Chapitre 4

POLYNÔMES ORTHOGONAUX

1 Introduction

Les suites de polynômes orthogonaux apparaissent fréquemment en physique mathématique en particulier au cours de la résolution d'équations aux dérivées partielles (Laplace, Schrödinger) par la méthode de séparation des variables. Elles sont aussi très utilisées en analyse numérique. On connaît de nombreuses familles de polynômes orthogonaux, qui ont en commun un certain nombre de propriétés simples, que je vais décrire succinctement.

2 Définition, Existence

Soit $[a,b]$ un intervalle (qui peut être fini ou infini) et $w(x)$ une fonction strictement positive et intégrable sur cet intervalle. On appelle polynômes orthogonaux sur $[a,b]$, par rapport à la "fonction de poids" $w(x)$, une suite de polynômes $G_0(x)$, $G_1(x)$,..., $G_n(x)$,...(où G_k est de degré k) tels que :

$$(G_k, G_n) = \int_a^b w(x)G_k(x)G_n(x)dx = 0 \text{ si } k \neq n. \tag{1}$$

Le nombre

$$(f,g) = \int f(x)g(x)w(x)dx \tag{2}$$

est souvent appelé «produit scalaire» de f par g ; lorsqu'il est nul, on dit que les fonctions f et g sont «orthogonales». En faisant $f = g$ dans la relation précédente, on obtient le carré de la norme de f :

$$\| f \|^2 = (f,f) = \int [f(x)]^2 w(x)dx. \tag{3}$$

On montre facilement que ce produit scalaire est linéaire en f et g, symétrique et qu'il vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$(f,g) \leq \| f \| \| g \| .$$

Les formules (1,2) ne définissent pas entièrement les G_n ; il est commode d'imposer les conditions supplémentaires :

$$(G_n, G_n) = \int_a^b w[G_n]^2 dx = 1; \int_a^b xwG_nG_{n+1}dx > 1$$

On a alors :

$$(G_k, G_n) = \int_a^b w(x)G_k(x)G_n(x)dx = \delta_{k,n}$$

Les polynômes sont ainsi orthonormés.

Pour prouver l'existence de ces polynômes, je vais les construire par le procédé de Gram-Schmidt, appliqué à l'ensemble des puissances successives de x. G_0 est une constante positive, telle que $(G_0, G_0) = 1$. g_1 est une fonction linéaire que je définis comme :

$$g_1 = x - (x, G_0)G_0.$$

g_1 est manifestement orthogonal à G_0. G_1 est défini comme g_1 normé :

$$G_1 = g_1 / \parallel g_1 \parallel .$$

Je procède ensuite par itération de ces relations ; g_2 est une fonction quadratique définie par :

$$g_2 = x_2 - (x^2, G_0)G_0 - (x^2, G_1)G_1,$$

$$G_2 = g_2 / \parallel g_2 \parallel .$$

En faisant le produit scalaire de g_2 successivement par G_0 et G_1, je vérifie que cette fonction est bien orthogonale à G_0 et G_1. Je construis ainsi la suite des polynômes G_k, à partir des nombres $(x, G_0), (x^2, G_0), \ldots, (x^k, G_l)\ldots$

3 Relation avec les polynômes habituels

Théorème Tout polynôme de degré n est représentable comme combinaison linéaire de polynômes G_k, avec $k \leq n$.

J'ai construit les G_k comme combinaisons linéaires des x^p ; un polynôme quelconque $\Phi(x)$, lui-même combinaison linéaire des x^p, peut donc s'exprimer comme :

$$\Phi(x) = a_0 G_0 + a_1 G_1 + \cdots + a_n G_n.$$

La détermination des a_i est facile : j'effectue en effet le produit scalaire de l'égalité précédente par G_p $(p \leq n)$. Il vient :

$$a_p = (\Phi, G_p).$$

J'ai au contraire $(\Phi, G_{n+1}) = 0$, quelque soit $\Phi(x)$ de degré n, puisque G_{n+1} est orthogonal à tous les G_k d'indice inférieur. Par ailleurs, $\Phi(x)$ sera identiquement nul si et seulement si : $(\Phi, G_p) = a_p \equiv 0; p = 0, 1, \ldots, n$. J'en déduis le :

Théorème. Le polynôme G_k est orthogonal à tout polynôme de degré inférieur.

