formes possibles de son expression enfonction des variables d'état.

G.1 Thermo-élasticité isotrope

On constate expérimentalement que la dilatation thermique libre d'un milieu thermo-élastique isotrope est une dilatation sphérique (voir C.1 page 213).

Si on utilise un tenseur de déformation $\boldsymbol{X}$ choisi parmi $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{V}$ ou $\boldsymbol{M}$, la loi de comportement est de la forme :

$$\boldsymbol{\sigma} = K_G\,\boldsymbol{G} + K_X\,\boldsymbol{X} + K_{X^2}\,\boldsymbol{X}^2$$

où K_G, K_X et K_{X^2} s'expriment en fonction de l'énergie libre.

On cherche donc les conditions sur ψ pour que les solutions en $\boldsymbol{X}$ de l'équation

$$K_G\,\boldsymbol{G} + K_X\,\boldsymbol{X} + K_{X^2}\,\boldsymbol{X}^2 = \boldsymbol{0}$$

soient uniquement sphériques, c'est-à-dire de déviateur nul.

Si on pose $\boldsymbol{X} = \frac{X_I}{3}\,\boldsymbol{G} + \boldsymbol{X}_d$, où $\boldsymbol{X}_d$ est le déviateur de $\boldsymbol{X}$. Le tenseur de déformation est donc complètement caractérisé par X_I et le déviateur $\boldsymbol{X}_d$. Les déformations à contrainte nulle sont solution de :

$$\left(K_G + \frac{X_I}{3}\,K_X + \frac{X_I^2}{9}\,K_{X^2}\right)\boldsymbol{G} + \left(K_X + \frac{2\,X_I}{3}K_{X^2}\right)\boldsymbol{X}_d + K_{X^2}\,\boldsymbol{X}_d^2 = \boldsymbol{0} \qquad \text{(G.1)}$$

G.1.1 Condition nécessaire d'existence d'une solution sphérique

Pour que $\boldsymbol{X}_d = 0$ soit solution de (G.1), il faut que

$$K_G\left(X_I, \frac{X_I^2}{3}, \frac{X_I^3}{27}\right) + \frac{X_I}{3}\,K_X\left(X_I, \frac{X_I^2}{3}, \frac{X_I^3}{27}\right) + \frac{X_I^2}{9}\,K_{X^2}\left(X_I, \frac{X_I^2}{3}, \frac{X_I^3}{27}\right) = 0$$

ait une solution en X_I. Il faut donc choisir ψ_X tel que cette équation ait une solution. De plus, cette solution doit être unique pour que la dilatation thermique sans contraintes soit stable.

- si on utilise $\boldsymbol{M}$ comme tenseur de déformation, la condition nécessaire est que l'équation
$$\partial_1\psi_M\left(M_I, \frac{M_I^2}{3}, \frac{M_I^3}{27}\right) + \frac{2\,M_I}{3}\,\partial_2\psi_M\left(M_I, \frac{M_I^2}{3}, \frac{M_I^3}{27}\right) + \partial_3\psi_M\left(M_I, \frac{M_I^2}{3}, \frac{M_I^3}{27}\right) = 0$$
ait une solution unique en M_I.
- si on utilise $\boldsymbol{V}$ comme tenseur de déformation, la condition nécessaire est que l'équation
$$\frac{V_I}{3}\,\partial_1\psi_V\left(V_I, \frac{V_I^2}{3}, \frac{V_I^3}{27}\right) + \left(\frac{V_I^2}{3} - 1\right)\partial_2\psi_V\left(V_I, \frac{V_I^2}{3}, \frac{V_I^3}{27}\right) + \frac{V_I^3}{27}\,\partial_3\psi_V\left(V_I, \frac{V_I^2}{3}, \frac{V_I^3}{27}\right)$$
ait une solution *positive* unique en V_I.
- si on utilise $\boldsymbol{B}$ comme tenseur de déformation , la condition nécessaire est que l'équation
$$\frac{B_I}{3}\,\partial_1\psi_B\left(B_I, \frac{B_I^2}{3}, \frac{B_I^3}{27}\right) + \left(\frac{B_I^2}{3} - 1\right)\partial_2\psi_B\left(B_I, \frac{B_I^2}{3}, \frac{B_I^3}{27}\right) + \frac{B_I^3}{27}\,\partial_3\psi_B\left(B_I, \frac{B_I^2}{3}, \frac{B_I^3}{27}\right)$$
ait une solution *positive* unique en B_I.

G.1.2 Quelques conditions suffisantes pour éviter les solutions non sphériques

Si on choisit ψ_X tel que $K_{X^2}(X_I, X_{II}, X_{III}) = 0\ \forall X_I, X_{II}, X_{III}$, l'équation (G.1) devient

$$\left(K_G + \frac{X_I}{3}\,K_X\right)\boldsymbol{G} + \left(K_X + \frac{2\,X_I}{3} K_{X^2}\right)\boldsymbol{X}_d = \boldsymbol{0}$$

dont la solution en $\boldsymbol{X}_d$ ne peut être que nulle car un déviateur sphérique ne peut être que nul.

Si on choisit ψ_X tel que $K_X(X_I, X_{II}, X_{III}) + \frac{2\,X_I}{3} K_{X^2}(X_I, X_{II}, X_{III}) = 0\ \forall X_I, X_{II}, X_{III}$, l'équation (G.1) devient

$$\left(K_G - \frac{X_I^2}{9}\,K_{X^2}\right)\boldsymbol{G} + K_{X^2}\,\boldsymbol{X}_d^2 = \boldsymbol{0}$$

dont la solution en $\boldsymbol{X}_d$ ne peut être que nulle car un déviateur sphérique ne peut être que nul.

