Chapitre 7

PROBLÈMES DIFFÉRENTIELS À CONDITIONS AUX LIMITES

PROBLÈMES AUX VALEURS PROPRES

1 Introduction

La physique fournit de nombreux exemples de problèmes différentiels qui prennent un aspect assez différent du problème de Cauchy (ou « à conditions initiales ») examiné dans le chapitre précédent. Il s'agit soit de problèmes à conditions aux limites, soit de problèmes aux valeurs propres, les méthodes employées pour résoudre ces deux types de question étant assez proches.

Voici un exemple du premier type. Une poutre de longueur L, soumise à une charge uniforme $q(N/m)$ et à une tension S à chaque extrémité, se déforme verticalement ; j'appelle $w(x)$ le déplacement d'un point de la poutre à partir de l'horizontale. w obéit à l'équation différentielle :

$$w'' - \frac{S}{EI}w = \frac{1}{2EI}qx(x-L),$$

où I est le moment d'inertie de la section droite de la poutre et E le module d'élasticité. Si la poutre repose sur des supports fixes à chaque extrémité, w doit aussi satisfaire aux conditions aux limites :

$$w(0) = w(L) = 0.$$

La résolution est facile si les paramètres sont constants, mais une méthode numérique devient indispensable dès lors que la charge q ou les propriétés (E, I) de la poutre varient avec x.

L'étude des mouvements périodiques d'une corde vibrante de masse linéïque $\mu(x)$, soumise à une tension $T(x)$ fait apparaître un problème de valeurs propres. La déformation de la corde, $y(x)$, obéit à l'équation différentielle :

$$[T(x)y']' + (2\pi\nu)^2\mu(x)y = 0,$$

où ν est la fréquence. y doit aussi respecter des conditions aux limites en $x = 0$ et $x = L$, comme par exemple $y(0) = 0$ (extrémité fixe) ou $\partial y/\partial x|_L = 0$ (extrémité libre). Le problème ainsi posé n'a de solution que pour certaines valeurs de ν (les fréquences propres) ; les fonctions y correspondantes sont les fonctions propres.

Il est facile de généraliser les considérations précédentes. Je suppose avoir affaire à une équation résolue en y'', avec des conditions aux limites séparées sur y (le cas de conditions sur y' est très semblable) :

$$y'' = f(x, y, y') \quad ; \quad y(a) = A \quad ; \quad y(b) = B \quad ; \quad a \leq x \leq b.$$

On rencontre plus rarement des conditions aux limites portant sur y **et** y' :

$$c_0y(a) + c_1y'(a) = A \quad ; \quad d_0y(b) + d_1y'(b) = B.$$

(Il peut en principe arriver qu'une condition concerne les deux extrémités simultanément : $uy(a) + vy(b) = g$, mais je n'examinerai pas ce cas).

Les problèmes à conditions aux limites n'ont pas toujours de solution ; ils peuvent aussi en avoir plusieurs, un comportement que l'équation différentielle très simple

$$w'' + w = 0$$

illustre bien. La solution générale s'écrit $w = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$. Selon les conditions aux limites choisies, le problème différentiel a une, une infinité ou zéro solution :

$w(0) = 0$	$w(\pi/2) = 1$	$w = \sin x$	une solution
$w(0) = 0$	$w(\pi) = 0$	$w = c_1 \sin x$	infinité de solutions
$w(0) = 0$	$w(\pi) = 1$		aucune solution

Il est néanmoins possible, moyennant diverses hypothèses restrictives sur f et sur les conditions aux limites, de démontrer l'existence et l'unicité de la solution du problème différentiel à conditions aux limites.