Remarque. Le produit scalaire (xG_{n-1}, G_n) est encore le produit d'un polynôme de degré n, xG_{n-1}, par G_n ; si b_n dénote le coefficient de G_n dans le développement de xG_{n-1}, le produit scalaire considéré se réduit à :

$$(xG_{n-1}, G_n) = b_n(G_n, G_n) \quad \neq 0.$$

4 Zéros de G_n

Les zéros de G_n appartiennent à I et sont tous simples. Pour le prouver, je suppose que G_n n'admette dans I que $p < n$ racines, toutes simples et je montre que j'aboutis à une contradiction. Je forme le polynôme Φ de degré $p < n$ qui admet ces mêmes racines. Le produit scalaire (G_n, Φ) doit être nul puisque $\deg(\Phi) < n$; or ce produit scalaire est en fait l'intégrale :

$$(G_n, \Phi) = \int w(x)\Phi(x)G_n(x)dx$$

qui ne peut être nulle, puisque l'intégrant garde un signe constant dans I. En effet, le produit ΦG_n admet les racines de G_n (ou de Φ) comme racines doubles et ne peut changer de signe lorsque x traverse l'une de ces racines ; de plus $w(x) > 0$ sur I. Il faut donc que $p = n$.

Je montre maintenant que G_n ne peut avoir de racines multiples. Dans un raisonnement par l'absurde calqué sur le précédent, je suppose, au contraire, que G_n admet, dans I, $n-2$ racines simples et une racine double. Je prends alors pour Φ le polynôme de degré $n-2$ qui admet les mêmes racines simples que G_n. L'intégrale qui exprime le produit scalaire $(\Phi, G_n) \equiv 0$ ne peut s'annuler, parce que l'intégrant garde un signe constant dans I. Je pourrais généraliser ce raisonnement en définissant Φ comme le polynôme de degré $< n$, qui admet comme racines tous les zéros d'ordre impair de G_n.

5 Relation de récurrence

Je vais montrer l'existence d'une relation de récurrence, de la forme :

$$\alpha_n G_{n+1}(x) = (\beta_n x + \gamma_n) G_n(x) - \delta_n G_{n-1}(x).$$

où les $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n$ sont des constantes. Soit c_k le coefficient de x^k dans G_k (terme de plus haut degré) ; on pose $a_n = c_{n+1}/c_n$. Je considère le polynôme $F = G_{n+1} - a_n x G_n$: il est de degré n au plus et peut donc s'exprimer comme une combinaison linéaire des $G_i, i < n+1$:

$$F = \sum_0^n b_j G_j.$$

Formons le produit scalaire $(F, G_p) = (G_{n+1}, G_p) - a_n(xG_n, G_p) = -a_n(xG_n, G_p)$, à condition que $p < n+1$. De plus, l'examen de l'intégrale qui définit (xG_n, G_p) montre que : $(xG_n, G_p) = (G_n, xG_p)$. Comme xG_p est de degré au plus $p+1$, il est orthogonal à G_n tant que $p < n-1$. J'ai ainsi montré que F était orthogonal à $G_p, 0 \leq p \leq n-2$. Le développement de F s'écrit alors :

$$F = G_{n+1} - a_n x G_n = b_n G_n + b_{n-1} G_{n-1}$$

et

$$G_{n+1} = (a_n x + b_n) G_n + b_{n-1} G_{n-1}.$$

Cette relation est bien de la forme annoncée, à condition de choisir $\alpha_n = 1$ et $\delta_n = -b_n$. En manipulant cette relation à l'aide des propriétés d'orthogonalité, on montre que $a_n > 0$ et $b_n > 0$. En posant $G_{-1} = 0$, je définis complètement les G_n.

6 Disposition des zéros de G_n

Théorème. Les zéros de G_k séparent ceux de G_{k+1}.

Ce résultat est vrai pour G_0 et G_1 ; il se démontre par récurrence dans le cas général. On peut dire aussi que la suite de G_n forme une suite de Sturm.

7 Équation différentielle pour G_n

On peut montrer que chaque G_k obéit à une équation différentielle du second ordre. Il est plus facile de démontrer une réciproque partielle. Soit l'équation différentielle :

$$A(x)y'' + B(x)y' + C_n y = 0,$$

où C_n est une constante (avec $C_n \neq C_p$ si $n \neq p$), $A(x)$ et $B(x)$ deux fonctions régulières de x. Supposons que l'équation admette une solution polynômiale $y = G_n(x)$ de degré n pour chaque valeur de n.