Suivant le tenseur utilisé on en déduit de (6.9), (6.10) et (6.11) page 139 des conditions suffisantes sur ψ_X pour que les déformations à contrainte nulle soient uniquement sphériques :

- avec $\boldsymbol{M}$: $K_M + \frac{2\,M_I}{3}\,K_{M^2} = -\partial_2\psi_M - \frac{M_I}{3}\,\partial_3\psi_M = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\psi_M = f_M\left(T, M_I, 3\,M_{III} - M_I M_{II}\right)}$
  ou $K_{M^2} = \partial_3\psi_M = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\psi_M = f_M(T, M_I, M_{II})}$
- avec $\boldsymbol{V}$: $K_V + \frac{2\,V_I}{3}\,K_{V^2} = \partial_1\psi_V + \frac{V_I}{3}\,\partial_2\psi_V = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\psi_V = f_V\left(T, 6\,V_{II} - V_I^2, V_{III}\right)}$
  ou $K_{V^2} = -\partial_2\psi_V = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\psi_M = f_V(T, V_I, V_{III})}$
- avec $\boldsymbol{B}$: $K_B + \frac{2\,B_I}{3}\,K_{B^2} = \partial_1\psi_B + \frac{B_I}{3}\,\partial_2\psi_B = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\psi_B = f_B\left(T, 6\,B_{II} - B_I^2, B_{III}\right)}$
  ou $K_{B^2} = -\partial_2\psi_B = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\psi_B = f_B(T, B_I, B_{III})}$

G.2 Thermoélasticité isotrope transverse

Ici on utilise $\boldsymbol{B}$ comme tenseur de déformation car la loi de comportement (voir (4.8) page 130) est d'expression plus simple:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} = &\frac{2\,\rho_0}{B_{III}^{\frac{1}{2}}}\left[\partial_3\psi_B B_{III}\boldsymbol{G} + (\partial_1\psi_B + B_I\partial_2\psi_B)\,\boldsymbol{B} - \partial_2\psi_B\,\boldsymbol{B}^2\right]\\ &+ \frac{2\,\rho_0}{B_{III}^{\frac{1}{2}}}\left[\partial_4\psi_B\,(\boldsymbol{B}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{N}_t + \boldsymbol{N}_t\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{B}) + \partial_5\psi_B\,(\boldsymbol{B}^2\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{N}_t + \boldsymbol{N}_t\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{B}^2)\right]\\ &+ \frac{2\,\rho_0}{B_{III}^{\frac{1}{2}}}\left[-\,(\partial_4\psi_B B_{IV} + \partial_5\psi_B B_V)\,\boldsymbol{N}_t + \partial_5\psi_B\boldsymbol{B}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{N}_t\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{B}\right]\end{aligned}$$

Les tenseurs de déformation à contrainte nulle sont solution de

$$\begin{aligned}\boldsymbol{0} = \partial_3\psi_B B_{III}\boldsymbol{G} &+ (\partial_1\psi_B + B_I\partial_2\psi_B)\,\boldsymbol{B} - \partial_2\psi_B\,\boldsymbol{B}^2\\ &+ \partial_4\psi_B\,(\boldsymbol{B}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{N}_t + \boldsymbol{N}_t\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{B}) + \partial_5\psi_B\,(\boldsymbol{B}^2\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{N}_t + \boldsymbol{N}_t\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{B}^2)\\ &- (\partial_4\psi_B B_{IV} + \partial_5\psi_B B_V)\,\boldsymbol{N}_t + \partial_5\psi_B\boldsymbol{B}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{N}_t\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{B}\end{aligned} \tag{G.2}$$

G.2.1 Décomposition de la transformation

On constate expérimentalement que la dilatation à contrainte nulle d'un milieu isotrope transverse est une composition d'une dilatation uniforme dans la direction d'anisotropie $\boldsymbol{n}_t$ dont le gradient est $\boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{G} + (k_2 - 1)\,\boldsymbol{N}t$ [1] et d'une dilatation isotrope autour de $\boldsymbol{n}_t$ dont le gradient est $\boldsymbol{F}_1 = k_1\,\boldsymbol{G} + (1 - k_1)\,\boldsymbol{N}t$ [2].

On montre facilement que :

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{F}_2\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{F}_1 = k_1\,\boldsymbol{G} + (k_2 - k_1)\,\boldsymbol{N}_t$$

et que le tenseur de déformation souhaité est :

$$\widetilde{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{F}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{F}^T = k_1^2\,\boldsymbol{G} + (k_2^2 - k_1^2)\,\boldsymbol{N}_t$$

On montre facilement que

$$\widetilde{B}_{IV} = \widetilde{\boldsymbol{B}}\,\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{N}t = k_2^2 \qquad \Longrightarrow \qquad k_2^2 = \widetilde{B}_{IV} \tag{G.3}$$

$$\widetilde{B}_I = \mathrm{Tr}\widetilde{\boldsymbol{B}} = 2\,k_1^2 + k_2^2 \qquad \Longrightarrow \qquad k_1^2 = \frac{\widetilde{B}_I - \widetilde{B}_{IV}}{2} \tag{G.4}$$

Les solutions souhaitées sont donc de la forme

$$\widetilde{\boldsymbol{B}} = \frac{\widetilde{B}_I - \widetilde{B}_{IV}}{2}\,\boldsymbol{G} + \frac{3\,\widetilde{B}_{IV} - \widetilde{B}_I}{2}\,\boldsymbol{N}_t$$

On prend un tenseur de déformation quelconque sous la forme :

$$\boldsymbol{B} = \widetilde{\boldsymbol{B}} + \boldsymbol{C} = \frac{\widetilde{B}_I - \widetilde{B}_{IV}}{2}\,\boldsymbol{G} + \frac{3\,\widetilde{B}_{IV} - \widetilde{B}_I}{2}\,\boldsymbol{N}_t + \boldsymbol{C}$$

où le tenseur complémentaire $\boldsymbol{C}$ est un tenseur du second ordre symétrique, sans partie sphérique (un déviateur) et tel que $\boldsymbol{C}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{N}_t = 0$, c'est-à-dire que $\boldsymbol{C}$ est orthogonal aux solutions souhaitées. On cherche des conditions pour que la seule solution en $\boldsymbol{C}$ soit $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{0}$.