2 La méthode du tir

2.1 Problème aux limites

Soit à résoudre le problème différentiel à conditions aux limites :

$$y'' = f(x, y, y') \quad ; \quad y(a) = A \quad ; \quad y(b) = B. \tag{1}$$

J'associe à ce premier problème un problème à valeurs initiales :

$$w'' = f(x, w, w') \quad ; \quad w(a) = A \quad ; \quad w'(a) = s \tag{2}$$

qui admet en général une solution unique, dépendante du paramètre s, $w(x, s)$. Par hypothèse, ce problème n'est pas soluble analytiquement et je doit donc en déterminer numériquement la solution pour une valeur donnée de s, par l'une des méthodes exposées au chapitre précédent. Comme il s'agit d'une équation différentielle du second ordre, il faudra sans doute la remplacer par un système différentiel équivalent. Pour résoudre ensuite le problème aux limites, connaissant $w(x, s)$, il me suffit de trouver s tel que :

$$w(b, s) = B$$

ce qui revient à résoudre une équation non linéaire en s. Pour les personnes qui n'auraient eu le bonheur de recevoir un formation militaire, je vais développer l'analogie avec le comportement d'un artilleur. A l'aide d'un canon situé en $x = a$, celui-ci veut atteindre une cible en $x = b$; il ne dispose pour cela que d'un seul réglage, la hausse (angle que fait l'axe du canon avec l'horizontale). Il procède par approximations successives : un coup court, un coup long (il encadre l'objectif) et, idéalement (?), un coup au but. Pour la résolution pratique de problèmes aux limites, il est recommandé de s'inspirer de l'artilleur, en traçant diverses fonctions $w(x, s)$ pour différentes valeurs de s et en observant leur comportement. Ce n'est qu'une fois acquise une certaine expérience du problème que l'on se tournera vers des méthodes plus systématiques.

J'ai présenté de nombreuses méthodes de résolution d'une équation non-linéaire ; la plus simple est la méthode de bissection (ou dichotomie). Sa mise en oeuvre suppose que je dispose de deux valeurs de s telles que $w(b, s_1)$ et $w(b, s_2)$ encadrent B.

D'après un théorème connu sur les équations différentielles, la solution $w(x, s)$ est une fonction continûment dérivable de s. Je peux donc aussi utiliser la méthode de Newton. Je rappelle que, à partir d'une valeur initiale $s^{(0)}$, je calcule de façon itérative des valeurs $s^{(i)}$ à l'aide de la formule :

$$s^{(i+1)} = s^{(i)} - \frac{F[s^{(i)}]}{F'[s^{(i)}]} \quad ; \quad F(s) \equiv w(b, s) - B.$$

J'obtiens $F[s^{(i)}]$ en résolvant le problème différentiel :

$$w'' = f(x, w, w') \quad ; \quad w(a) = A \quad ; \quad w'(a) = s^{(i)}.$$

La méthode la plus simple pour calculer F' consiste à l'approcher par le quotient :

$$F'[s^{(i)}] \cong \{F[s^{(i)} + h] - F[s^{(i)} - h]\}/(2h)$$

J'ai implicitement admis que l'algorithme qui détermine w partait de a et progressait vers les x croissants. Ce n'est pas obligatoire et c'est même suicidaire si w a une discontinuité en $x = a$; dans ce cas, on peut partir de b, avec le même algorithme et un pas négatif. On peut être amené à construire une morceau de solution à partir de a, un autre à partir de b : il faut alors imposer la continuité de w ou de w' au point de rencontre entre a et b. Il est souvent commode d'imposer que la quantité w'/w (la « dérivée logarithmique ») soit continue ; cette condition a l'avantage d'être insensible à la normalisation de w.

Le cas d'une équation différentielle linéaire, fréquent en physique, est nettement plus simple. Il suffit en effet de déterminer deux solutions $w(x, s_1)$ et $w(x, s_2)$ du problème à conditions initiales associé. La bonne valeur de s, soit s_0, pour laquelle $w(b, s_0) = B$, s'obtient par interpolation linéaire. En effet, la solution du problème différentiel est une fonction linéaire des conditions initiales.