On peut alors trouver un intervalle $[a, b]$ et une fonction de poids $w(x)$ tels que la suite des G_n soit orthogonale par rapport à ces éléments. En effet, G_n et G_p satisfont séparément à l'équation proposée :

$$AG_n'' + BG_n' + C_n G_n = 0,$$
$$AG_p'' + BG_p' + C_p G_p = 0.$$

Je multiplie la première relation par wG_p, la seconde par wG_n et je retranche membre à membre ; il vient

$$Aw(G_n G_p'' - G_p G_n'') + Bw(G_n G_p' - G_p G_n') + w(C_p - C_n)G_n G_p = 0$$

équation qui s'écrit encore :

$$[Aw(G_n G_p' - G_p G_n')]' + [wB - (wA)'](G_n G_p' - G_p G_n') + w(C_p - C_n)G_n G_p = 0.$$

Je considère l'équation différentielle $u(x)B(x) - (u(x)A(x))' = 0$; j'appelle encore $w(x)$ la solution qui obéit aux conditions aux limites $Aw|_a = Aw|_b = 0$, ce qui définit la fonction inconnue $w(x)$. En intégrant terme à terme l'équation (1), avec cette définition de w, j'obtiens :

$$(C_p - C_n) \int_a^b wG_n G_p dx = 0,$$

ce qui signifie que les polynômes G_n sont orthogonaux sur l'intervalle I par rapport à la fonction de poids w.

8 Fonction génératrice

On peut en général trouver une fonction $g(u, x)$ telle que l'on puisse écrire :

$$g(u, x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k G_k(x) u^k$$

les C_k étant des constantes et u une variable réelle auxiliaire. Si la fonction g a une forme analytique «simple» par rapport à u et à x, on l'appelle la fonction génératrice de la suite des G_k.

9 Formule d'Olinde Rodrigues

Les G_k sont proportionnels à la dérivée d'ordre k d'une fonction $U_k(x)$ (formule d'Olinde Rodrigues) :

$$G_n(x) = \frac{1}{w} \frac{d^n}{dx^n} U_n(x)$$

laquelle est solution d'un problème différentiel :

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}[\frac{1}{W}\frac{d^n U_n}{dx^n}] = 0$$

avec les conditions aux limites $U = U' = U'' = ... = U^{(n-1)} = 0$ en $x = a$ et $x = b$.

10 Identité de Darboux-Chrisofel

Une démonstration plutôt laborieuse permet d'établir l'identité de Darboux-Christofel :

$$\sum_{k=0}^{n} G_k(x)G_k(y) = \frac{1}{(x-y)a_n}[G_{n+1}(x)G_n(y) - G_n(x)G_{n+1}(y)]$$

souvent utilisée pour simplifier des expressions impliquant les G_n (la constante a_n a été définie au 5).

11 Polynômes de Legendre

Les polynômes de Legendre sont orthogonaux sur [-1,1] par rapport à la fonction de poids $w = 1$. A partir de $P_0 = 1$, on peut orthogonaliser les puissances successives de x pour obtenir

$$P_0 = 1 \quad ; \quad P_1 = x \quad ; \quad P_2 = (3x^2 - 1)/2 \quad ; \quad P_3 = (5x^3 - 3x)/2,$$

$$P_4 = (35x^4 - 30x^2 + 3)/8 \quad ; \quad P_5 = (63x^5 - 70x^3 + 15x)/8.$$

Le polynôme P_k a le degré et la parité de k. En intégrant par partie dans la relation d'orthogonalité $(P_k, P_l) = 0$, on démontre une relation d'Olinde Rodrigues :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n$$

avec $P_n(1) = 1$. Avec ces définitions, les P_n ne sont pas normalisés à 1 mais à $(P_n, P_n) = 2/(2n+1)$. Ils admettent la fonction génératrice :

$$g(ux) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2ux + u^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x)u^k$$