1. voir C.2 page 214
2. voir C.3 page 216

Le tenseur complémentaire $\boldsymbol{C}$ étant symétrique et de trace nulle, ses composantes dans sa base principale sont :

$$\begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & -c_1-c_2 \end{pmatrix}$$

De plus, il est orthogonal à $\boldsymbol{N}_t$. On a donc une relation entre $c1$ et c_2 :

$$c_1\, n_1^2 + c_2\, n_2^2 - (c_1 + c_2)\, n_3^2 = 0$$

Le tenseur $\boldsymbol{C}$ est donc défini à une constante multiplicative près, et on peut prendre :

$$[C] = c \begin{pmatrix} n_2^2 - n_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_3^2 - n_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_1^2 - n_2^2 \end{pmatrix}$$

qui est bien de trace nulle et orthogonal à $\boldsymbol{N}_t$ (c'est-à-dire $\boldsymbol{C}\,\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{N}_t = 0$). On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\boldsymbol{C}^2 &= c^2\,\left[(n_2^2-n_3^2)^2 + (n_3^2-n_1^2)^2 + (n_1^2-n_2^2)^2\right] = c^2\, f(\boldsymbol{n}_t)\\
\boldsymbol{C}^2\,\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{N}_t &= c^2\,\left[n_1^2(n_2^2-n_3^2)^2 + n_2^2(n_3^2-n_1^2)^2 + n_3^2(n_1^2-n_2^2)^2\right] = c^2\, g(\boldsymbol{n}_t)\\
(\boldsymbol{N}_t\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{C}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{N}_t)\,\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{N}_t &= (\boldsymbol{C}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{N}_t\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{C})\,\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{N}_t = 0
\end{aligned}$$

G.2.2 Quelques calculs préparatoires

On vérifie facilement que $B_I = \widetilde{B}_I$ et $B_{IV} = \widetilde{B}_{IV}$

On peut alors calculer les tenseurs suivants :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B}^2 &= \frac{(B_I - B_{IV})^2}{4}\,\boldsymbol{G} + \frac{(3\,B_{IV} - B_I)\,(B_I + B_{IV})}{4}\,\boldsymbol{N}_t\\
&\quad + (B_I - B_{IV})\,\boldsymbol{C} + \frac{3\,B_{IV} - B_I}{2}\,(\boldsymbol{N}_t\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{C} + \boldsymbol{C}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{N}_t) + \boldsymbol{C}^2\\
\boldsymbol{B}^3 &= \frac{(B_I - B_{IV})^3}{8}\,\boldsymbol{G} - \frac{(B_I - 3\,B_{IV})(3\,B_{IV}^2 + B_I^2)}{8}\,\boldsymbol{N} + \frac{3\,(B_I - B_{IV})^2}{4}\,\boldsymbol{C}\\
&\quad + \frac{3\,(B_I - B_{IV})}{2}\,\boldsymbol{C}^2 + \boldsymbol{C}^3 - \frac{B_I\,(B_I - 3\,B_{IV})}{2}\,(\boldsymbol{N}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{C} + \boldsymbol{C}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{N})\\
&\quad - \frac{B_I - 3\,B_{IV}}{2}\,(\boldsymbol{N}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{C}^2 + \boldsymbol{C}^2\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{N}) + \frac{(B_I - 3\,B_{IV})^2}{4}\,\boldsymbol{N}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{C}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{N}\\
&\quad - \frac{B_I - 3\,B_{IV}}{2}\,\boldsymbol{C}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{N}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{C}\\
\boldsymbol{B}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{N}_t + \boldsymbol{N}_t\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{B} &= 2\,B_{IV}\,\boldsymbol{N}_t + \boldsymbol{N}_t\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{C} + \boldsymbol{C}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{N}_t\\
\boldsymbol{B}^2\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{N}_t + \boldsymbol{N}_t\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{B}^2 &= 2\,B_{IV}^2\,\boldsymbol{N}_t + \frac{B_I + B_{IV}}{2}\,(\boldsymbol{N}_t\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{C} + \boldsymbol{C}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{N}_t)\\
&\quad + (3\,B_{IV} - B_I)\,\boldsymbol{N}_t\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{C}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{N}_t + \left(\boldsymbol{N}_t\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{C}^2 + \boldsymbol{C}^2\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{N}_t\right)\\
\boldsymbol{B}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{N}_t\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{B} &= B_{IV}^2\,\boldsymbol{N}_t + B_{IV}\,(\boldsymbol{N}_t\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{C} + \boldsymbol{C}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{N}_t) + \boldsymbol{C}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{N}_t\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{C}
\end{aligned}$$