Exemple. Soit le problème différentiel :

$$y'' + y = x \; ; y(0) = y(1) = 0.$$

L'équation différentielle du second ordre est équivalente au système :

$$y' = z \; ; z' = y - x,$$

que j'ai résolu par la méthode RK2, avec les conditions initiales $y(0) = 0, y'(0) = s$. Les deux premières exécutions ont donné, pour $s_1 = -0,3$, $y(1) = -0,093915$ et pour $s_2 = 0,1$, $y(1) = 0,242674$. Une interpolation inverse linéaire me donne alors $s_0 = -0,188392$, qui conduit, comme le montre la figure ci-dessous, à $y(1) = 0$. La solution analytique est $y = x - sin(x)/sin(1)$; la dérivée à l'origine est $y'(0) = -0,188395$, très proche de la solution numérique.

2.2 Problèmes de valeurs propres

Un problème aux valeurs propres comme

$$y'' = f(x, y, y', \lambda) \quad ; \quad y(a) = y(b) = 0 \tag{3}$$

peut se ramener à un problème à conditions aux limites en introduisant une fonction inconnue auxiliaire $w \equiv \lambda$ et l'équation auxiliaire $w' = 0$ ou en considérant la valeur propre comme un paramètre ajustable, ce qui est d'une mise en oeuvre plus simple. Je me limite à une équation différentielle linéaire, écrite sous la forme

$$y'' + p(x)y' + \lambda q(x)y = 0 \quad ; \quad y(a) = y(b) = 0 \quad ; \quad a \leq x \leq b. \tag{4}$$

Comme l'équation (4) et ses conditions aux limites sont homogènes, ky est solution si y l'est. J'associe à ce problème de valeurs propres un problème auxiliaire à conditions initiales :

$$v'' + p(x)v' + \lambda q(x) = 0; v(a) = 0; v'(a) = p,$$

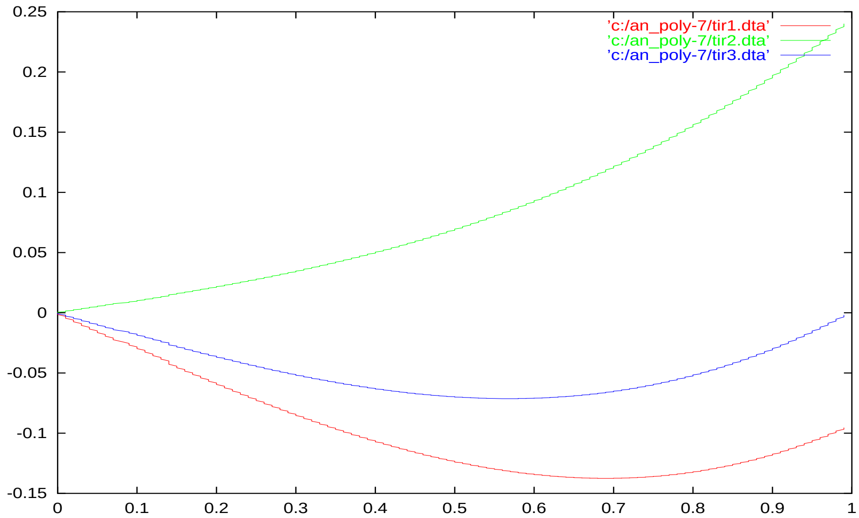

FIG. 1 – . La méthode du tir.

où p est une constante arbitraire, la pente initiale. La solution est de la forme $v = v(x, \lambda, p)$ et je sais la trouver numériquement à l'aide de l'une des méthodes du chapitre précédent. Pour déterminer la solution du problème aux valeurs propres, il me faudra déterminer λ tel que :

$$v(b, \lambda, p) = 0$$

Il s'agit encore d'une équation algébrique, mais ici l'inconnue est λ. Le paramètre p ne sert qu'à fixer la normalisation de y. Il peut être choisi empiriquement avant le début du calcul pour obtenir des valeurs commodes de y. La méthode de dichotomie se révèle très pratique pour trouver λ.