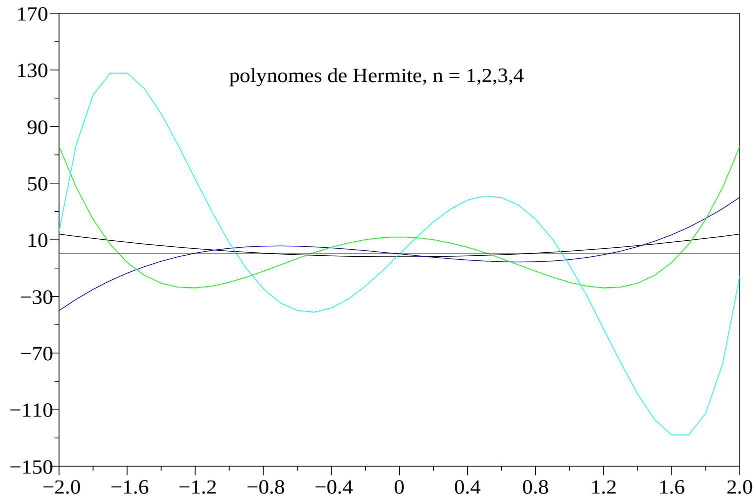
d'où l'on tire la relation de récurrence :

$$(n+1)P_{n+1} - (2n+1)xP_n + nP_{n-1} = 0.$$

Les polynômes de Legendre obéissent à l'équation différentielle :

$$(x^2 - 1)P_n'' + 2xP_n' - n(n+1)P_n = 0.$$

12 Polynômes de Hermite



Les polynômes de Hermite sont orthogonaux sur l'intervalle : $[-\infty, +\infty]$, par rapport à la fonction de poids : $w(x) = \exp(-x^2)$. Ils satisfont à la relation de récurrence :

$$H_{n+1} - 2xH_n + 2nH_{n-1} = 0$$

et à l'équation différentielle :

$$H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n = 0.$$

Ils peuvent se déduire de la fonction génératrice :

$$g(u, x) = \exp(2ux - u^2) = \sum_k H_k(x)u^k/k!$$

On connaît aussi une formule de Rodrigues :

$$H_n = (-1)^n \exp(x^2) \frac{d^n}{dx^n} \exp(-x^2).$$

Les polynômes d'Hermite admette une représentation générale assez simple :

$$H_n = \sum_0^{n/2} (-\frac{1}{2})^p \frac{1}{p!} \frac{1}{(n-2p)!} (2x)^{n-2p}$$

et les premiers représentants de l'espèce s'écrivent

$$H_0 = 1 \quad ; \quad H_1 = 2x \quad ; \quad H_2 = 4x^2 - 2 \quad ; \quad H_3 = 8x^3 - 12x;$$

$$H_4 = 16x^4 - 48x^2 + 12 \quad ; \quad H_5 = 32x^5 - 160x^3 + 120x.$$

Vous pouvez constater que H_k a la parité de k.

13 Polynômes de Laguerre

On peut les définir à partir d'une formule d'Olinde Rodrigues :

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} e^{-x} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x} x^n \right),$$

qui me permet d'écrire les premiers membres de la suite :

$$L_0 = 1 \quad ; \quad L_1 = -x + 1 \quad ; \quad L_2 = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2) \quad ; \quad L_3 = \frac{1}{6}(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6).$$

Ces polynômes admettent la fonction génératrice :

$$\frac{1}{1-t} \exp\left(-\frac{xt}{1-t} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} L_k(x) t^k.$$

et la relation de récurrence :

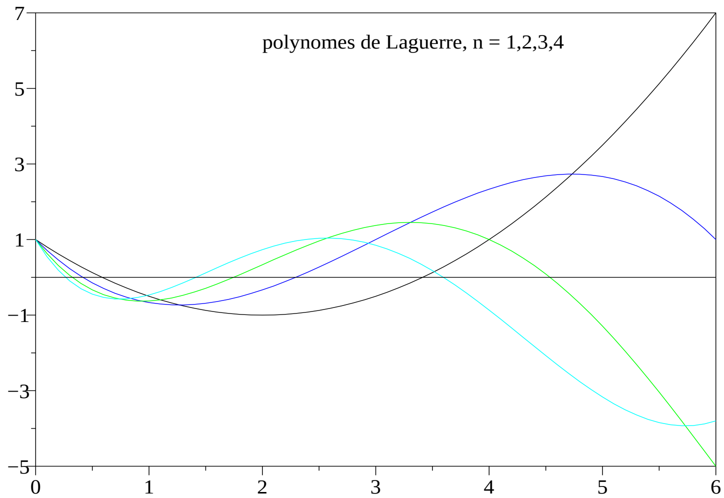
$$(n+1)L_{n+1} + (x - 2n - 1)L_n + nL_{n-1} = 0.$$