Leurs traces sont :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr}\boldsymbol{B}^2 &= \frac{B_I^2}{2} + \frac{3\,B_{IV}^2}{2} - B_I B_{IV} + \operatorname{Tr}\boldsymbol{C}^2 \\
\operatorname{Tr}\boldsymbol{B}^3 &= \frac{B_I^3 + 3\,B_I B_{IV}^2 - 3\,B_I^2 B_{IV} + 3\,B_{IV}^3}{4} + \frac{3\,(B_I - B_{IV})}{2}\operatorname{Tr}\boldsymbol{C}^2 + \operatorname{Tr}\boldsymbol{C}^3 \\
&\quad - \frac{3\,(B_I - 3\,B_{IV})}{2}\,\boldsymbol{C}^2 \overline{\overline{\otimes}}\, \boldsymbol{N}_t \\
\operatorname{Tr}(\boldsymbol{B}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{N}_t + \boldsymbol{N}_t\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{B}) &= 2\,B_{IV} \\
\operatorname{Tr}(\boldsymbol{B}^2\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{N}_t + \boldsymbol{N}_t\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{B}^2) &= 2\,B_{IV}^2 + 2\,\boldsymbol{C}^2\,\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{N}_t \\
\operatorname{Tr}(\boldsymbol{B}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{N}_t\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{B}) &= B_{IV}^2 + \boldsymbol{C}^2\,\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{N}_t
\end{aligned}$$

Les invariants sont :

$$\begin{aligned}
B_{II} &= \frac{3\,B_I^2 - 2\,B_I B_{IV} + 3\,B_{IV}^2}{4} + \frac{\operatorname{Tr}\boldsymbol{C}^2}{2} \\
B_{III} &= \frac{B_{IV}(B_I - B_{IV})^2}{4} - \frac{B_{IV}\operatorname{Tr}\boldsymbol{C}^2}{2} + \frac{\operatorname{Tr}\boldsymbol{C}^3}{3} - \frac{B_I - 3\,B_{IV}}{2}\,\boldsymbol{C}^2\,\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{N}_t \\
B_V &= B_{IV}^2 + \boldsymbol{C}^2\,\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{N}_t
\end{aligned}$$

Leurs produits scalaires avec $\boldsymbol{N}t$ sont :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B}^2\,\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{N}_t &= B_{IV}^2 + \boldsymbol{C}^2\,\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{N}_t \\
(\boldsymbol{B}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{N}_t + \boldsymbol{N}_t\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{B})\,\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{N}_t &= 2\,B_{IV} \\
(\boldsymbol{B}^2\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{N}_t + \boldsymbol{N}_t\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{B}^2)\,\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{N}_t &= 2\,B_{IV}^2 + 2\,\boldsymbol{C}^2\,\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{N}_t \\
(\boldsymbol{B}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{N}_t\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{B})\,\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{N}_t &= B_{IV}^2
\end{aligned}$$

L'équation (G.2) page 241 devient :

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{B_I - B_{IV}}{2}\,\partial_1\psi_B + \frac{B_I^2 - B_{IV}^2}{4}\,\partial_2\psi_B + B_{III}\,\partial_3\psi_B\right)\boldsymbol{G} \\
&+ \left(\frac{3\,B_{IV} - B_I}{2}\,\partial_1\psi_B + \frac{(B_I - B_{IV})(3\,B_{IV} - B_I)}{4}\,\partial_2\psi_B + B_{IV}\,\partial_4\psi_B + (3\,B_{IV}^2 - B_V)\,\partial_5\psi_B\right)\boldsymbol{N}_t \\
&+ (\partial_1\psi_B + B_{IV}\,\partial_2\psi_B)\,\boldsymbol{C} + \left(\frac{B_I - 3\,B_{IV}}{2}\,\partial_2\psi_B + \partial_4\psi_B + \frac{B_I + 3\,B_{IV}}{2}\,\partial_5\psi_B\right)(\boldsymbol{N}_t\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{C} + \boldsymbol{C}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{N}_t) \\
&- \partial_2\psi_B\,\boldsymbol{C}^2 + (3\,B_{IV} - B_I)\,\partial_5\psi_B\,\boldsymbol{N}_t\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{C}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{N}_t + \partial_5\psi_B\,(\boldsymbol{N}_t\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{C}^2 + \boldsymbol{C}^2\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{N}_t) \\
&+ \partial_5\psi_B\,\boldsymbol{C}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{N}_t\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{C} = \boldsymbol{0} \qquad \text{(G.5)}
\end{aligned}$$

G.2.3 Conditions nécessaires de l'existence de solutions telles que $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{0}$

Si une solution telle que $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{0}$ elle est solution de

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T} = &\left(\frac{B_I - B_{IV}}{2}\,\partial_1\psi_B + \frac{B_I^2 - B_{IV}^2}{4}\,\partial_2\psi_B + \frac{B_{IV}(B_I - B_{IV})^2}{4}\,\partial_3\psi_B\right)\boldsymbol{G} \\
&+ \left(\frac{3\,B_{IV} - B_I}{2}\,\partial_1\psi_B + \frac{(B_I - B_{IV})(3\,B_{IV} - B_I)}{4}\,\partial_2\psi_B + B_{IV}\,\partial_4\psi_B + 2\,B_{IV}^2\,\partial_5\psi_B\right)\boldsymbol{N}_t = \boldsymbol{0}
\end{aligned}$$

où les $\partial_i\psi_B$ sont pris pour les valeurs $\left(B_I, \dfrac{3\,B_I^2 - 2\,B_I B_{IV} + 3\,B_{IV}^2}{4}, \dfrac{B_{IV}(B_I - B_{IV})^2}{4}, B_{IV}, B_{IV}^2\right)$.