Exemple. La masse linéïque d'une corde de longueur L varie selon la loi $\mu = \mu_0(1+\alpha x)$. Lorsque cette corde effectue des oscillations sinusoïdales, sa forme est définie par l'équation :

$$y'' + (k_0 L)^2(1 + \alpha r)y = 0 \quad ; \quad y(0) = y(1) = 0$$

où $r = x/L, k_0 = 2\pi\nu/c_0$ et $c_0 = \sqrt{(T/\mu_0)}$, T étant la tension. Les fréquences de vibration sont les valeurs de ν telles que le problème différentiel admette une solution. Je les ai cherchées par la méthode du tir et l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 2. La figure montre le résultat de trois exécutions du programme, pour des fréquences proches du second mode ($(k_0L)^2 = 10, 11, 532$ et 13).

3 Méthodes aux différences finies

Dans ce type d'algorithme, je remplace,dans l'équation différentielle, les dérivées $y', y'', \ldots$ par des approximations formées à partir de différences latérales. Je me limite aux problèmes linéaires, comme le problème du second ordre à conditions aux limites

$$y'' + q(x)y = g(x); y(a) = A; y(b) = B$$

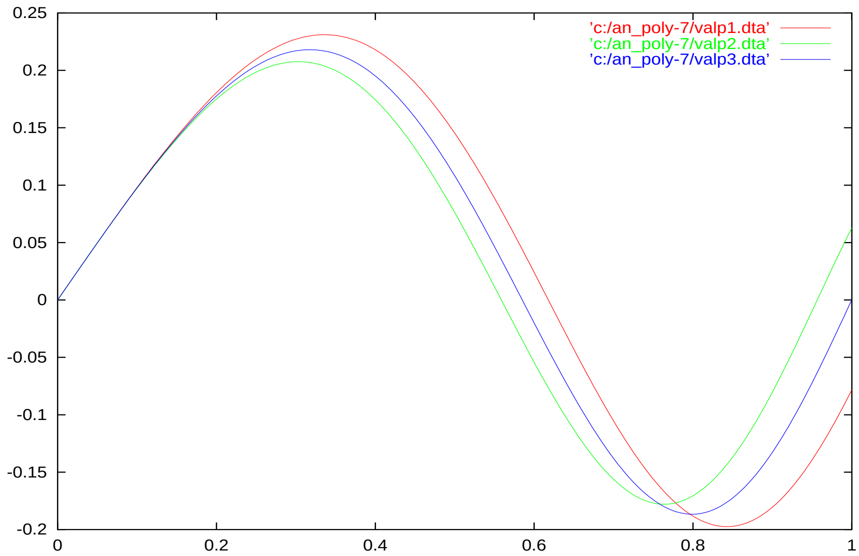

FIG. 2 – : Recherche du 2ième mode d'une corde de densité variable. Le paramètre α vaut 5. La valeur propre est $k_0L = 3,396$.

Pour «discrétiser» ce problème, je subdivise $[a, b]$ en $n + 1$ sous-intervalles égaux, de longueur $h = (b - a)/(n + 1)$, séparés par des pivots d'abscisses $x_i = a + ih$, $x_0 = a, x_{n+1} = b$ et je remplace $y''(x_i)$ par $[u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}]/h^2$, en posant $u_i \simeq y(x_i)$. Ce faisant, je commets une erreur de troncation que le théorème de Taylor appliqué à $y(_{i+1})$ et $y(_{i-1})$ permet d'évaluer à -$(h^2/12)y^{(4)}(x_i + \theta h), -1 < \theta < 1$. Il y a $n + 2$ valeurs de u_i, dont deux nous sont déjà connues : $u_0 = A$, $u_{n+1} = B$; les autres sont solutions d'un système linéaire qui s'écrit, sous forme matricielle :

$$\mathbf{MU} = \mathbf{K}$$

avec les définitions $\mathbf{U} = [u_1, u_2, \ldots, u_n]^T$,$\mathbf{k} = [g_1 + A/h^2, g_2, ...g_{n-1}, g_n + B/h^2]^T$ et