Ils satisfont à l'équation différentielle :

$$xL_n'' + (1-x)L_n' + nL_n = 0.$$

Ces polynômes sont orthogonaux sur $[0, \infty]$ par rapport à la fonction de poids $w = e^{-x}$; ils sont normalisés à un : $(L_n, L_n) = 1$. Grace au programme ci-dessous, j'ai calculé et tracé les premiers polynômes de Laguerre.

```
//polynomes de Laguerre
//(n+1)L_{n+1} + (x -2n -1)L_n + nL_{n-1} = 0
function fn = L(n,x)
if n == 0, fn = 1, end
if n == 1, fn = 1 - x, end
if n > 1
  k = 1; Lavder = 1; Lder = 1 - x;
  while k < n
    L = ((2*k + 1 - x).*Lder - k*Lavder)/(k+1);
    Lavder = Lder;
    Lder = L;
    k = k+1;
  end
  fn = L;
end
endfunction
x = 0:0.1:6;
xset("window",0), xbasc(0)
plot2d(x,[L(2,x)',L(3,x)',L(4,x)',L(5,x)'])
xsegs([0,6],[0,0])
xset("font size", 3)
xstring( 2, 6, "polynomes de Laguerre, n = 1,2,3,4")
```



14 Polynômes de Tschebychef

Ces polynômes admettent la définition simple :

$$T_n(x) = cos[narccos(x)].$$

On obtient une relation de récurrence entre T_{n-1}, T_n et T_{n+1} en calculant $\cos[(n \pm 1)x]$:

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x).$$

J'en déduis les expressions des premiers polynômes

$$T_0 = 1 \quad ; \quad T_1 = x \quad ; \quad T_2 = 2x^2 - 1 \quad ; \quad T_3 = 4x^3 - 3x;$$

$$T_4 = 8x^4 - 8x^2 + 1.$$

Les T_n obéissent à l'équation différentielle

$$(1 - x^2)T_n'' - xT_n' + n^2 T_n = 0.$$

Ils sont orthogonaux sur l'intervalle [-1,1] par rapport à la fonction de poids

$$w = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Leur fonction génératrice s'écrit

$$g(x, u) = \frac{1 - ux}{1 - 2ux + u^2} = \sum_{k=0}^{\infty} u^k T_k(x)$$

15 Autres polynômes classiques

Voici les définitions de certaines suites moins fréquemment rencontrées.

15.1 Jacobi

$I = [-1, 1]$; $w = (1-x)^{\alpha}(1-x)^{\beta}$; α, β > -1

Les polynômes de Jacobi recouvrent plusieurs cas particuliers intéressants : polynômes de Legendre, pour $\alpha = \beta = 0$, polynômes de Tschebychef de première espèce ($\alpha = \beta =$ - 1/2), de deuxième espèce ($\alpha = \beta = 1/2$), de troisième espèce ($\alpha =$ - $\beta =$ -1/2), de quatrième espèce ($\alpha =$ - $\beta = 1/2$) et polynômes de Gegenbauer ($\alpha = \beta = \lambda$ - 1/2).

15.2 Laguerre généralisé

$I = [0, \infty]$; $w = x^{\alpha}e^{-t}$; $\alpha > -1$.

Les polynômes de Laguerre habituels sont obtenus en faisant $\alpha = 0$ dans la définition des polynômes généralisés.

15.3 Fonctions de Legendre associées

Elles sont régies par l'équation différentielle suivante, où m est un entier inférieur ou égal à n

$$(1-x^2)u'' - 2xu' + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right] u = 0$$

qui se réduit à l'équation différentielle définissant les polynômes de Legendre habituels quand $m = 0$. La solution régulière est $u(x) = P_n^m(x)$ et on peut montrer que

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x).$$

P_n^p est un polynôme en x lorsque m est pair. En posant $x = \cos\theta$, je met l'équation différentielle sous une forme qui apparaît souvent dans les problèmes à symétrie sphérique

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dv}{d\theta}\right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right] v = 0.$$

Les premières fonctions de Legendre associés s'écrivent

$$P_1^1 = \sqrt{1-x^2} = \sin\theta \quad ; \quad P_2^1 = 3x\sqrt{1-x^2} \quad ; \quad P_2^2 = 3(1-x^2) = 3\sin^2\theta$$

$$P_3^1 = \frac{3}{2}(5x^2-1)\sqrt{1-x^2} \quad ; \quad P_3^2 = 15x(1-x^2) \quad ; \quad P_3^3 = 15x(1-x^2)^{3/2}.$$