Cette équation tensorielle est équivalente au système $\{\,\mathrm{Tr}\boldsymbol{T}=0$ et $\mathrm{Dev}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{0}\}$, c'est-à-dire au système de deux équations à deux inconnues B_I et B_{IV} suivant :

$$\begin{aligned} 0 &= B_I\partial_1\psi_B + \frac{(B_I+3\,B_{IV})(B_I-B_{IV})}{2}\,\partial_2\psi_B + \frac{3\,B_{IV}\,(B_I-B_{IV})^2}{4}\,\partial_3\psi_B \\ &\quad + B_{IV}\,\partial_4\psi_B + 2\,B_{IV}^2\,\partial_5\psi_B \qquad \text{(G.6)} \\ 0 &= \frac{3\,B_{IV}-B_I}{2}\,\partial_1\psi_B + \frac{(B_I-B_{IV})(3\,B_{IV}-B_I)}{4}\,\partial_2\psi_B + B_{IV}\,\partial_4\psi_B + 2\,B_{IV}^2\,\partial_5\psi_B \qquad \text{(G.7)} \end{aligned}$$

où les $\partial_i\psi_B$ sont pris pour les valeurs $\left(B_I, \dfrac{3\,B_I^2-2\,B_IB_{IV}+3\,B_{IV}^2}{4}, \dfrac{B_{IV}(B_I-B_{IV})^2}{4}, B_{IV}, B_{IV}^2\right)$.

La fonction $\psi_B(B_I,B_{II},B_{III},B_{IV},B_V)$ doit être choisie telle que la solution de ce système soit unique et telle que $B_I=2\,k_1^2+k_2^2>0$ et $B_{IV}=k_2^2>0$.

G.2.4 Quelques conditions suffisantes pour éviter les solutions telles que $\boldsymbol{C}\neq\boldsymbol{0}$

Une première condition suffisante

La trace de l'équation (G.5) page 243 s'écrit :

$$\begin{aligned} B_I\,\partial_1\psi_B &+ \frac{(B_I+3\,B_{IV})(B_I-B_{IV})}{2}\,\partial_2\psi_B + 3\,B_{III}\,\partial_3\psi_B \\ &+ B_{IV}\,\partial_4\psi_B + (3\,B_{IV}^2-B_V)\,\partial_5\psi_B + c^2\,(-f(\boldsymbol{n}_t)\,\partial_2\psi_B + 3\,g(\boldsymbol{n}_t)\,\partial_5\psi_B) = 0 \end{aligned}$$

Une condition suffisante pour que $c=0$ soit solution unique est

$$\begin{aligned} B_I\,\partial_1\psi_B &+ \frac{(B_I+3\,B_{IV})(B_I-B_{IV})}{2}\,\partial_2\psi_B + 3\,B_{III}\,\partial_3\psi_B \\ &+ B_{IV}\,\partial_4\psi_B + (3\,B_{IV}^2-B_V)\,\partial_5\psi_B = 0 \quad \forall T, B_I, B_{II}, B_{III}, B_{IV}, B_V \end{aligned}$$

Cette condition suffisante est très forte, car elle rend identiquement nulle la première condition nécessaire (G.6). Il est possible que la condition nécessaire (G.7) ait alors plusieurs solutions.

La solution est :

$$\psi_B(T,B_I,B_{II},B_{III},B_{IV},B_V) = f_B\left(T, \frac{B_{III}}{B_I^3}, \frac{4\,B_{II}-B_I^2+3\,B_{IV}^2-B_IB_{IV}}{4}, B_I(B_V-B_{IV}^2)\right)$$

Une seconde condition suffisante

L'équation (G.5) page 243 doublement contractée avec $\boldsymbol{N}_t$ donne :

$$\begin{aligned} B_{IV}\,\partial_1\psi_B &+ B_{IV}(B_I-B_{IV})\,\partial_2\psi_B + B_{III}\,\partial_3\psi_B \\ &+ B_{IV}\,\partial_4\psi_B + (3\,B_{IV}^2-B_V)\,\partial_5\psi_B + c^2\,(-f(\boldsymbol{n}_t)\,\partial_2\psi_B + 3\,g(\boldsymbol{n}_t)\,\partial_5\psi_B) = 0 \end{aligned}$$

Une condition suffisante pour que $c=0$ soit solution unique est

$$\begin{aligned} B_{IV}\,\partial_1\psi_B &+ B_{IV}(B_I-B_{IV})\,\partial_2\psi_B + B_{III}\,\partial_3\psi_B \\ &+ B_{IV}\,\partial_4\psi_B + (3\,B_{IV}^2-B_V)\,\partial_5\psi_B = 0 \quad \forall T, B_I, B_{II}, B_{III}, B_{IV}, B_V \end{aligned}$$

La solution est :

$$\psi_B(T,B_I,B_{II},B_{III},B_{IV},B_V) = f_B\left(T, B_{IV}-B_I, B_{II}+B_IB_{IV}-B_I^2, \frac{B_{III}}{B_{IV}}, B_{IV}(B_V-B_{IV}^2)\right)$$