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -2 + q_1h^2 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & -2 + q_2h^2 & 1 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & 1 & -2 + q_nh^2 \end{bmatrix}$$

On a le théorème suivant. Si $q_i \geq 0$ pour $i = 1, 2, ..., n$, alors $\mathbf{A}$ est définie positive : la solution du système linéaire précédent est alors facile, les méthodes de Gauss ou de Cholesky s'appliquent sans permutation de lignes. On montre aussi que l'erreur de troncation est partout d'ordre h^2. Cet algorithme s'étend facilement aux problèmes contenant la dérivée première de y. Il est important de représenter y' par une expression qui respecte la symétrie de la matrice $\mathbf{M}$.

Exemple. Je reprend le problème déjà résolu par la méthode du tir

$$y'' + y = x \; ; y(0) = y(1) = 0.$$

Je vais utiliser 20 points, donc 18 valeurs inconnues $\{u_k\}$. Les éléments de la matrice $\mathbf{M}$ sont $M_{i,i} = h^2 - 2, M_{i,i+1} = M_{i+1,i} = 1$ tandis que les coordonnées de $\mathbf{k}$ sont $k_i = h^2x_i$. Voici le programme pour Scilab. Vous remarquez l'extrême simplicité de la résolution d'un système linéaire de la forme $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$: il suffit d'écrire `x = A\b`.

```
//y''+y = x par discretisation
xmin = 0; xmax = 1;
np = input("nombre total de points: ");
ni = np-1;
nx = np-2;
M = zeros(nx,nx);
h = (xmax-xmin)/ni;
for i=2:nx-1
  M(i,i) = h*h-2;
  M(i,i+1) = 1;
  M(i,i-1) = 1;
end
M(1,2) = 1; M(nx,nx-1) = 1; M(nx,nx) = h*h-2; M(1,1) = h*h-2;
x = linspace(xmin+h,xmax-h,nx)';
b = h*h*x
y = M\b
yy = [0;y;0]; xx = [xmin;x;xmax];
xset("window",0), xbasc(0)
xsegs([xmin,xmax],[0,0])
plot2d(xx,yy,rect=[xmin,-0.1,xmax,0.1])
```

qui produit le trace de la figure 3.

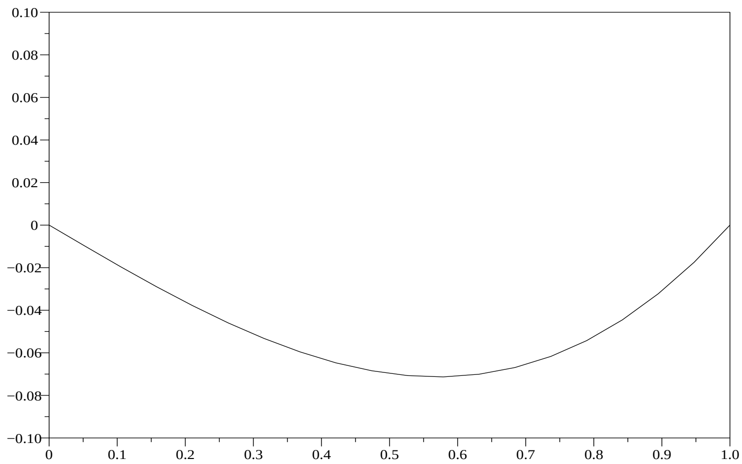

FIG. 3 – :Solution d'un problème avec conditions aux limites. La fonction inconnue est «discrétisée» sur 20 points

La méthode de discrétisation s'applique aussi en principe aux problèmes de valeurs propres (linéaires). La différence est que l'on n'aboutit à un problème simple d'algèbre linéaire seulement dans quelques cas particuliers. C'est le cas pour

$$y'' + q(x)y = \lambda y \quad ; \quad y(a) = y((b) = 0.$$

On obtient une équation matricielle aux valeurs propres de la forme :

$$\mathbf{MU} = \lambda \mathbf{U}$$

avec la même matrice $\mathbf{M}$ que précédemment. Si $\mathbf{A}$ est d'ordre n, alors l'équation précédente admet n solutions comprenant chacune une valeur propre λ_k et un vecteur propre $\mathbf{U}^{(k)}$ (voir chapitre « éléments propres »).