Table des matières

I Concepts fondamentaux **5**

1 Concepts de Base **7**

1.1 Concepts mathématiques . . . 7

1.2 Concepts physiques . . . 8

1.3 Définition de distances dans un corps : forme d'un corps . . . 9

1.4 Observateur . . . 10

1.5 Tenseur de changement d'observateur . . . 10

1.6 Vecteur position, Vitesse, Accélération . . . 11

1.7 Cas particulier des corps rigides . . . 12

1.8 En bref 13

2 Champs matériels **15**

2.1 Définition . . . 15

2.2 Description des champs matériels . . . 16

2.2.1 Description de Lagrange d'un champ matériel . . . 16

2.2.2 Description d'Euler d'un champ matériel . . . 16

2.2.3 Avantages de ces descriptions . . . 17

2.3 Description locale, gradient . . . 17

2.3.1 Gradient d'une application . . . 17

2.3.2 Application aux champs matériels . . . 18

2.4 Dérivée particulaire . . . 18

2.5 En bref... . . . 19

3 Objectivité des grandeurs physiques **21**

3.1 Objectivité d'une grandeur scalaire . . . 21

3.1.1 Définition . . . 21

3.1.2 Descriptions de Lagrange d'un champ scalaire objectif . . . 22

3.1.3 Description d'Euler d'un champ scalaire objectif . . . 22

3.1.4 Dérivée particulaire d'un champ scalaire objectif 23
3.2 Objectivité d'une grandeur vectorielle 23
3.2.1 Définition 24
3.2.2 Propriétés 24
3.2.3 Descriptions de Lagrange d'une grandeur vectorielle objective 24
3.2.4 Descriptions d'Euler d'une grandeur vectorielle objective 25
3.2.5 Dérivée particulaire d'une grandeur vectorielle objective 26
3.3 Objectivité d'une grandeur tensorielle du second ordre 26
3.3.1 Définition 26
3.3.2 Propriétés 27
3.3.3 Descriptions de Lagrange d'une grandeur tensorielle objective du second ordre 28
3.3.4 Descriptions d'Euler d'une grandeur tensorielle objective du second ordre . 29
3.3.5 Dérivée particulaire d'une grandeur tensorielle objective du second ordre . . 30
3.4 Objectivité d'une grandeur tensorielle d'ordre n 30
3.5 En bref... 31

4 Universalité d'une relation **33**
4.1 Définition 33
4.2 Résultats de la théorie des fonctions isotropes à valeur scalaire 35
4.3 En bref... 37

5 Déformation d'un corps **39**
5.1 Transformation 39
5.2 Description locale de la transformation 40
5.2.1 Relation entre gradient lagrangien et gradient eulérien d'un champ matériel 41
5.2.2 Interprétations physiques 41
5.2.3 Objectivité de la normale unitaire à une facette matérielle 44
5.3 Formule de changement d'observateur du gradient de la transformation 45
5.4 Décomposition polaire de la transformation locale 45
5.4.1 Utilisation de $\boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{V}$ comme tenseurs de déformation 46
5.4.2 Directions principales de déformation 47
5.4.3 Décomposition polaire d'une composition de transformations 47
5.4.4 Décomposition de $\boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{V}$ en extensions dans les directions propres 49
5.4.5 Formules de changement d'observateur pour les tenseurs de déformation $\boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{V}$ 49
5.5 Champ de déplacement 50
5.6 Quelques tenseurs de déformation 51

5.6.1 Limites vers les petites déformations 55

5.6.2 Une propriété des tenseurs de déformation $\boldsymbol{L}$ et $\boldsymbol{M}$ 55

5.7 En bref... 56

6 Vitesse de déformation 57

6.1 Étude du champ des vitesses 57

6.2 Relations avec les tenseurs de déformation 59

6.3 Interprétations physiques de $\boldsymbol{D}$ 59

6.4 Changements d'observateur 62

6.5 En bref... 62

7 Efforts intérieurs 63

7.1 Tenseur des contraintes de Cauchy 63

7.2 Objectivité du tenseur des contraintes de Cauchy 63

7.3 Autres «tenseurs des contraintes» 64

7.3.1 Tenseur des contraintes de Boussinesq (ou premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff) 64

7.3.2 Tenseur de Piola-Lagrange ou second tenseur de Piola-Kirchhoff 65

7.3.3 Tenseur de Kirchhoff 66

II Principes fondamentaux de la physique classique 67

1 Conservation de la masse 71

2 Principe fondamental de la mécanique 73

2.1 Expressions locales 73

2.2 Objectivité des grandeurs 74

2.3 Théorème de la puissance cinétique 74

2.4 Formulation intégrale de l'équation de mouvement 76

3 Premier principe de la thermodynamique 79

3.1 Remarques préliminaires 79

3.2 État local, variables d'état indépendantes 79

3.2.1 Choix des variables d'état 80

3.2.2 Espace des états, fonctions d'état 81

3.2.3 Évolution thermodynamique 82

3.2.4 Changement de variables d'état 83

3.2.5 Objectivité des variables d'état 83

3.3 Premier principe de la thermodynamique pour les milieux continus 85
3.3.1 Énoncé global pour une transformation finie 85
3.3.2 Conséquences de l'existence de la fonction d'état énergie interne 86
3.3.3 Détermination de l'énergie interne massique d'un état 86
3.3.4 Composition de transformations et énergie interne 87
3.3.5 Expression globale dans une transformation finie en mécanique des milieux continus 88
3.3.6 Expression globale une transformation infinitésimale 88
3.3.7 Expression locale dans une transformation infinitésimale 90
3.4 En bref... 90

4 Second principe de la thermodynamique 91

4.1 Remarques préliminaires 91
4.2 Énoncé du principe pour un corps fini dans une transformation infinitésimale . . . 92
4.3 Expression locale du second principe pour une transformation infinitésimale 93
4.3.1 Hypothèse complémentaire 94
4.3.2 Remarques 94
4.4 Dissipation 95
4.4.1 Autre expression de la dissipation 95
4.4.2 Introduction de l'énergie libre : 96
4.5 Capacités calorifiques 96
4.6 Modélisation des milieux continus 97
4.7 En bref... 97

III Milieux continus sans dissipation intrinsèque (Milieux élastiques) 99

1 Milieux élastiques 101

2 Élasticité isotrope en évolution isotherme 103

2.1 Définition 103
2.2 Réduction de la dimension de l'espace des états 104
2.3 Loi de comportement élastique isotrope isotherme 106
2.3.1 Avec le tenseur de Hill gauche $\boldsymbol{M}$ 106
2.3.2 Avec la distorsion à gauche $\boldsymbol{V}$ 107
2.3.3 Avec le tenseur de Cauchy-Green gauche $\boldsymbol{B}$ 107
2.3.4 Avec quelques tenseurs de déformation non objectifs couramment utilisés . 108
2.4 Discussion 111

2.5 Loi tangente . . . 112
2.6 Identification d'un matériau élastique isotrope . . . 114
2.7 Quelques lois couramment rencontrées dans les codes de calcul . . . 115
2.7.1 Loi de Piola-Kirchhoff . . . 115
2.7.2 Le modèle Neo-Hookien . . . 115
2.7.3 Le modèle de Mooney-Rivlin . . . 116
2.7.4 Le modèle d'Ogden . . . 116
2.8 En bref 117

3 Exemples de construction de lois de comportement isotropes. 119
3.1 Une décomposition de la déformation . . . 119
3.2 Une loi $\boldsymbol{\sigma} = f(\boldsymbol{V})$ . . . 121
3.3 Une loi $\boldsymbol{\sigma} = f(\boldsymbol{M})$ . . . 123
3.4 Discussion . . . 126

4 Milieux élastiques isotropes transverses en évolution isotherme 127
4.1 Définition . . . 127
4.2 Etude de la direction matérielle d'anisotropie . . . 128
4.3 Réduction de la dimension de l'espace des états . . . 128
4.4 Conséquences de la réversibilité intrinsèque . . . 129
4.4.1 Dérivée particulaire de l'énergie interne massique . . . 129
4.4.2 Utilisation du tenseur de Cauchy-Green gauche $\boldsymbol{B}$ . . . 130
4.4.3 Utilisation de la distorsion à gauche $\boldsymbol{V}$ . . . 131

5 Exemple de construction d'une loi de comportement isotrope transverse 133
5.1 Une décomposition de la transformation . . . 133
5.2 Quelques calculs sur la transformation $\boldsymbol{F}_1$ . . . 134
5.3 Choix d'une énergie . . . 135

6 Thermo-élasticité 137
6.1 Définition . . . 137
6.2 Conséquence de la réversibilité intrinsèque . . . 137
6.3 Conséquences du second principe de la thermodynamique . . . 139
6.4 Capacités calorifiques et dilatations . . . 141
6.4.1 Capacité calorifique à déformation constante . . . 142
6.4.2 Capacité calorifique à contrainte nulle . . . 142
6.5 Identification expérimentale d'un milieu thermo-élastique . . . 145
6.6 Conclusion . . . 145

6.7 Thermo-élasticité «incompressible» 146

6.7.1 Définition de l'incompressibilité 146

6.7.2 Conséquences de la réversibilité intrinsèque 147

6.7.3 Capacités calorifiques 149

6.7.4 Conséquences du second principe de la thermodynamique 150

6.8 En bref... 150

7 Le problème thermo-élastique **151**

7.1 Définition du corps et de son modèle de comportement 151

7.2 Définition des sollicitations extérieures 152

7.2.1 Efforts appliqués 152

7.2.2 Déplacements imposés 153

7.2.3 Conditions thermiques 153

7.2.4 Quelques remarques 154

7.3 Le problème d'évolution 154

7.4 Le problème statique 155

7.5 Le «problème» des vibrations libres 156

7.6 Formulations intégrales 156

7.7 Formulation intégrale du problème thermo-élastique d'évolution 158

7.7.1 Formulation à deux champs inconnus T et $\boldsymbol{\xi}$ 158

7.7.2 Formulation à trois champs inconnus T, $\boldsymbol{\xi}$ et $\boldsymbol{\sigma}$ 160

7.7.3 Remarque 160

7.8 Formulation intégrale du problème thermo-élastique statique 160

7.9 Cas de l'élasticité isotherme 161

7.10 Cas de la thermo-élasticité incompressible 161

7.11 Remarques 162

IV Milieux continus avec dissipation intrinsèque sans variables internes **165**

1 Gaz simples **167**

1.1 Définition 167

1.2 Conséquences du second principe de la thermodynamique 167

1.3 Capacités calorifiques 169

1.4 Exemples de gaz simple 170

1.4.1 Exemple de loi de comportement mécanique : les gaz newtoniens 170
1.4.2 Exemple de loi de comportement thermique : la loi de Fourier 171
1.4.3 Les gaz parfaits 172
1.5 Conclusion 173

2 Liquides simples 175

2.1 Définition 175
2.2 Conséquences du second principe de la thermodynamique 175
2.3 Capacités calorifiques 177
2.4 Exemple de liquide simple 177
2.4.1 Exemple de loi de comportement mécanique : les liquides newtoniens 177
2.4.2 Exemple de loi de comportement thermique : la loi de Fourier 179
2.5 Modélisation des liquides 179

3 Milieux visco-élastiques 181

3.1 Définition de la viscoélasticité 181
3.2 Conséquences du second principe 181
3.3 Capacités calorifiques et dilatations 184
3.3.1 Capacité calorifique à déformation constante 184
3.3.2 Capacité calorifique et dilatation «à contrainte nulle» 184
3.4 Visco-élasticité incompressible 184
3.5 En bref... 186

A Compléments d'algèbre sur les tenseurs du second ordre dans $\mathcal{E}_3$ 187