Les deux approches que je vient de décrire (tir et discrétisation) sont en gros équivalentes, du point de vue de la commodité comme du point de vue de la qualité des résultats, pour tout les problèmes simples. Si les fonctions (comme $q(x)$) présentent des discontinuités, il vaut mieux utiliser la discrétisation, plus stable.

4 Méthodes variationnelles, Rayleigh-Ritz-Galerkin

Les méthodes variationnelles utilisent le fait que la solution d'un problème différentiel à conditions aux limites possède souvent la propriété de rendre minimale ou plus généralement stationnaire une certaine intégrale. La recherche de ce minimum peut être plus facile que la résolution directe, surtout en présence de discontinuités des fonctions intervenant dans le problème différentiel. Le but de ce paragraphe est de présenter une brève introduction à ces méthodes pour le cas simpliste d'une seule variable. Je considère le problème (que l'on appelle un problème de Sturm-Liouville)

$$-(py')' + qy = f \quad ; \quad y(a) = 0 \quad ; \quad y(b) = 0$$

où p, q et f sont des fonctions de x continûment dérivables sur $I = [a, b]$. J'introduis un «opérateur différentiel» $\hat{L}$ par la relation

$$\hat{L}(v) \equiv -(pv)' + qv,$$

si bien que (1) peut aussi s'écrire :

$$\hat{L}(y) = f$$

Je vais me servir du produit scalaire de fonctions définies sur I déjà introduit au chapitre 5, cela pour une fonction de poids égale à 1 :

$$(u, v) = \int_a^b u(x)v(x)dx \quad ; \quad \| u \|^2 = (u, u).$$

On démontre alors facilement les propriétés suivantes :

*L est «symétrique» : $(u, L(v)) = (L(u), v)$.

*L est défini positif : $(L(u), u) = (u, L(u)) > 0$ pour tout $u > 0$.

Je définis un nombre dépendant de u (une «fonctionnelle» de u) :

$$F(u) = (u, u) - 2(u, f),$$

où f est la fonction qui figure au second membre de l'équation différentielle. Si y vérifie $L(y) = f$, on a le théorème :

$$F(u) > F(y)$$

pour tout $u \neq y$. Ce résultat m'amène à chercher une approximation à y en rendant minimale $F(u)$. Cela sera d'autant plus facile que u est proche de la «vraie» solution, tout en gardant une forme telle que les calculs soient simples. Il est courant de prendre pour u une combinaison linéaire de fonctions de base :

$$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + ... + a_n u_n.$$

La fonction $F(u)$ devient alors $F(a_1, ...a_n) = F(\mathbf{a})$. Soit $\mathbf{v}$ le vecteur de coordonnées (u_i, f) et $\mathbf{S}$ la matrice d'éléments $s_{i,j} = (u_i, u_j)$. Un calcul élémentaire montre que :

$$F(\mathbf{a}) = \mathbf{a}^T \mathbf{S} \mathbf{a} - 2\mathbf{v}^T \mathbf{a}.$$

Résoudre le problème différentiel est donc approximativement équivalent à trouver le vecteur $\mathbf{a}$ qui rend F minimale. On montre encore que ce vecteur, $\mathbf{a}_0$, est solution du système :

$$\mathbf{S}\mathbf{a} = \mathbf{v}.$$

Cette solution existe et est même facile à trouver parce que $\mathbf{S}$ est définie positive.

Les méthodes d'éléments finis (à deux et trois dimensions) utilisent un formalisme variationnel analogue au précédent pour mettre réduire les équations aux dérivées partielles, rencontrées en mécanique des fluides ou en élasticité, à un système d'équations linéaires.