A.1 Tenseurs réels d'ordre 1 187
A.2 Tenseurs réels d'ordre 2 187
A.2.1 Définition 187
A.2.2 Produit interne de tenseurs du second ordre 188
A.2.3 Produit scalaire de deux tenseurs du second ordre 188
A.2.4 Produit mixte de trois tenseurs du second ordre 188
A.2.5 Endomorphisme de $\mathbb{V}$ associé à un tenseur du second ordre 189
A.2.6 Produits tensoriels de tenseurs du second ordre 189
A.2.7 Dérivée d'un tenseur du second ordre 191
A.3 Dérivée de produits de tenseurs du second ordre 191
A.3.1 Puissance entière d'un tenseur du second ordre 191
A.3.2 Dérivée de la puissance entière d'un tenseur du second ordre 192
A.3.3 Inverse d'un tenseur du second ordre 192

A.3.4 Exponentielle d'un tenseur du second ordre 192
A.4 Invariants des tenseurs réels du second ordre 192
A.5 Tenseurs antisymétriques réels du second ordre 194
A.5.1 Définitions 194
A.5.2 Valeurs propres et vecteurs propres d'un tenseur antisymétrique 194
A.5.3 Dérivée d'un tenseur antisymétrique 195
A.5.4 Exponentielle d'un tenseur antisymétrique du second ordre. 195
A.6 Tenseurs symétriques réels 196
A.6.1 Dérivée d'un tenseur symétrique réel 197
A.6.2 Puissance entière d'un tenseur symétrique réel 198
A.6.3 Dérivée de la puissance entière d'un tenseur symétrique réel 198
A.6.4 Exponentielle d'un tenseur symétrique réel 199
A.6.5 Dérivée de l'exponentielle d'un tenseur symétrique 199
A.7 Tenseurs symétriques définis positifs 200
A.7.1 Puissance réelle d'un tenseur symétrique défini positif 200
A.7.2 Dérivée d'une puissance réelle d'un tenseur symétrique défini positif 201
A.7.3 Logarithme népérien d'un tenseur symétrique défini positif 202
A.7.4 Dérivée du logarithme népérien d'un tenseur symétrique défini positif . . . 202
A.8 Tenseurs du second ordre orthogonaux 202
A.8.1 Propriétés algébriques 203
A.8.2 Reconstitution des rotations 204
A.9 Décomposition polaire d'un tenseur du second ordre 205
A.9.1 Propriétés 206

B Dérivée généralisée 207

B.1 Fonction scalaire d'une variable vectorielle 207
B.2 Fonction scalaire de plusieurs variables vectorielles 208
B.3 Fonction scalaire d'une variable tensorielle du second ordre 209
B.4 Fonction scalaire de plusieurs variables tensorielles du second ordre 210
B.5 Applications 211
B.5.1 Quelques dérivées par rapport à un vecteur 211
B.5.2 Quelques dérivées par rapport à un tenseur 211
B.5.3 Quelques dérivées particulaires 212

C Étude de quelques transformations élémentaires **213**

C.1 Dilatation sphérique 213

C.2 Extension/contraction dans une direction $\boldsymbol{i}$ 214

C.3 Dilatation isotrope autour d'une direction $\boldsymbol{i}$ 216

C.4 Cisaillement isovolume de direction $\boldsymbol{i}$ dans le plan $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ 218

C.5 Cisaillement pur de direction $\boldsymbol{i}$ dans le plan $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ 220

C.6 Cisaillement combiné 222

C.7 Transformation isovolume 223

D Résolution de Sym $(\boldsymbol{U} \overline{\otimes} \boldsymbol{X}) = \boldsymbol{S}$ **225**

E Dérivées particulaires des tenseurs de déformation **227**

E.1 Tenseurs objectifs 227

E.1.1 Tenseur de Cauchy-Green gauche $\boldsymbol{B}$ 227

E.1.2 Tenseur de Green-Lagrange gauche $\boldsymbol{K}$ 228

E.1.3 Distorsion à gauche $\boldsymbol{V}$ 229

E.1.4 Tenseur Biot gauche $\boldsymbol{J}$ 229

E.1.5 Tenseur de Hill gauche $\boldsymbol{M}$ 230

E.2 Tenseurs non objectifs 231

E.2.1 Tenseur de Cauchy-Green droit $\boldsymbol{C}$ 231

E.2.2 Tenseur de Green-Lagrange droit $\boldsymbol{E}$ 231

E.2.3 Distorsion à droite $\boldsymbol{U}$ 232

E.2.4 Tenseur de Biot droit $\boldsymbol{P}$ 232

E.2.5 Tenseur de Hill droit $\boldsymbol{L}$ 233

F Propriétés des directions matérielles **235**

F.1 Objectivité de $\boldsymbol{n}_t$ 235

F.2 Dérivée particulaire de $\boldsymbol{n}_t$ 236

F.3 Dérivées particulaires 237

G Déformations à contrainte nulle en thermo-élasticité **239**

G.1 Thermo-élasticité isotrope 239

G.1.1 Condition nécessaire d'existence d'une solution sphérique 240

G.1.2 Quelques conditions suffisantes pour éviter les solutions non sphériques . . 240

G.2 Thermoélasticité isotrope transverse 241

G.2.1 Décomposition de la transformation 241

G.2.2 Quelques calculs préparatoires 242

G.2.3 Conditions nécessaires de l'existence de solutions telles que $\boldsymbol{C} = \mathbf{0}$ 243
G.2.4 Quelques conditions suffisantes pour éviter les solutions telles que $\boldsymbol{C} \neq \mathbf{0}$ . . 244